

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.37

УПРУГИЕ И ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ТОНКИХ ПОЛОСАХ ПРИ СЖАТИИ МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ЖЕСТКИМИ ШТАМПАМИ

Е.М. Третьяков

ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Российская Федерация
e-mail: tretyakov_m58@mail.ru

Приведены результаты исследования проблемы теории пластичности, посвященной деформациям тонких полос. Получено решение двумерной упругопластической задачи о сжатии в условиях плоской деформации тонкой полосы между плоскими жесткими плитами. Определена нагрузка, при которой в упругой тонкой полосе возникают пластические деформации, определены размеры и форма пластических областей и их зависимости от приложенной внешней нагрузки. Доказано, что при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ линиями раздела упругих и пластических областей оказываются прямые, параллельные плоскостям штампов. Когда полоса становится полностью пластичной, то из полученного упругопластического решения следуют, как частный случай, формулы классического решения Прандтля для сжатия тонкой полностью пластичной полосы.

Ключевые слова: твердое тело, упругие деформации, пластические деформации, тонкая полоса, плоская деформация.

ELASTIC AND PLASTIC THIN STRIP DEFORMATIONS UNDER THEIR COMPRESSION BETWEEN PLANE RIGID STAMPS

E.M. Tretyakov

Blagonravov Institute for Machine Science, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
e-mail: tretyakov_m58@mail.ru

The paper discusses the results of the research into the plasticity theory of thin strip deformations. It presents a solution to the two-dimensional elasto-plastic problem of compressing a thin strip between the plane rigid stamps. The load is estimated which causes plastic deformations within a rigid thin strip. The forms of plastic areas and their dimensions were delineated. Their dependence on an external load is determined. If the Poisson's ratio is $\nu = 0.5$, the lines parallel to the stamp plains prove to be the boundary lines between the elastic and plastic areas. When a thin plane becomes completely plastic, the formulae of the classical Prandtl's equation for compression of a thin fully plastic strip are derived as a particular solution to the two-dimensional elasto-plastic problem.

Keywords: solid, elastic deformations, plastic deformations, thin strip, planar deformation.

Многие процессы обработки металлов связаны с деформациями тонких полос и заготовок. В частности, можно указать на такие важные процессы обработки металлов давлением, как тонколистовая прокатка, калибровка, чеканка. Для исследования и анализа таких процессов

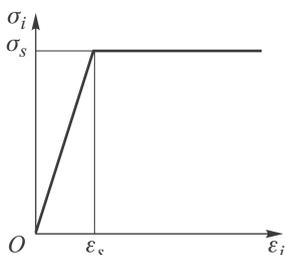


Рис. 1. Диаграмма зависимости интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ϵ_i для упруго идеально пластического тела

обработки металлов давлением используются методы теорий упругости и пластичности [1–3]. Теоретический фундамент для исследования таких процессов был заложен классическими работами Л. Прандтля, А. Надаи и А.И. Целикова о пластическом сжатии и прокатке тонких идеально пластичных полос [3].

В процессах с малыми значениями упругих деформаций часто возникает необходимость учета их влияния на характеристики процесса. Это случается при дрессировке листовой стали (прокатке листов с малыми обжатиями). Процесс дрессировки листовой стали определяет ее окончательные механические свойства и, самое главное, ее штампуемость. Для теоретического исследования процесса дрессировки приходится переходить к более сложной модели упруго идеально пластичного материала (рис. 1).

Для исследования процесса дрессировки и его влияния на штампуемость листовой стали существенное значение имеют результаты решения задачи об упругопластическом сжатии тонкой полосы между жесткими параллельными плитами в условиях плоской деформации. Решение этой задачи и получено в настоящей работе.

Если пренебречь упругим изменением объема деформируемой полосы, т.е. принять условие постоянства объема как для пластических, так и упругих областей, то для этого случая удалось получить решение указанной двумерной упругопластической задачи. Это решение удовлетворяет граничным условиям, условию непрерывности напряжений в деформируемой тонкой полосе и на линиях раздела упругих и пластических областей. При значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ (отсутствие упругого изменения объема) линии раздела упругих и пластических областей оказываются прямыми, параллельными плоскости деформирующих штампов. Полученное решение, как будет показано далее, удовлетворяет всем уравнениям плоской задачи теории упругости в упругой области и указанным условиям непрерывности напряжений на линиях раздела упругой и пластических областей.

