

АСИМПТОТИКА ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕРА ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПРОЧНОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО БАКА**Ю.И. Виноградов¹, В.П. Георгиевский², М.В. Константинов¹**

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vino.yuri@rambler.ru; konst@smate.msk.ru

²ОАО “Корпорация “Московский институт теплотехники”, Москва, Российская Федерация

Простейшая математическая модель механики деформирования изотропной сферической оболочки построена А.Л. Гольденвейзером. Модель получила название асимптотической ввиду утверждения, что она тем точнее описывает реальное явление, чем тоньше оболочка. Количественной оценки такого утверждения нет. Выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния оболочки с варьированием ее относительной толщины и характера внешней краевой нагрузки. Используются асимптотическая модель и эталонная, построенная с погрешностью допущений Кирхгофа теории оболочек. Результаты сопоставлены. Для локального вида нагружения по оценке погрешности установлены пределы использования асимптотической модели механики деформирования сферической оболочки, полезные при выборе математической модели для расчета на прочность сферического бака.

Ключевые слова: сферическая оболочка, асимптотическая модель деформирования, погрешность.

GOLDENWEISER ASYMPTOTIC FORM FOR STRENGTH ANALYSIS OF THE SPHERICAL TANK**Yu.I. Vinogradov¹, V.P. Georgievskiy², M.B. Konstantinov¹**

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vino.yuri@rambler.ru; konst@smate.msk.ru

²JSC “Corporation “Moscow Institute of Thermal Technology”, Moscow, Russian Federation

The paper considers an elementary model of the isotropic spherical shell deformation, which was developed by A.L. Goldenweiser. The model is known as an asymptotic model since it proves to determine the real phenomenon more precise if its shell is thinner. There is still no quantitative assessment of this statement. The deflected mode of the shell is analyzed considering variations in both its relative thickness and the external boundary loading condition. The analysis was carried out using both the asymptotic model and the reference model featuring an error due to the assumptions proposed by Kirchhoff. The analysis results of the two models were compared with each other. Asymptotic model limits are found judging the error estimates of the local loading type. These limits can help to choose an appropriate mathematical model for the spherical tank strength calculation.

Keywords: spherical shell, asymptotic model of deflection, error.

Одним из методов решения задач механики деформирования оболочек является разделение напряженного состояния на медленно меняющееся (основное) и напряженное состояние с большой изменчивостью (краевой эффект). Первое распространяется на всю оболочку,

а второе имеет местный характер и локализуется вблизи края оболочки или в местах резкого изменения ее геометрии или нагрузки, т.е. предполагается, что существенно различающиеся по своим свойствам составляющие напряженного состояния должны описываться разными дифференциальными уравнениями.

Такую модель механики деформирования оболочки называют асимптотической, как соответствующую реальному явлению с уменьшением толщины оболочки [1–3]. При этом численных оценок погрешности асимптотического решения до настоящего времени не получено.

Таким образом, актуальна задача определения значений погрешности асимптотической модели в зависимости от толщины оболочки и, следовательно, пределов ее использования для расчета на прочность сферических баков.

Задача решается на примере деформирования сферической оболочки под действием локальной нагрузки путем сопоставления значений внутренних силовых факторов, вычисленных по асимптотической модели и эталонной модели — модели [4], построенной с погрешностью допущений Кирхгофа теории оболочек, в развитие результатов исследований Института механики АН УССР [5].

Рассмотрим изотропную сферическую оболочку постоянной толщины h с радиусом кривизны срединной поверхности R в географической системе координат (ϑ, φ) .

Обозначения искоемых параметров задачи соответствуют принятым в книге [6]: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \chi_1, \chi_2, \tau$ — параметры деформации оболочки, связанные с перемещениями U_1, U_2, U_3 точек ее срединной поверхности по направлениям ортов: e_1 — меридиональному, e_2 — окружному, e_3 — радиальному направлениям; θ_1, θ_2 — углы поворота нормали к поверхности оболочки в проекциях на плоскости e_1e_3 и e_2e_3 ; N_1, N_2, S, Q_1, Q_2 — меридиональная и окружная силы, сила сдвига и поперечные силы; M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты.

Асимптотическая модель. Уравнения асимптотической модели [1], описывающие медленно меняющуюся часть напряженного состояния, получим как частный случай общей теории оболочек.

Предположим, что оболочка точно или приближенно деформируется без растяжения срединной поверхности, т.е. линейные деформации и сдвиг в срединной поверхности оболочки $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0$. С учетом этого из геометрических уравнений теории оболочек следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \vartheta} + U_3 &= 0; & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1 \operatorname{ctg} \vartheta + U_3 &= 0; \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial \vartheta} - U_2 \operatorname{ctg} \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее будем предполагать, что выполнено разделение переменных методом Фурье — в предположении симметричности внешней нагрузки на оболочку относительно начала координаты φ , выполнено разложение параметров задачи в тригонометрические ряды вида

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\vartheta) \cos k\varphi \text{ — для симметричных по } \varphi \text{ величин;}$$

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vartheta) \sin k\varphi \text{ — для антисимметричных по } \varphi \text{ величин.}$$

Тогда уравнения (1) сведутся к виду

$$\begin{aligned} \frac{dU_{1,k}}{d\vartheta} + U_{3,k} &= 0; & \frac{k}{\sin \vartheta} U_{2,k} + U_{1,k} \operatorname{ctg} \vartheta + U_{3,k} &= 0; \\ -\frac{k}{\sin \vartheta} U_{1,k} + U_{2,k} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{dU_{2,k}}{d\vartheta} &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы с учетом ограниченности в полюсе сферы

$$U_{1,k}^{(M)} = U_{2,k}^{(M)} = C_{1,k} \sin \vartheta \operatorname{tg}^k \vartheta / 2; \quad U_{3,k}^{(M)} = -C_{1,k} [k + \cos \vartheta] \operatorname{tg}^k \vartheta / 2, \quad (2)$$

где $C_{1,k}$ — произвольная постоянная интегрирования.

