

УДК 531.39

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ ЕМКОСТЯХ

З.Х. Нгуен

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: freedom_dh@yahoo.com.vn

Задача о колебаниях жидкости, частично заполняющей сферическую емкость, рассматривалась многими авторами. Однако баки современных космических аппаратов содержат различные внутрибаковые устройства, например, шары-баллоны, содержащие газ наддува, различные демпфирующие и другие устройства, которые влияют на волновое движение жидкости. Рассмотрены различные неклассические задачи о колебаниях жидкости в сферической емкости. При решении задач использован метод конечных элементов, выполнено сравнение результатов с решением задач, получаемых методом Треффта.

Ключевые слова: собственные колебания, сферический бак, внутрибаковые устройства, метод конечных элементов, метод Треффта.

THE LIQUID'S SELF-OSCILLATIONS IN A SPHERICAL VESSEL

D.H. Nguyen

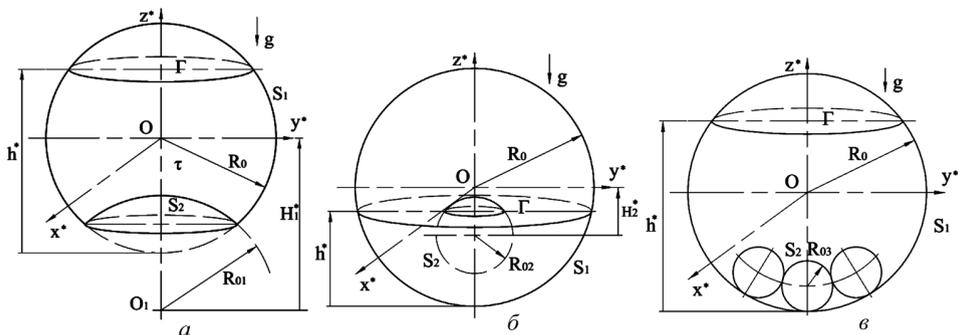
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: freedom_dh@yahoo.com.vn

The self-oscillation problem for liquid in the partly filled spherical vessels has been considered by many researchers. Nowadays, the fuel tanks contain different sections affecting oscillations of the liquid – such as spherical flasks filled with compressed air, anti-vibration and other devices. Some non-classical solutions of the liquid's oscillations in the spherical volume are considered. Finite element method is used to solve the problem, the results are compared with those obtained by the Trefftz method.

Keywords: self-oscillations, spherical flask, finite element method, Trefftz method.

Постановка задачи. Рассмотрим три задачи о малых колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в жесткой сфере радиуса R_0 . Во всех задачах предполагаем существование потенциала скоростей — функции $\Phi(R, \theta, \eta) e^{i\omega t}$, где ω — собственная частота колебаний жидкости. В первой задаче дно бака выполнено в виде части сферы радиуса R_{01} (рисунок, *a*), во второй задаче жидкость находится в области между двумя сферами с радиусами R_0 и R_{02} (рисунок, *b*), а в третьей задаче жидкость находится в сфере, содержащей внутренние неподвижные шары-баллоны (рисунок, *в*). Введем систему координат $Ox^*y^*z^*$ с началом в геометрическом центре сфер. Глубину жидкости h^* и расстояния H_1^* и H_2^* будем отсчитывать, как показано на рисунке.

Перейдем к безразмерным переменным ($x = x^*/R_0$, $y = y^*/R_0$, $z = z^*/R_0$) и введем сферические координаты R, θ, η . Спектральная



Основные обозначения и системы координаты

задача для определения потенциала скоростей $\Phi(R, \theta, \eta)$ во всех случаях имеет вид [1–8]

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \lambda\Phi \text{ на } \Gamma_0, \quad (1)$$

где τ — область, заполненная жидкостью; S — смачиваемые поверхности; Γ_0 — свободная поверхность; n — вектор внешней нормали к поверхности S ; $\lambda = \omega^2 R_0 / g$ — собственное значение задачи, g — ускорение свободного падения.

Краевая задача (1) имеет эквивалентную вариационную формулировку: найти минимум функционала

$$F(\Phi) = \int_{\tau} (\nabla\Phi)^2 d\tau - \lambda \int_{\Gamma_0} \Phi^2 d\Gamma. \quad (2)$$

Будем искать решение вариационной задачи (2) в виде

$$\Phi(R, \theta, \eta) = U(R, \theta) H_m(\eta), \quad H_m(\eta) = \begin{cases} \sin(m\eta), \\ \cos(m\eta), \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Решение первой (см. рисунок, а) и второй (см. рисунок, б) задач методом Трефгца. Подставляя выражение (3) в (2), функционал для каждой задачи можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} F(U) = & (h-1)^2 \int_{\theta_{1\Gamma}}^{\theta_0} U_{\Gamma} A_{\Gamma} U \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_{H1}} U_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_1} \sin\theta d\theta + \\ & + R_1 \int_{\theta_{H1}}^{\pi} U_{S_2} \left(\cos(\theta + \theta_2) \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_2} - \frac{\sin(\theta + \theta_2)}{r_2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{S_2} \right) \times \\ & \times \left(\cos\theta \frac{dr_2}{d\theta} - r_2 \sin\theta \right) d\theta - \lambda (h-1)^2 \int_{\theta_{1\Gamma}}^{\theta_0} U_{\Gamma}^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta, \quad (4) \end{aligned}$$