Тонкая упругая полоса. Как известно, плоскодеформированное состояние в математической теории упругости описывается системой из восьми уравнений с восемью неизвестными [1]:

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0; \quad (1)$$

$$\partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x = 0 \quad (2)$$

— двумя уравнениями равновесия;

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x; \quad (3)$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y; \quad (4)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (5)$$

— тремя уравнениями деформаций, и для упругого тела — тремя уравнениями, связывающими напряжения и деформации (закон Гука), которые записываются как [1]

$$\partial u / \partial x = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right); \quad (6)$$

$$\partial v / \partial y = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right); \quad (7)$$

$$\partial u / \partial y + \partial v / \partial x = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (8)$$

В уравнениях (1)–(8): σ_x, σ_y — нормальные напряжения; τ_{xy} — касательное напряжение; u и v — перемещения по осям x и y ; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.

Диаграмма зависимости интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i для упругого идеально пластичного материала показана на рис. 1; σ_s — предел текучести материала.

Из исходной системы уравнений (1)–(8) получаем систему из четырех уравнений (1), (2), (9) и (10) с четырьмя неизвестными $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x \right); \quad (9)$$

$$\frac{2(1 + \nu)}{E} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Рассмотрим решение указанных уравнений для полубесконечной тонкой упругой полосы толщиной h , показанной на рис. 2.

Граничные условия задачи для тонкой полосы. При расположении системы координат, как на рис. 2, ось абсцисс OX совпадает с осью симметрии тонкой полосы $Y = 0$. На оси симметрии полосы, очевидно, что $\tau_{xy} = 0$ и $v = 0$.

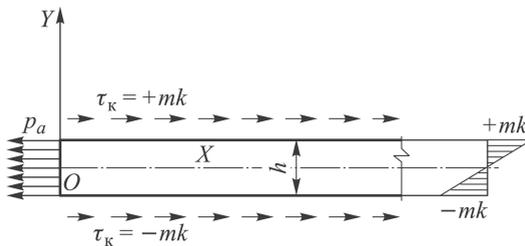


Рис. 2. Тонкая упругая полоса толщиной h

Деформирующий штамп рассматривается как жесткий, т.е. вертикальные перемещения на контактной поверхности штампа $v = \text{const}$. При бесконечной протяженности полосы по оси x и $v = v(y)$ граничные условия для τ_{xy} , удовлетворяющие этим условиям, получаем из общего решения системы уравнений (1), (2), (9) и (10)

$$\tau_{xy} = 6AE \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1} \right) xy + sy; \quad (11)$$

$$v = Ay^3 + Cy; \quad (12)$$

$$\sigma_y = 3AE \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) y^2 + 3AE \frac{\nu}{1 + \nu} x^2 + \left(\frac{\nu}{\nu - 1} \right) sx + N; \quad (13)$$

$$\sigma_x = 3AE \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right) x^2 - sx + \frac{1 - \nu}{\nu} N - \frac{CE}{\nu(1 + \nu)} - 3AE \frac{2 - \nu}{1 + \nu} y^2. \quad (14)$$

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, а параметры A , N , C и s являются произвольными постоянными интегрирования.

При $v = v(y)$ граничное условие жесткости деформирующих плит выполняется автоматически, так как при $y = \pm h/2$ (на контактных поверхностях) $v = \text{const}$. Значение обжатия тонкой полосы Δh (положительная) равно удвоенному значению модуля контактного перемещения v_k одной из деформирующих плит.

Из формулы (11) следует, что в рассматриваемом случае сжатия тонкой упругой полосы для касательного напряжения на поверхности контакта τ_k могут реализовываться только два следующих случая: 1) контактные касательные напряжения постоянны на рассматриваемой полосе, 2) контактные касательные напряжения на рассматриваемом участке полосы линейно изменяются с изменением абсциссы x .

Во втором случае для любого конечного значения τ_k существует такое значение x , для которого дальнейшее увеличение τ_k связано с превышением расчетного значения τ физически возможного максимального значения $\tau_{\max} = k$.

Рассматриваем дальше только случай постоянства контактных касательных напряжений $\tau_k = mk = \text{const}$ на рассматриваемой полосе. В этом случае из формул (11)–(14) получаем, что $A = 0$ и формулы (11)–(14) для упругого тела принимают вид системы уравнений

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= sy; \quad v = Cy; \quad \sigma_y = \left(\frac{\nu}{\nu - 1} \right) sx + N; \\ \sigma_x &= \left(\frac{1 - \nu}{\nu} \right) N - sx - \frac{EC}{\nu(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Искомое решение находим, определив с помощью граничных условий задачи значения постоянных интегрирования s , C и N в формулах (15).

Для жестких плит значение вертикальных контактных перемещений v (при $y = \pm h/2$) рассматривается как постоянная: $v = \text{const} = \mp \Delta h/2$, где Δh — обжатие полосы (величина положительная). Из второго соотношения формул (15) в рассматриваемой упругой задаче находим значение безразмерной постоянной $C = \frac{2v}{h} = -\frac{\Delta h}{h}$, совпадающее со значением относительного обжатия рассматриваемой тонкой полосы.