После подстановки (2) в геометрические уравнения для компонент изгибной деформации теории оболочек

$$\begin{aligned} \chi_{1,k} &= \frac{1}{R} \frac{d\theta_{1,k}}{d\vartheta}; & \chi_{2,k} &= \frac{1}{R \sin \vartheta} [\theta_{1,k} \cos \vartheta + k\theta_{2,k}]; \\ \tau_k &= -\frac{1}{R \sin \vartheta} \left[k\theta_{1,k} + \theta_{2,k} \cos \vartheta - \frac{1}{R} \frac{dU_{2,k}}{d\vartheta} \sin \vartheta \right]; \\ \theta_{1,k} &= \frac{1}{R} \left(U_{1,k} - \frac{dU_{3,k}}{d\vartheta} \right); & \theta_{2,k} &= \frac{1}{R} \left(U_{2,k} + \frac{k}{\sin \vartheta} U_{3,k} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

получим

$$\begin{aligned} \chi_{1,k}^{(M)} &= C_{1,k} k (k^2 - 1) \frac{\operatorname{tg}^k \vartheta / 2}{R^2 \sin^2 \vartheta}; & \chi_{2,k}^{(M)} &= \tau_k^{(M)} = -\chi_{1,k}^{(M)}; \\ \theta_{1,k}^{(M)} &= C_{1,k} k [k + \cos \vartheta] \frac{\operatorname{tg}^k \vartheta / 2}{R \sin \vartheta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Изгибающие и крутящий моменты определим из физических уравнений $M_{i,k} = D(\chi_{i,k} + \mu\chi_{j,k})$, $H_k = (1 - \mu)D\tau_k$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ — цилиндрическая жесткость), исключая деформации (4):

$$M_{1,k}^{(M)} = C_{1,k} D(1 - \mu) k(k^2 - 1) \frac{\operatorname{tg}^k \vartheta / 2}{R^2 \sin^2 \vartheta};$$

$$M_{2,k}^{(M)} = H_k^{(M)} = -M_{1,k}^{(M)}.$$
(5)

Замечено [1], что подстановка (5) в уравнения равновесия элемента срединной поверхности оболочки приводит к равенствам $Q_{1,k} = Q_{2,k} = 0$. Таким образом, полученное решение позволяет определить только моменты. Поэтому его принято называть чисто моментным и приписывать верхний индекс (M).

Далее предположим $Q_{1,k} = Q_{2,k} = 0$. Тогда силовые уравнения равновесия элемента срединной поверхности оболочки [1] примут вид системы

$$\frac{dN_{1,k}}{d\vartheta} + (N_{1,k} - N_{2,k}) \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{k}{\sin \vartheta} S_k = 0;$$

$$\frac{dS_k}{d\vartheta} + 2S_k \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{k}{\sin \vartheta} N_{2,k} = 0; \quad N_{1,k} + N_{2,k} = 0,$$

решение которой, с учетом ограниченности сил в полюсе сферы

$$N_{1,k}^{(B)} = C_{2,k} \frac{\operatorname{tg}^k \vartheta / 2}{\sin^2 \vartheta}; \quad N_{2,k}^{(B)} = S_k^{(B)} = -N_{1,k}^{(B)},$$
(6)

где $C_{2,k}$ — произвольная постоянная интегрирования.

Перемещения точек срединной поверхности оболочки определим из физических уравнений $\varepsilon_{i,k} = (N_{i,k} - \mu N_{j,k}) / Eh$, $\omega_k = 2(1 + \mu) S_k / Eh$ ($i, j = 1, 2, i \neq j$) и геометрических уравнений для компонент тангенциальной деформации с учетом (6)

$$\varepsilon_{1,k}^{(B)} = \frac{1}{R} \left(\frac{dU_{1,k}}{d\vartheta} + U_{3,k} \right) = \frac{1 + \mu}{Eh} N_{1,k}^{(B)};$$

$$\varepsilon_{2,k}^{(B)} = \frac{1}{R} \left(U_{1,k} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{k}{\sin \vartheta} U_{2,k} + U_{3,k} \right) = -\frac{1 + \mu}{Eh} N_{1,k}^{(B)};$$

$$\omega_k^{(B)} = -\frac{1}{R} \left(\frac{k}{\sin \vartheta} U_{1,k} - \frac{dU_{2,k}}{d\vartheta} + U_{2,k} \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 2 \frac{1 + \mu}{Eh} S_k^{(B)}.$$
(7)

Решением данной системы является сумма любого ее частного и общего решений однородных дифференциальных уравнений, описывающих деформирование оболочки без растяжения срединной поверхности.

Частное решение системы (7) имеет вид

$$U_{1,k}^{(B)} = -U_{2,k}^{(B)} = C_{1,k} (1 + \mu) \frac{R}{2Eh} \eta_k \sin \vartheta \operatorname{tg}^k \vartheta / 2;$$

$$U_{3,k}^{(B)} = C_{1,k} (1 + \mu) \frac{R}{2Eh} \frac{k + \cos \vartheta}{k(k^2 - 1)} \operatorname{tg}^k \vartheta / 2,$$
(8)

$$\text{где } \eta_k = \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta / 2}{2(k+1)} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \vartheta / 2}{2(k-1)} + \frac{1}{k}.$$

Общее решение системы (7) получено авторами (см. (2)).

Из (3) с учетом (8) следует, что

$$\theta_{1,k}^{(B)} = C_{1,k} \frac{1 + \mu k + \cos \vartheta \operatorname{tg}^k \vartheta / 2}{2Eh} \frac{1}{k^2 - 1} \frac{1}{\sin \vartheta}. \quad (9)$$

Далее, с учетом (8) аналогичным (5) способом могут быть найдены моменты $M_{1,k}^{(B)}$, $M_{2,k}^{(B)}$, $H_k^{(B)}$. Однако можно показать, что для тонких оболочек тангенциальные силы имеют более высокий порядок, чем моменты. Таким образом, моментами, полученными согласно перемещениям (8), можно пренебречь.

Для получения решения типа простой (по А.Л. Гольденвейзеру) краевой эффект делается ряд предположений, позволяющих упростить уравнения равновесия и геометрические уравнения теории оболочек. В частности предполагается, что изменяемость напряженного состояния в направлении нормали к краю оболочки существенно выше, чем вдоль края — дифференцирование по φ , если и приводит к увеличению искомых функций f , то не к такому значительному, как дифференцирование по ϑ , т.е. $|\partial f / \partial \vartheta| \gg |\partial f / \partial \varphi|$, $|\partial f / \partial \vartheta| \gg |f|$.

Решению по теории простого краевого эффекта принято приписывать верхний индекс (К).

Воспользовавшись [1], запишем известные соотношения теории

$$\begin{aligned} N_{1,k}^{(K)} &= -\frac{P}{R^3} \frac{d^3 U_{3,k}^{(K)}}{d\vartheta^3} \operatorname{ctg} \vartheta; \quad N_{2,k}^{(K)} = \frac{Eh}{R} U_{3,k}^{(K)}; \quad Q_{1,k}^{(K)} = -\frac{D}{R^3} \frac{d^3 U_{3,k}^{(K)}}{d\vartheta^3}; \\ S_k^{(K)} &= -\frac{D}{R^3} \frac{k}{\sin \vartheta} \frac{d^3 U_{3,k}^{(K)}}{d\vartheta^3}; \\ M_{1,k}^{(K)} &= -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 U_{3,k}^{(K)}}{d\vartheta^2}; \quad M_{2,k}^{(K)} = \mu M_{1,k}^{(K)} \end{aligned} \quad (10)$$

и разрешающее уравнение $d^4 U_{3,k}^{(K)} / d\vartheta^4 + 4\lambda^4 U_{3,k}^{(K)} = 0$, где $\lambda^4 = EhR^2 / 4D$, решением которого в рассматриваемом случае является

$$U_{3,k}^{(K)} = e^{-\lambda(\vartheta_0 - \vartheta)} \{C_{3,k} \cos [\lambda(\vartheta_0 - \vartheta)] + C_{4,k} \sin [\lambda(\vartheta_0 - \vartheta)]\}, \quad (11)$$

где ϑ_0 — меридиональная координата края оболочки. Учтено, что в [1] рассматривается оболочка с толщиной стенки $2h$.

Угол поворота определим с учетом принятых гипотез из геометрических уравнений (3)

$$\theta_{1,k}^{(K)} = -dU_{3,k}^{(K)} / Rd\vartheta. \quad (12)$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
 N_{i,k} &= N_{i,k}^{(B)} + N_{i,k}^{(K)}, \quad i = 1, 2; \\
 S_k &= S_k^{(B)} + S_k^{(K)}; \quad Q_{1,k} = Q_{1,k}^{(K)}; \\
 M_{i,k} &= M_{i,k}^{(M)} + M_{i,k}^{(K)}, \quad i = 1, 2; \quad H_k = H_k^{(M)}; \\
 U_{i,k} &= U_{i,k}^{(B)} + U_{i,k}^{(M)}, \quad i = 1, 2; \quad U_{3,k} = U_{3,k}^{(B)} + U_{3,k}^{(M)} + U_{3,k}^{(K)}; \\
 \theta_{1,k} &= \theta_{1,k}^{(B)} + \theta_{1,k}^{(M)} + \theta_{1,k}^{(K)},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где слагаемые соответствуют (2), (4)–(6), (8)–(12).

Алгоритм решения краевой задачи следующий:

- 1) в соответствии с (13) вычисляют значения искомых параметров задачи до постоянных интегрирования;
- 2) используют граничные условия и формируют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);
- 3) определяют постоянные интегрирования из СЛАУ;
- 4) вычисляют значения искомых параметров задачи;
- 5) вычисляют k -ю частичную сумму рядов Фурье искомых параметров;
- 6) оценивают погрешность результатов;
- 7) в случае достижения заданного значения погрешности заканчивают вычисления, иначе – повторяют вычисления для определения следующей частичной суммы.

Эталонная модель. В качестве эталонной примем математическую модель Виноградова – Менькова [7], опубликованную в [4].