Касательные напряжения в твердом теле ограничены значением пластической постоянной материала деформируемой полосы k : $0 \leq |\tau_{xy}| \leq k$. По условию пластичности Треска – Сен-Венана $k = \sigma_s/2$, а по условию пластичности Мизеса $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$. Из первой формулы (15) находим постоянную s , определяемую контактными силами трения $\tau_k = mk = \mu \cdot 2k$; $s = \frac{2mk}{h} = \frac{4\mu k}{h}$ [2–4]. Здесь $m = 2\mu$ — параметры, определяемые τ_k . Вследствие ограничений на параметр τ_k эти параметры изменяются в следующих пределах: $0 \leq m \leq 1$; $0 \leq \mu \leq 0,5$. Параметр μ называется коэффициентом пластического трения [5].

Принимаем, что на краю упругой полосы при $x = 0$ $\sigma_x = p_a = \text{const}$. С использованием указанного граничного условия получаем следующее значение постоянной интегрирования $N = \frac{\nu}{1-\nu} p_a + \frac{EC}{1-\nu^2}$.

Подставив значения постоянных интегрирования s , C и N в систему уравнений (15), получаем искомое решение для сжатой тонкой упругой полосы:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2mk}{h} y; \quad v = \frac{2v_k}{h} y = -\frac{\Delta h}{h} y; \\ \sigma_y &= -\frac{2\nu mk}{(1-\nu)h} x + \frac{\nu}{1-\nu} p_a - \frac{E\Delta h}{h(1-\nu^2)}; \end{aligned} \quad (16)$$

$\sigma_x = -\frac{2mk}{h} x + p_a$ при $x = 0$, $\sigma_x = +p_a$ — напряжение натяжения на краю упругой тонкой полосы (см. рис. 2).

Пластические деформации в тонкой упругой полосе. Приведенные формулы получены для тонкой полностью упругой полосы. При увеличении внешних нагрузок в деформируемой полосе появляются точки и области пластических деформаций. В таких областях выполняется условие пластичности, которое при плоской деформации идеально пластического тела записывается в виде [3, 4]

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (17)$$

В условие пластичности (17) подставляем напряжения из системы (15) и получаем уравнение возможной границы раздела упругой и пластических областей. В уравнении линии раздела постоянная C оказывается параметром, определяющим конкретную линию раздела сред. Разрешив полученное уравнение относительно постоянной C , получим

$$C = \frac{(1 + \nu)}{E} (1 - 2\nu) p_a - \frac{(1 + \nu)}{E} (1 - 2\nu) s x - \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \sqrt{k^2 - s^2 y^2}. \quad (18)$$

Случай, когда пластическая область возникает непосредственно под штампом, получаем, подставив в формулу (18) значение $y = \pm h/2$. Для него находим

$$C = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} p_a - (1 - 2\nu) \frac{(1 + \nu)}{E} s x - \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sqrt{4k^2 - s^2 h^2}. \quad (19)$$

Из формулы (18) следует, что значение C по модулю возрастает по мере удаления от края заготовки (при возрастании x). Для этого вывода достаточно сравнить значения C из этой формулы для двух точек с разными абсциссами x при совпадающих значениях ординат y . Из этой формулы следует, что большему значению x при совпадении значений остальных параметров соответствует большее значение параметра C , т.е. большее обжатие Δh , вызывающее появление пластических деформаций в рассматриваемой точке полосы.

Приходим к важному выводу о том, что даже при жестких параллельных плитах пластическое течение наступает раньше для точек, расположенных ближе к краю полосы. Это согласуется с экспериментальными данными, что при сжатии полос пластические деформации начинаются с края ($x = 0$) тонкой полосы. Изложенное объясняет также, почему наличие абсциссы x в членах правых частей формул (18) и (19) искривляет форму линии раздела упругой и пластических областей. Это является следствием разностей значений относительного изменения объема в точках с разными значениями абсцисс x .

Упругопластическое сжатие тонкой полосы. В формулах (18) и (19) во всех членах с абсциссой x присутствуют множители $(1 - 2\nu)$. Приняв допущение о несжимаемости материала ($\nu = 0,5$), т.е. пренебрегая, вследствие его малости, упругим изменением объема деформируемой полосы, из (19) получаем значение $C = C - n$, которое не зависит от x :

$$C_n = -\frac{0,75}{E} \sqrt{4k^2 - s^2 h^2} \quad (20)$$

и которое можно записать в виде

$$C_n = -\frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2}. \quad (21)$$

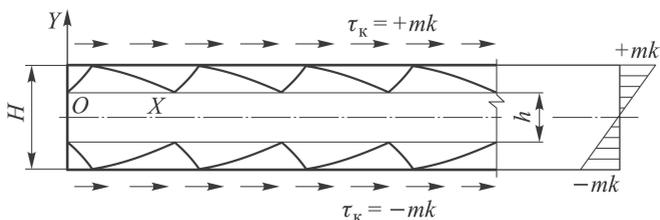


Рис. 3. Тонкая упругопластическая полоса толщиной H с центральным упругим слоем толщиной h

Из изложенного следует, что при значении $C = C_n = \frac{2v_k}{h} = -\frac{\Delta h}{h}$ начинается пластическое течение на поверхности упругой полосы толщиной h , которое возникает одновременно во всех точках контакта и распространяется параллельно контактной поверхности штампа к оси полосы.