В данном случае выполняется комплексное преобразование уравнений общей теории оболочек и их упрощение путем отбрасывания малых членов. Под малыми понимаются члены порядка отношения h/R по сравнению с единицей, что позволяет оставаться в пределах погрешности гипотез Кирхгофа.

В результате указанных действий получается упрощенная система уравнений равновесия в комплексной форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \tilde{N}_k}{d\vartheta^2} + \frac{d\tilde{N}_k}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta - \left[\frac{R}{\tilde{\lambda}} + \frac{k^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \tilde{N}_k &= 0; \\
 \frac{d\tilde{N}_{1,k}}{d\vartheta} + 2\tilde{N}_{1,k} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{k}{\sin \vartheta} \tilde{S}_k - \tilde{N}_k \operatorname{ctg} \vartheta &= 0; \\
 \frac{d\tilde{S}_k}{d\vartheta} + 2\tilde{S}_k \operatorname{ctg}(\vartheta) + \frac{k}{\sin \vartheta} \tilde{N}_{1,k} - \frac{k}{\sin \vartheta} \tilde{N}_k &= 0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $\tilde{\lambda} = -ih / \sqrt{12(1 - \mu^2)}$; $\tilde{N}_k = \tilde{N}_{1,k} + \tilde{N}_{2,k}$.

Здесь знак “тильда” обозначает комплексную форму параметров задачи. Полагая $\tilde{f}_{1,k} = \tilde{N}_{1,k} + \tilde{S}_k$, $\tilde{f}_{2,k} = \tilde{N}_{1,k} - \tilde{S}_k$, запишем, согласно [4],

решение системы (14) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_k &= \tilde{C}_{1,k} \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 F[\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; 1 + k; \sin^2 \vartheta / 2]; \\ \tilde{f}_{1,k} &= \tilde{C}_{1,k} \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_{j,l=+k} \sin^{2j} \vartheta / 2; \\ \tilde{f}_{2,k} &= \tilde{C}_{1,k} \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_{j,l=-k} \sin^{2j} \vartheta / 2 + \tilde{C}_{2,k} \frac{\sin^{k-2} \vartheta / 2}{\cos^{k+2} \vartheta / 2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{a} = \left(1 + \sqrt{1 - 4R/\tilde{\lambda}}\right) / 2$; $\tilde{C}_{1,k}$, $\tilde{C}_{2,k}$ — произвольные постоянные интегрирования.

В состав первой из разрешающих функций (15) входит гипергеометрическая функция Гаусса F [8, 9], которая в данном случае определяется через гамма-функцию Γ как сумма степенного ряда:

$$F[\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; 1 + k; \sin^2 \vartheta / 2] = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j \sin^{2j} \vartheta / 2,$$

где

$$\tilde{a}_j = \frac{\sin \pi \tilde{a} \Gamma(\tilde{a} + j) \Gamma(1 - \tilde{a} + j) \Gamma(1 + k)}{\pi \Gamma(1 + k + j) \Gamma(j + 1)}.$$

Учтено, что $\Gamma(\tilde{a}) \Gamma(1 - \tilde{a}) = \frac{\pi}{\sin \pi \tilde{a}}$.

Для определения функциональных коэффициентов степенных рядов, соответствующих $\tilde{f}_{1,k}$ и $\tilde{f}_{2,k}$, в [4] получено рекуррентное соотношение:

$$\tilde{b}_0 = \frac{1 + l}{2 + l + k} \tilde{a}_0; \quad \tilde{b}_j = \frac{(1 + l) \tilde{a}_j - 2[\tilde{a}_{j-1} - (j + 1) \tilde{b}_{j-1}]}{2(j + 1) + l + k}.$$

Можно показать, что учет $\lg(R/h) \sqrt{0,8R/h + 600}$ членов обеспечивает вычисление частичных сумм рядов, определяющих \tilde{N}_k , $\tilde{f}_{1,k}$ и $\tilde{f}_{2,k}$ (см. (15)), с погрешностью не более 10^{-6} . Число членов ряда, дающих приемлемую погрешность вычисления, уменьшается с увеличением номера гармоники k и/или уменьшением меридиональной координаты ϑ , поскольку для $0 < \vartheta \leq 45^\circ$ число учитываемых членов может быть уменьшено до $\lg(R/h) \sqrt{0,2R/h + 100}$ без роста указанного значения погрешности.

Искомые внутренние силовые факторы и деформации срединной поверхности оболочки определяются [4] через разрешающие функции (15) следующим образом:

$$\begin{aligned}
N_{1,k} &= \operatorname{Re}(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k})/2; & N_{2,k} &= \operatorname{Re}(2\tilde{N}_k - \tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k})/2; \\
S_k &= \operatorname{Re}(\tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k})/2; & Q_{1,k} &= \frac{1}{R} \frac{D}{k_*} \operatorname{Im} \frac{d\tilde{N}_k}{d\vartheta}; \\
Q_{2,k} &= -\frac{1}{R} \frac{D}{k_*} \frac{k}{\sin \vartheta} \operatorname{Im} \tilde{N}_k; \\
M_{1,k} &= \frac{D}{k_*} \operatorname{Im} \left[\tilde{N}_k - \frac{1}{2}(1 - \mu)(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}) \right]; \\
M_{2,k} &= \frac{D}{k_*} \operatorname{Im} \left[\mu \tilde{N}_k + \frac{1}{2}(1 - \mu)(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}) \right]; \\
H_k &= -(1 - \mu) \frac{D}{2k_*} \operatorname{Im}(\tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k}); \\
\varepsilon_{1,k} &= -\frac{D}{k_*^2} \operatorname{Re} \left[\mu \tilde{N}_k - \frac{1}{2}(1 + \mu)(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}) \right]; \\
\chi_{1,k} &= \frac{1}{2k_*} \operatorname{Im}(2\tilde{N}_k - \tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k}); \\
\varepsilon_{2,k} &= \frac{D}{k_*^2} \operatorname{Re} \left[\tilde{N}_k - \frac{1}{2}(1 + \mu)(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}) \right]; \\
\chi_{2,k} &= \frac{1}{2k_*} \operatorname{Im}(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}); \\
\omega_k &= (1 + \mu) \frac{D}{k_*^2} \operatorname{Re}(\tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k}); & \tau_k &= -\frac{1}{2k_*} \operatorname{Im}(\tilde{f}_{1,k} - \tilde{f}_{2,k}),
\end{aligned} \tag{16}$$

где $k_* = \sqrt{DEh}$;

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{N}_k}{d\vartheta} &= \tilde{C}_{1,k} \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 \left\{ \frac{k}{\sin \vartheta} F[\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; 1 + k; \sin^2 \vartheta / 2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\tilde{a}(1 - \tilde{a})}{1 + k} \sin \vartheta F[1 + \tilde{a}, 2 - \tilde{a}; 2 + k; \sin^2 \vartheta / 2] \right\}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Значения перемещений определяются [4] формулами:

$$\begin{aligned}
U_{1,k} &= \frac{R \sin^2 \vartheta}{k^2 - 1} \left[\alpha_{1,k} - \frac{1}{k} R \alpha_{2,k} \sin \vartheta \right]; \\
U_{2,k} &= \frac{R \sin^2 \vartheta}{k(k^2 - 1)} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{[k^2 - \cos^2 \vartheta]}{\sin \vartheta} \varepsilon_{2,k} - R \chi_{2,k} \sin \vartheta - \alpha_{1,k} \cos \vartheta \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{3,k} &= \frac{R \sin^2 \vartheta}{k^2 - 1} \left[R\chi_{2,k} - \varepsilon_{2,k} + \frac{1}{k} R\alpha_{2,k} \cos \vartheta \right]; \\
 \theta_{1,k} &= \frac{R \sin^2 \vartheta}{k^2 - 1} \left\{ \left[\frac{1}{R} \varepsilon_{2,k} - \chi_{2,k} \right] \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{1}{R} \alpha_{1,k} - \frac{k}{\sin \vartheta} \alpha_{2,k} \right\},
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $\alpha_{1,k} = -\varepsilon_{1,k} \operatorname{ctg} \vartheta + d\varepsilon_{2,k}/d\vartheta - k\omega_k/\sin \vartheta$; $\alpha_{2,k} = \tau_k - \omega_k/R$.

Для разделения мнимой и действительной частей решения задачи представим постоянные интегрирования в виде $\tilde{C}_{j,k} = \xi_{j,k} + i\zeta_{j,k}$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{1,k} &= \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 F[\tilde{a}, 1 - \tilde{a}; 1 + k; \sin^2 \vartheta / 2]; \\
 \tilde{\Lambda}_{2,k} &= \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_{j,l=+k} \sin^{2j} \vartheta / 2; \\
 \tilde{\Lambda}_{3,k} &= \operatorname{tg}^k \vartheta / 2 \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_{j,l=-k} \sin^{2j} \vartheta / 2.
 \end{aligned}$$

Тогда разрешающие функции из (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_k &= \{C_k\}^T [N_k] \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^T; \\
 \tilde{f}_{m,k} &= \{C_k\}^T [f_{m,k}] \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^T, \quad m = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
 [N_k] &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{1,k}) & -\operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{1,k}) & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{1,k}) & \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{1,k}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\
 [f_{1,k}] &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{2,k}) & -\operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{2,k}) & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{2,k}) & \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{2,k}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\
 [f_{2,k}] &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{3,k}) & -\operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{3,k}) & \frac{\sin^{k-2}(\vartheta/2)}{\cos^{k+2}(\vartheta/2)} & 0 \\ \operatorname{Im}(\tilde{\Lambda}_{3,k}) & \operatorname{Re}(\tilde{\Lambda}_{3,k}) & 0 & \frac{\sin^{k-2}(\vartheta/2)}{\cos^{k+2}(\vartheta/2)} \end{bmatrix}^T; \\
 \{C_k\} &= \begin{Bmatrix} \xi_{1,k} \\ \zeta_{1,k} \\ \xi_{2,k} \\ \zeta_{2,k} \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Выбранная форма записи позволяет выполнить разделение мнимой и действительной частей решения. Например для $N_{1,k}$ из (15):

$$N_{1,k} = 0,5 \operatorname{Re}(\tilde{f}_{1,k} + \tilde{f}_{2,k}) = 0,5 \{C_k\}^T [[f_{1,k}] + [f_{2,k}]] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{20}$$

Алгоритм решения краевой задачи следующий:

1) вычисляют значения разрешающих функций (15) и их производных (17) в виде (19) (производные $\tilde{f}_{1,k}$ и $\tilde{f}_{2,k}$ могут быть получены непосредственно из уравнений (14));

2) аналогично (20) вычисляют значения искомых величин задачи (16), (18) до постоянных интегрирования;

3) в остальном действуют аналогично п. 2–7 алгоритма решения краевой задачи с использованием асимптотической модели.