Перемещение одного штампа, при котором возникает пластическая деформация на поверхности упругой полосы толщиной h , будет $|v_n| = |C_n h/2|$. Полное изменение толщины полосы (обжатие) равно $2v_n$.

Обозначим полную толщину тонкой упругопластической полосы H . При некоторых значениях параметров процесса в области, лежащей на ее оси симметрии, может существовать упругая область толщиной h (рис. 3). Поверхности этой области $y = \pm h/2$ отвечают линиям раздела упругой и пластических областей, на которых параметр $C = C_n$. Для тонкой упругопластической полосы ($-H/2 \leq y \leq H/2$) реализуются следующие граничные условия: $v_k = \mp \Delta H/2$ при $y = \pm H/2$; $\tau_k = \pm mk$ при $y = \pm H/2$; $\sigma_x = p_a$ при $x = 0$ и $|y| \leq h/2$.

Рассмотрим сжатие тонкой упругопластической полосы ($L/H \gg 1$, где L — длина полосы, а H — ее толщина).

При линейном изменении касательных напряжений τ_{xy} по толщине тонкой упругопластической полосы на ее линиях раздела $|y| = h/2$: $\tau_{xy} = \tau_k h/H$. Для упругого центрального слоя в упругопластической полосе $\tau_{xy} = \tau_k h/H = mkh/H = m_h k$.

Напряжения в упругом слое ($|y| \leq h/2$) упругопластической полосы определяются по следующим формулам [6, 7]:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2mk}{H}y; \\ \sigma_x &= -\frac{2mk}{H}x + 2k\sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}}kC_a. \end{aligned} \quad (22)$$

В пластических слоях тонкой идеально упругопластической полосы пять неизвестных функций: σ_x , σ_y , $\tau_{x,y}$, u и v определяются из решения следующих пяти уравнений: двух уравнений равновесия (1) и (2), условия пластичности (17), условия постоянства объема (несжимаемости) (23) и уравнения (24), определяющего соосность девиаторов

напряжений и малых деформаций:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (23)$$

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\partial u/\partial y + \partial v/\partial x}{\partial u/\partial x - \partial v/\partial y}. \quad (24)$$

Напряжения в пластических слоях ($h/2 \leq |y| \leq H/2$) определяются из решения задачи Коши для системы уравнений (1), (2) и (17) с граничными условиями для напряжений, получаемых из упругого решения на линиях раздела упругой и пластических областей $|y| = h/2$:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2mk}{H}y; \\ \sigma_x &= -\frac{2mk}{H}x + 2k\sqrt{1 - 4\frac{m^2y^2}{H^2}} - kC; \\ \sigma_y &= -\frac{2mk}{H}x - kC, \end{aligned} \quad (25)$$

где параметр C определяется по формуле [6, 7]

$$C = \frac{h}{H}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}} + \sqrt{1 - m^2} + \frac{\arcsin m}{m} - \arcsin\left(\frac{mh}{H}\right)\frac{1}{m}. \quad (26)$$

Приведенное решение в упругом слое (при $\nu = 0,5$) удовлетворяет (при $\nu = 0,5$) всем уравнениям плоской задачи теории упругости и всем уравнениям теории пластичности в пластических слоях ($0 \leq |y| \leq H$). Напомним, что это решение справедливо только для тонких полос, т.е. при $L/H \gg 1$.

Перемещения материальных элементов в деформируемой тонкой упругопластической полосе. Интегрируя соотношения (6)–(8), (23), (24) для значения $\nu = 0,5$, получаем перемещения u и v на упругом участке полосы ($0 \leq |y| \leq h$) и на пластических участках ($h \leq |y| \leq H/2$) тонкой упругопластической полосы:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1,5k}{E}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}}x + \frac{3mk}{EH}y^2 + C_1; \\ v &= -\frac{1,5k}{E}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}}y \end{aligned} \quad (27)$$

– на упругом участке;

$$\begin{aligned} u &= \frac{1,5k}{E}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}}x - \frac{1,5kH}{mE}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}}\sqrt{1 - \frac{4m^2y^2}{H^2}} + C_2; \\ v &= \frac{1,5k}{E}\sqrt{1 - m^2\frac{h^2}{H^2}}y \end{aligned} \quad (28)$$

– в пластических участках.

Значение постоянной C_1 в формулах (27) находится из условия, что для полосы конечных размеров точка, лежащая на пересечении осей симметрии заготовки ($x = L/2$; $y = 0$) остается неподвижной в процессе деформаций:

$$C_1 = -\frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}} \frac{L}{2}. \quad (29)$$

Значение постоянной C_2 находится из условия, что горизонтальное перемещение u непрерывно на линиях раздела $|y| = h/2$ упругой и пластических областей:

$$C_2 = \frac{3mk}{4EH} h^2 - \frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}} \frac{L}{2} + \frac{1,5kH}{mE} \left(1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}\right). \quad (30)$$

Деформации в тонкой упругопластической полосе. По известному полю перемещений, определяемому формулами (27) и (28), значения деформаций ε_x , ε_y и γ_{xy} вычисляются по формулам (3)–(5).

В упругой области ($-h/2 \leq y \leq h/2$) –

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}}; \quad \gamma_{xy} = \frac{6mk}{EH} y. \quad (31)$$

В пластических областях ($h/2 \leq |y| \leq H/2$) –

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}}; \quad (32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{6mk}{EH} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}} \left(1 - \frac{4m^2}{H^2} y^2\right)^{-0,5} y.$$

Деформированное состояние в упругопластической полосе определяется линейными деформациями $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$ и деформациями сдвига γ_{xy} .

Первое деформированное состояние является результатом пластического сжатия тонкой полосы между гладкими штампами ($m = 0$), второе – между шероховатыми штампами ($m > 0$). В первом случае пластические деформации возникают при $h = H$, что согласно формулам (31) и (32) отвечает деформациям $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \frac{1,5k}{E}$. Это же значение деформаций получаем из тех же формул при $h = 0$ или $m = 0$. Это означает, что при отсутствии контактного трения начало пластических деформаций при нагружении тонкой полосы совпадает с моментом, когда она становится полностью пластичной. В этом случае в деформируемой тонкой полосе отсутствует этап одновременного наличия в ней упругого и пластических участков.

На оси симметрии тонкой полосы, т.е. при $y = 0$, согласно формулам (31) и (32) деформации сдвига $\gamma_{xy} = 0$. Поэтому материальные

элементы, лежащие на оси симметрии тонкой полосы, в рассматриваемом случае переходят в пластическое состояние всегда при одном и том же значении нормальных деформаций $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1,5k/E$, не зависящих от контактного трения на штампах.

На линиях раздела сред: $y = \pm h/2$, параметр $C = |C_n| = (\Delta h/h) = (\Delta H/H)$.

С учетом этих соотношений формула (20) принимает вид

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{1,5k}{E} \sqrt{1 - m^2 \frac{h^2}{H^2}}. \quad (33)$$

Поскольку формула (20) выведена для точек, лежащих на линии раздела упругой и пластических областей, то безразмерный параметр h/H в формуле (33) отвечает относительному положению линии раздела, соответственно, толщину центрального упругого слоя в деформируемой упругопластической тонкой полосе. Ордината $y = h$ определяет толщину центрального тонкой полосе.

Из формулы (33) следует, что для существования упругих областей в рассматриваемом случае деформируемой тонкой полосы необходимо, чтобы ее обжатие $\Delta H/H < 1,5k/E$.

Формула (33) определяет относительное обжатие $\Delta H/H$ в тонкой упругопластической полосе, при котором в ней остается центральный упругий слой толщиной h . Из этой формулы следует, что для образования слоя толщиной h необходимо, чтобы $0 \leq \Delta H/H < 1,5k/E$. В первом случае при $\Delta H/H = 0$ имеем исходную недеформированную полосу, для которой $h = H$; во втором случае: имеем пластически деформированную полосу, для которой $h = 0$.

Для тех случаев, когда в деформируемой тонкой полосе реализуется упругий слой толщиной h , из формулы (33) находим безразмерный параметр h/H , определяющий положение и размеры упругой области в деформируемой полосе.

Тонкая полностью пластичная полоса (решение Прандтля).

Покажем теперь, что классическое решение о пластическом сжатии тонких идеально пластических полос, полученное Л.Прандтлем в 1923 г., следует как частный случай из упругопластического решения, приведенного ранее. Формулы решения Прандтля следуют из формул этого упругопластического решения при $E \rightarrow \infty$, $\nu = 0,5$ и $h = 0$. Нужно учесть также, что толщину полностью пластической полосы в решении Прандтля обозначаем H , вместо толщины упругого слоя h в формулах (25) и (26). С учетом этих изменений формулы (25)

принимают вид:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{2mk}{H}y; \\ \sigma_x &= -\frac{2mk}{H}x + 2k\sqrt{1 - \frac{4m^2}{H^2}y^2} - kC_a; \\ \sigma_y &= -\frac{2mk}{H}x - kC_a,\end{aligned}\quad (34)$$

где C_a — произвольная постоянная C в решении Прандтля.