Вычислительный эксперимент. Построение расчетной схемы задачи предполагает математическую идеализацию моделируемого объекта. Так, поверхностная нагрузка, распределенная по малой площадке, часто заменяется воздействием сосредоточенной силы. Это объясняется простотой построения алгоритма: не нужно решать дифференциальные уравнения с правой частью, которая появляется при поверхностной нагрузке. При этом в точке приложения силы имеется особенность: ряды искомых параметров задачи не сходятся. Распределение сосредоточенной силы по линии позволяет обеспечить сходимость рядов искомых величин.

Рассмотрим задачу деформирования сферической оболочки, модели сферического бака, с параметром R/h под действием самоуравновешенной силы P , распределенной по дуге окружности (рис. 1).

Разложение силы P в ряд Фурье имеет вид

$$q(\varphi) = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} q_k \cos k\varphi,$$

где $q_0 = \frac{P}{\pi R}$ и $q_k = 2 \frac{P}{\pi R} \frac{\sin k\gamma}{k\gamma}$.

В данном случае край оболочки отсутствует. Однако оболочка может быть мысленно разделена на два участка параллельно $\vartheta = 90^\circ$, соответствующей линии приложения внешней нагрузки.

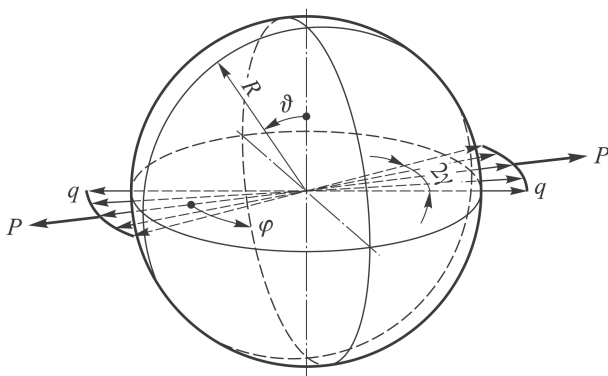


Рис. 1. Модель сферического бака (самоуравновешенная сила P распределена по дуге окружности)

Граничные условия при $\vartheta = 90^\circ$: $U_{1,k} = 0$; $S_k^* = 0$; $\theta_{1,k} = 0$; $Q_{1,k}^* = q_k/2$, где $S_k^* = S_k + 2H_k/R$; $Q_{1,k}^* = Q_{1,k} + H_k k/R \sin \vartheta$.

Очевидно, что при больших значениях угла γ (в частности при осесимметричной нагрузке) изменяемость моделируемого напряженного состояния оболочки по координате ϑ превышает изменяемость по координате φ , что соответствует основной гипотезе математической модели простого краевого эффекта. При увеличении локализации внешней нагрузки, ввиду роста изменяемости напряженного состояния вдоль линии ее приложения, следует ожидать увеличения погрешности используемой модели краевого эффекта и, как следствие, асимптотической модели. Это позволяет оценить максимальные значения погрешности асимптотической модели при краевой нагрузке.

Эквивалентные математические модели должны одинаково описывать механику деформирования оболочки при одной и той же нагрузке. Таким образом, вычисляемые согласно этим моделям значения параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние оболочки, должны совпадать. Однако при наличии погрешности эти значения будут различаться.

Выполним серию расчетов для различных значений угла γ и отношения R/h . Значения параметров напряженно-деформированного состояния будем определять с точностью до третьей значащей цифры суммированием старших ($k > 0$) гармоник рядов Фурье искомым параметром.

Расчеты при $R/h = 100$ и $\gamma = 45^\circ$ показывают практически полное совпадение значений внутренних силовых факторов. Значение несоответствий $\delta f = |1 - f/f^*| \cdot 100\%$ составляет не более 3%; f , f^* — значения внутренних силовых факторов, вычисленные с использованием асимптотической (АП) и эталонной (ЭР) моделей. Здесь и далее символом * обозначаем эталонные значения.

С ростом локализации нагрузки наблюдается рост δf . На рис. 2 приведены распределения внутренних силовых факторов вдоль нулевого меридиана ($\varphi = 0$) при $R/h = 100$ и $\gamma = 10^\circ$. Видны нарушения распределений и несоответствия максимальных значений силовых факторов: $\delta M_1 = 21\%$, $\delta M_2 = 12\%$, $\delta N_1 = 33\%$, $\delta N_2 = 25\%$.

С ростом толщины оболочки также наблюдается рост несоответствий. На рис. 3 приведены распределения внутренних силовых факторов вдоль нулевого меридиана при $R/h = 10$ и $\gamma = 45^\circ$. Несответствия максимальных значений силовых факторов: $\delta M_1 = 18\%$, $\delta M_2 = 36\%$, $\delta N_1 = 6\%$, $\delta N_2 = 12\%$.

Для более тонких оболочек напротив происходит уменьшение несоответствий. Распределения внутренних силовых факторов вдоль нулевого меридиана при $R/h = 400$ и $\gamma = 10^\circ$ представлены на рис. 4. Несответствия максимальных значений силовых факторов в этом случае: $\delta M_1 = 1\%$, $\delta M_2 = 7\%$, $\delta N_1 = 10\%$, $\delta N_2 = 4\%$.