Формулы (34) представляют решение Прандтля для полностью пластичной полосы толщиной H . В частности, положив в формуле (26) для параметра C упругопластического решения $h = 0$, получаем полосу со значением $C = C_a$, как для полностью пластичной полосы:

$$C_a = \sqrt{1 - m^2} + \frac{\arcsin m}{m}. \quad (35)$$

Решение Прандтля, как видно, является частным следствием полученного ранее упругопластического решения.

Поскольку параметр трения m изменяется в диапазоне $1 \geq m \geq 0$, то параметр C_a согласно (35) изменяется в диапазоне $\pi/2 \leq C_a \leq 2$. Значение параметра C_a определяется из условия, что край полосы (левый на рис. 2 и 3) либо свободен от напряжений, либо на него действует заданное натяжение p_a . В первом случае, т.е. при свободном от напряжений крае полосы $x = 0$, результирующая сила, действующая на любое вертикальное поперечное сечение, должна уравновесиваться сопротивлением сил трения, оказываемым деформирующими плитами:

$$\int_{-H/2}^{H/2} \sigma_x dy = -2mkx. \quad (36)$$

При свободном от напряжений левом крае полосы: $\sigma_x = 0$ при $x = 0$ и из формул (34) получаем, что в этом случае нормальное контактное напряжение на краю тонкой полосы:

$$|\sigma_y| = |\sigma_n| = kC_a.$$

Значение параметра C_a с точностью до 4 % аппроксимируется формулой

$$C_a \approx 2,06 - 0,43m. \quad (37)$$

Как известно, линии скольжения в решении Прандтля являются циклоидами. Показано, что радиус производящего круга циклоиды определяется по формуле [2–4]

$$R = \frac{H}{2m}. \quad (38)$$

Из решения Прандтля можно получить следующее выражение для определения силы деформации P , приходящейся на единицу ширины деформируемой полосы.

Обозначив $p_c = P/L$ — среднее контактное давление, L — длина контактной области, получим

$$p_c = \frac{mk}{2} \frac{L}{H} + kC_a. \quad (39)$$

Решение Прандтля справедливо только при достаточном удалении от края и середины полосы. Это является следствием того, что граничные условия на краю полосы выполняются лишь в смысле принципа Сен-Венана и это решение не применимо для центральной части заготовки, где происходит разветвление течения. Х. Гейрингер приняла, что жесткий клин в центральной части деформируемой полосы, как и в решении Прандтля, ограничен циклоидами. Это предположение позволило ей рассчитать распределение скоростей в области центра заготовки [3].

Работы многих исследователей позволили установить степень точности решения Прандтля при применении его к полосе конечных размеров. Показано, что решение Прандтля, в указанном случае, носит аппроксимационный характер (рис. 4). В книге Р. Хилла [3] (при $m = 1$) показаны графики распределения нормального контактного давления при пластическом сжатии тонкой полосы: *а*) согласно точному решению и *б*) решению Прандтля. Из этого рисунка следует, насколько решение Прандтля представляет собой хорошее приближение к точному решению.

Действительно, точное распределение контактного давления колеблется около линейного распределения (39) Прандтля с постоянно уменьшающейся амплитудой с ростом L . В задаче о сжатии полосы ко-

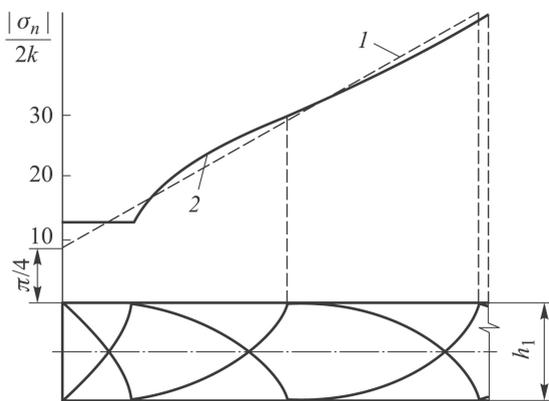


Рис. 4. Распределение нормального контактного давления при сжатии тонкой пластической полосы в аппроксимационном решении Прандтля (1) и получаемое при построении поля линий скольжений (2) [3]

нечных размеров, по мере удаления от края полосы линии скольжения приближаются к циклоидам [3].

В пределе циклоидальное решение Прандтля достигается квазикольебательным путем, характерным для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Этот результат может рассматриваться в качестве аналогии для пластической задачи известного в теории упругости принципа Сен-Венана [3]. Согласно формулам (34) решения Прандтля, на краю полосы, т.е. при $x = 0$, $\sigma_y = -kC_a$.

Сравнение среднего контактного давления, полученного по формуле Прандтля (39) для $m = 1$, с численными результатами Хилла, Ли и Таппера, полученными для полностью пластичной полосы конечных размеров, показывает, что при $L/H = 3,64$ решение Прандтля завышает результат по сравнению с точным на 2,4%, а при $L/H = 5$ — всего на 1,2%. Даже в совсем принципиально неподходящем случае при $L/H = 1$ и $m = 1$ формулы Прандтля (39) определяют значение $p_c = 2,07k$ (точное значение $p_c = 2,0$). Даже в этом (недопустимом) случае решение Прандтля завышает значение p_c всего на 3,5%.

Проблема здесь, в первую очередь, связана не с расчетом сил деформирования, а с исследованием фактического напряженно-деформированного состояния заготовки.

Приведенные результаты показывают, что при $L/H > 1$ решение Прандтля с достаточно высокой степенью точности может использоваться для расчета силы деформирования. Причем, как правило, незначительная ошибка в расчетном значении силы делается в сторону ее завышения.

Влияние коэффициента Пуассона ν на предельные деформации в тонкой упругопластической полосе. Как было показано в упругопластическом решении (при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$) тонкая полоса становится полностью пластичной при ее относительном обжатии $\Delta H/H = 1,5k/E$. В этом случае в пластическое состояние в последнюю очередь должны перейти все материальные элементы, лежащие на оси симметрии полосы. В рассматриваемом случае для этих точек $y = 0$, $h = 0$, $\gamma_{xy} = 0$ и отличными от нуля, согласно формулам (31), оказываются только две линейные деформации, равные $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = 1,5k/E$.

Интенсивность деформаций ε_i (при плоской деформации), рассчитывается по формуле [2]

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}. \quad (40)$$

Подставив в формулу (40) указанные значения деформаций, для точек оси симметрии ($y = 0$) получаем: $\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_x = \frac{\sqrt{3}k}{E}$. Напомним,

что пластическая постоянная $k = \sigma_s / \sqrt{3}$. Подставив это выражение в предыдущую формулу для интенсивности напряжений, получим ее значение, $\varepsilon_i = \varepsilon_s = \sigma_s / E$, отвечающее началу пластических деформаций во всей полосе.

В итоге приходим к выводу, что переход всей тонкой деформируемой полосы в пластическое состояние определяется только ее относительным обжатием $\Delta H / H$ и не зависит от коэффициента Пуассона ν и контактных сил трения (так как $\gamma_{xy} = 0$ на оси симметрии тонкой полосы).

Деформации при разгрузке деформированной тонкой упругопластической полосы. Теоретическое определение остаточных деформаций и напряжений, деформаций разгрузки в упругопластических деформированных изделиях и заготовках основано на применении теоремы о разгрузке [4]. Согласно этой теореме для ее применения необходимы два решения одной и той же задачи для одних и тех же граничных условий: решение задачи пластичности и решение задачи упругости. Согласно теореме о разгрузке разность указанных двух решений дает искомое решение поставленной задачи. В результате разности двух указанных решений получаем решение для рассматриваемой деформированной заготовки (с нулевыми граничными условиями) и с сохранившимися в ней после разгрузки остаточными напряжениями и деформациями.

Рассмотрим случай сжатия полностью пластической полосы толщиной H_1 с контактными силами трения $\tau_k = mk$. Согласно формулам (34) решения Прандтля контактные нормальные напряжения в этом случае, т.е. при

$$y = \pm \frac{H}{2}; \quad \sigma_k = \sigma_y = -\frac{2mk}{H_1}x - kC_a.$$

Решение задачи упругости для тонкой полосы таких же размеров ($h = 1$) и контактных сил трения (значение параметра m) определим с помощью формул (16). Подставив в (16) значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$, получим в итоге для упругой полосы

$$\sigma_k = \sigma_y = -\frac{2mk}{H_1}x + p_a - \frac{E}{0,75} \frac{\Delta H_1}{H_1}.$$

Моделируя упругую разгрузку пластически деформированной полосы, из решения Прандтля вычитаем значения напряжений, найденных в решении задачи разгрузки. Получим

$$-kC_a - p_a + \frac{E}{0,75} \frac{\Delta H_1}{H_1} = 0,$$

откуда находим

$$\Delta H_1 = \frac{4}{3E} (C_a k + p_a) H_1. \quad (41)$$

При отсутствии напряжения натяжения на краю полосы $p_a = 0$ и из (41) получаем $\Delta H_1 = \frac{4kH_1}{3E}C_a$. Параметр трения m изменяется в диапазоне $0 \leq m \leq 1$, а параметр C_a в решении Прандтля изменяется согласно (35) соответственно в диапазоне $2 \geq C_a \geq \pi/2$. Отсюда следует, что изменение толщины ΔH_1 пластически деформированной полосы при ее разгрузке существенно зависит от контактных сил трения при ее деформации, т.е. от остаточных сдвиговых деформаций в тонкой полосе.