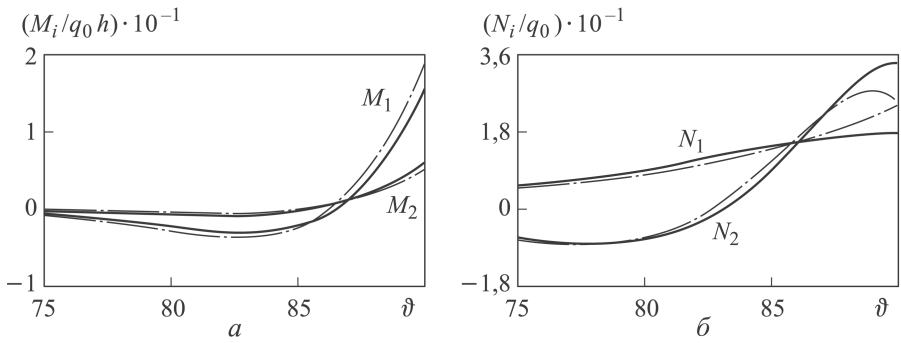


Рис. 2. Распределения внутренних силовых факторов (меридиональной силы (a) и изгибающего момента (b)) вдоль нулевого меридиана ($\varphi = 0$) при $R/h = 100$ и $\gamma = 10^\circ$:

$\delta M_1 = 21\%$, $\delta M_2 = 12\%$, $\delta N_1 = 33\%$, $\delta N_2 = 25\%$; ---- — асимптотическая (АР) и — эталонная (ЭР) модели

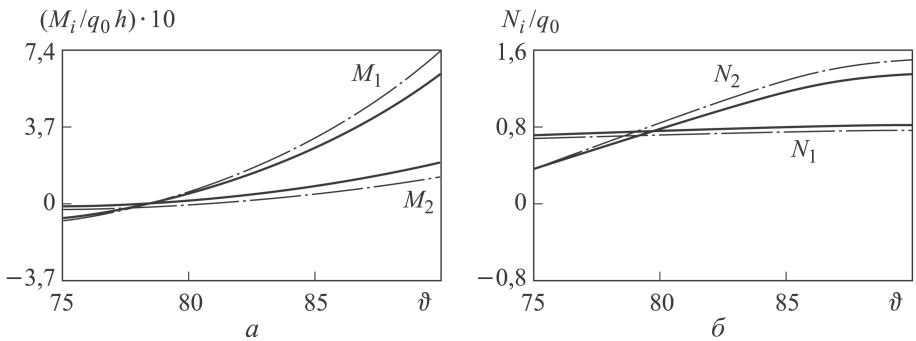


Рис. 3. Распределения внутренних силовых факторов (a , b — обозначения см. рис. 2) вдоль нулевого меридиана при $R/h = 10$ и $\gamma = 45^\circ$:

$\delta M_1 = 18\%$, $\delta M_2 = 36\%$, $\delta N_1 = 6\%$, $\delta N_2 = 12\%$

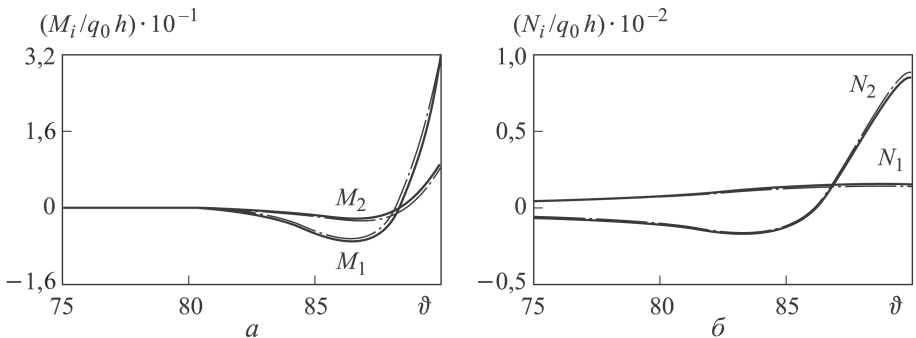


Рис. 4. Распределения внутренних силовых факторов (a , b — обозначения см. рис. 2) вдоль нулевого меридиана при $R/h = 400$ и $\gamma = 10^\circ$:

$\delta M_1 = 1\%$, $\delta M_2 = 7\%$, $\delta N_1 = 10\%$, $\delta N_2 = 4\%$

Поскольку эталонная математическая модель имеет погрешность допущений Кирхгофа, представленные значения несоответствий отражают значения погрешности асимптотической модели.

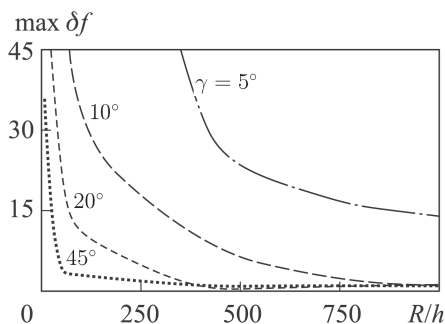


Рис. 5. Максимальные значения несоответствий внутренних силовых факторов

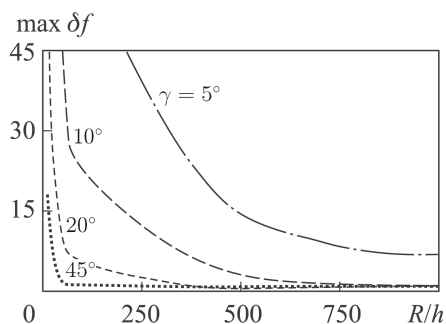


Рис. 6. Оценка погрешности асимптотической модели по средним значениям δf

На рис. 5 изображены максимальные значения несоответствий внутренних силовых факторов. Видно, что с уменьшением толщины оболочки и/или с уменьшением локализации нагрузки погрешность асимптотической модели снижается.