Согласно формуле (33) тонкая упругая полоса становится полностью пластичной при относительном обжатии $\Delta H/H = 1,5k/E$. Согласно формуле (37) упругая деформация разгрузки пластически деформированной полосы, как и следовало ожидать, несколько меньше (на 11,33 %) $\Delta H_1/H_1 = \frac{4k}{3E}$.

На основе приведенного решения автором была разработана двумерная теория процесса дрессировки листовой стали, определены остаточные напряжения в дрессированной листовой стали, а с помощью сформулированного автором принципа соответствия дано решение ряда задач для пластического сжатия тонких полос с разными граничными условиями [7–9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
2. Третьяков Е.М. Теоретические основы процессов дрессировки листовой стали и калибровки. Дисс. . . д-ра техн. наук. М.: ИМАШ АН СССР, 1971. 402 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
5. Третьяков Е.М. Основные законы контактного сухого трения при упругой и пластической деформации твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин (ПМНМ), РАН. 2006. № 2. С. 47–59.
6. Третьяков Е.М. О калибровке плоских заготовок и деталей // Кузнечно-штамповочное производство. 1962. № 4. С. 6–9.
7. Третьяков А.В., Третьяков Е.М., Мигачева Г.Н. Дрессировка и качество тонкого листа. М.: Металлургия, 1977. 232 с.
8. Третьяков Е.М. Остаточные напряжения в холоднодеформированных тонких изделиях и в тонколистовом дрессированном металле // Проблемы машиностроения и надежности машин (ПМНМ), РАН. 2008. № 1. С. 49–61.
9. Третьяков Е.М. Задачи о пластическом сжатии тонких полос с разными граничными условиями с применением принципа соответствия // Производство проката. 2011. № 4. С. 2–13.

REFERENCES

- [1] Lur'e A.I. Teoriya uprugosti [The Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 940 p.

- [2] Tretyakov E.M. Teoreticheskie osnovy protsessov dressirovki listovoy stali i kalibrovki [The Fundamental Theory of Sheet Steel Pinch Rolling and Calibration]. Diss. doct. tekhn. nauk [Dr. techn. sci. diss.]. Moscow, IMASH AN SSSR, 1971. 402 p.
- [3] Khill R. Russ. ed.: Matematicheskaya teoriya plastichnosti [The Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 408 p.
- [4] Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [The Fundamental Theory of Plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 420 p.
- [5] Tretyakov E.M. The Basic Laws of Dry Contact Friction with the Elastic and Plastic Deformation of Solids. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin (PMNM) RAN* [J. of Machinery Manufacture and Reliability], 2006, no. 2, pp. 47–59 (in Russ.).
- [6] Tretyakov E.M. Calibration of Flat Workpieces and Parts. *Kuznechno-shtampovochnoe proizvodstvo* [Forging-stamping production], 1962, no. 4, pp. 6–9 (in Russ.).
- [7] Tretyakov A.V., Tretyakov E.M., Migacheva G.N. Dressirovka i kachestvo tonkogo lista [Pinch Rolling and Quality of Thin Sheets]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1977. 232 p.
- [8] Tretyakov E.M. Residual Stresses in Cold-Worked Metal and in Pinch Rolled Thin Sheet Metal. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin (PMNM), RAN* [J. of Machinery Manufacture and Reliability], 2008, no. 1, pp. 49–61 (in Russ.).
- [9] Tretyakov E.M. The Problems of Thin Strip Plastic Compression with Different Boundary Conditions Using the Correspondence Principle. *Proizvodstvo prokata* [Production Of Rolled Stock], 2011, no. 4, pp. 2–13 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 10.04.2014

Третьяков Евгений Михайлович — д-р техн. наук, старший научный сотрудник Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН. Автор более 80 научных работ в области теории процессов пластического формоизменения и прочности машин. Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН, Российская Федерация, 101990, Москва, пер. Малый Харитоньевский, д. 4.

Tretyakov E.M. — Dr. Sc. (Eng), senior researcher of Blagonravov Institute for Machine Sciences, Russian Academy of Sciences (IMASH). Author of more than of 80 publications in the fields of theory of plastic forming and strength of machines. Blagonravov Institute of Machine Sciences, Russian Academy of Sciences, Maly Kharitonievskiy Per. 4, Moscow, 101990 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Третьяков Е.М. Упругие и пластические деформации в тонких полосах при сжатии их между плоскими жесткими штампами // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 3. С. 103–118.

Please cite this article in English as:

Tretyakov E.M. Elastic and Plastic Thin Strip Deformations under their Compression between Plane Rigid Stamps. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2015, no. 3, pp. 103–118.