Погрешность значений напряжений является производной величиной. Так, для меридиональных σ_m и окружных σ_t напряжений справедлива оценка

$$\delta\sigma_{m(t)} = \frac{\delta N_{1(2)} N_{1(2)}^* / h \pm 6\delta M_{1(2)} M_{1(2)}^* / h^2}{N_{1(2)}^* / h \pm 6M_{1(2)}^* / h^2}.$$

Видно, что погрешности значений внутренних силовых факторов могут складываться и вычитаться, компенсируя друг друга.

В расчетной практике используются максимальные значения напряжений. Серия расчетов, выполненных для максимальных напряжений в зависимости от толщины оболочки и степени локализации нагрузки, показывает, что представленные на рис. 5 значения погрешности излишне консервативны. Более реалистичной является оценка погрешности асимптотической модели по средним значениям δf (рис. 6).

Заключение. Выполнено параметрическое исследование соответствия асимптотической модели механики деформирования сферической оболочки как модели сферического бака реальному явлению.

Впервые даны количественные оценки погрешности, привносимой принятыми упрощениями асимптотической модели.

Полученные оценки погрешности устанавливают пределы использования асимптотической модели механики деформирования сферической оболочки и могут быть определяющими при выборе математической модели для расчета на прочность сферического бака.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-08-99591).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
3. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2010. 378 с.
4. Виноградов Ю.И., Меньков Г.Б. Метод функционального нормирования для краевых задач теории оболочек. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 160 с.
5. Григоренко Я.М., Ильин Л.А., Коваленко А.Д. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев: АН УССР, 1963. 287 с.
6. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. ЛО, 1975. 256 с.
7. Меньков Г.Б. Решение задач механики деформирования оболочек методом функционального нормирования. Дис. . . канд. физ.-мат. наук. Казань, 1999. 197 с.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
9. Aomoto K., Kita M. Theory of Hypergeometric Functions / Transl. by K. Iohara. Springer, 2011. 317 p.

REFERENCES

- [1] Gol'denveyzer A.L. Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [The Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 512 p.
- [2] Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhaylovskiy E.I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek [The Linear Theory of Thin Shells]. Leningrad, Politehnika Publ., 1991. 656 p.
- [3] Novozhilov V.V. Teoriya tonkikh obolochek [The Theory of Thin Shells]. St. Petersburg Gos. Univ. Publ., 2010. 378 p.
- [4] Vinogradov Yu.I., Men'kov G.B. Metod funktsional'nogo normirovaniya dlya kraevykh zadach teorii obolochek [The Method of Functional Normalization for Boundary Value Problems of the Theory of Shells]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001. 160 p.
- [5] Grigorenko Ya.M., Il'in L.A., Kovalenko A.D. Teoriya tonkikh konicheskikh obolochek i ee prilozhenie v mashinostroenii [Theory of Thin Conical Shells and Its Application in Mechanical Engineering]. Kiev, AN USSR Publ., 1963. 287 p.
- [6] Filin A.P. Elementy teorii obolochek [Elements of the Theory of Shells]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1975. 256 p.
- [7] Men'kov G.B. Reshenie zadach mekhaniki deformirovaniya obolochek metodom funktsional'nogo normirovaniya [Solving the Problems of Shell Deformation Mechanics by Functional Normalization Method]. Dis. kand. fiz.-mat. Nauk [Cand. phys.-math. sci. diss.]. Kazan', 1999. 197 p.
- [8] Lyuk Yu. Russ. ed.: Spetsial'nye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii [Special Mathematical Functions and Their Approximations]. Moscow, Mir Publ., 1980. 608 p.
- [9] Aomoto K., Kita M. Theory of Hypergeometric Functions. Transl. by Iohara K. Springer, 2011. 317 p.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Виноградов Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Vinogradov Yu.I. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of the “Aerospace Systems” Department of Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Георгиевский Владимир Павлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ОАО “Корпорация “МИТ”.

ОАО “Корпорация МИТ”, Российская Федерация, 127273, Москва, Березовая аллея, д. 10.

Georgievskiy V.P. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, senior staff scientist of JSC “Corporation “Moscow Institute for Thermal Technology”.

JSC “Corporation “Moscow Institute for Thermal Technology”, Berezovaya alleya 10, Moscow, 127273 Russian Federation.

Константинов Максим Валерьевич — аспирант кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Konstantinov M.V. — postgraduate of the “Aerospace Systems” Department of Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Виноградов Ю.И., Георгиевский В.П., Константинов М.В. Асимптотика Гольденвейзера при расчете на прочность сферического бака // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 3. С. 119–133.

Please cite this article in English as:

Vinogradov Yu.I., Georgievskiy V.P., Konstantinov M.V. Goldenweiser Asymptotic Form for Strength Analysis of the Spherical Tank. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2015, no. 3, pp. 119–133.