– для первой задачи;

$$\begin{aligned}
 F(U) = & (h-1)^2 \int_{\theta_2}^{\theta_0} UAU \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi} U_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_1} \sin \theta d\theta + \\
 & + R_2 \int_{\theta_{H_2}}^{\theta_{1S}} U_{S_{21}} \left(\cos(\theta + \theta_{21}) \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_{21}} - \frac{\sin(\theta + \theta_{21})}{r_{21}} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{S_{21}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\cos \theta \frac{dr_{21}}{d\theta} - r_{21} \sin \theta \right) d\theta - \\
 & - R_2 \int_{\theta_{2S}}^{\pi} U_{S_{22}} \left(\cos(\theta + \theta_{22}) \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{S_{22}} - \frac{\sin(\theta + \theta_{22})}{r_{22}} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_{S_{22}} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\cos \theta \frac{dr_{22}}{d\theta} - r_{22} \sin \theta \right) d\theta - \lambda(h-1)^2 \int_{\theta_2}^{\theta_0} U_{\Gamma}^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \quad (5)
 \end{aligned}$$

– для второй задачи, где

$$\theta_{1\Gamma} = \begin{cases} \pi, & \text{если } h-1 < 0; \\ 0, & \text{если } h-1 > 0, \end{cases}$$

$$\theta_0 = \arccos(h-1), \quad \theta_{H_1} = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{H_1^2 - R_1^2}}{H_1}\right),$$

$$r_2 = -H_1 \cos \theta - \sqrt{R_1^2 - H_1^2 \sin^2 \theta}, \quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{-H_1 - r_2 \cos \theta}{R_1}\right),$$

$$\theta_{2\Gamma} = \begin{cases} \pi, & \text{если } 0 > h-1 \geq -H_2 + R_2 \text{ или } h-1 \leq -H_2 - R_2; \\ \theta_h, & \text{если } -H_2 + R_2 > h-1 \geq -H_2 - R_2; \\ 0, & \text{если } h-1 > 0, \end{cases}$$

$$\theta_{1S} = \begin{cases} \pi, & \text{если } h-1 \geq -H_2 + R_2; \\ \theta_h, & \text{если } -H_2 + R_2 > h-1 > -H_2; \\ \theta_H, & \text{если } h-1 \leq -H_2, \end{cases}$$

$$\theta_{2S} = \begin{cases} \theta_H, & \text{если } h-1 \geq -H_{21}; \\ \theta_h, & \text{если } -H_{21} > h-1 > -H_2 - R_2; \\ \pi, & \text{если } h-1 \leq -H_2 - R_2, \end{cases}$$

$$\theta_h = \pi - \arccos\left[\frac{1-h}{\sqrt{(1-h)^2 + l^2}}\right], \quad l = \sqrt{R_2^2 - (H_2 + h - l)^2},$$

$$\theta_{H2} = \pi - \arccos \left(\frac{\sqrt{H_2^2 - R_2^2}}{H_2} \right), \quad H_{21} = H_2 - R_2 \sin \theta_{H2},$$

$$r_{21} = -H_2 \cos \theta - \sqrt{R_2^2 - H_2^2 \sin^2 \theta},$$

$$r_{22} = -H_2 \cos \theta + \sqrt{R_2^2 - H_2^2 \sin^2 \theta}, \quad \theta_{21} = \arccos \left(\frac{-H_2 - r_{21} \cos \theta}{R_2} \right),$$

$$\theta_{22} = \arccos \left(\frac{-H_2 - r_{22} \cos \theta}{R_2} \right),$$

оператор $A_\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin \theta}{h-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$, U_Γ означает, что в выражении для

U надо положить $R = \frac{h-1}{\cos \theta}$, а $U_{S_1}, U_{S_2}, U_{S_{21}}, U_{S_{22}}$ означает, что $R = 1, R = r_2, R = r_{21}, R = r_{22}$, соответственно.

Представим функцию $U(r, \theta)$ в виде

$$U(R, \theta) = \sum_{n=1}^N a_n R^n P_n^m(\cos \theta) = \sum_{n=1}^N a_n U_n, \quad (6)$$

где N — порядок приближения решений. В качестве координатных функций были взяты $U_n = R^n P_n^m(\cos \theta)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра степени m .

Подставляя ряд (6) в функционалы (4) и (5), получаем

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n,k=1}^N p_{nk} a_n a_k - \lambda \sum_{n,k=1}^N q_{nk} a_n a_k. \quad (7)$$

Из условий экстремума функционалов F получаем характеристические уравнения для определения собственных значений

$$|p_{nk} - \lambda q_{nk}|_{n,k=1}^N = 0. \quad (8)$$

Решение задач методом конечных элементов (МКЭ). Перепишем вариационную формулировку (2) в следующем виде:

$$\int_{\tau} \nabla \Phi \cdot \nabla \delta \Phi d\tau - \lambda \int_{\gamma_0} \Phi \delta \Phi d\gamma = 0. \quad (9)$$

Подставляя (3) в (9) и используя цилиндрическую систему координат r, η, z , получаем уравнение

$$\iint_{S_\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \delta U}{\partial r} + U \delta U \frac{1}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \delta U}{\partial z} \right) r dr dz - \lambda \int_{L_0} U \delta U r dr = 0, \quad (10)$$

где S_τ — главное меридианное сечение; L_0 — линия пересечения главного меридианного сечения со свободной поверхностью.

Для численной реализации уравнения (10) воспользуемся КЭ в виде треугольников. В каждой точке КЭ потенциал $U(x_l, y_l)$ определен в локальной системе координат $O_l x_l y_l$ по формуле

$$U(x_l, y_l) = (\mathbf{V}) \{\varphi(x_l, y_l)\} = (\mathbf{V}) [C] \{X(x_l, y_l)\}; \quad (11)$$

здесь (\mathbf{V}) – вектор значений обобщенных координат КЭ, $\{\varphi\} = [C] \{X(x_l, y_l)\}$ – вектор-функция формы.

Подставляя (11) в уравнение (10), получаем уравнения для каждого КЭ:

$$([K]_{\text{кэ}} - \lambda [M]_{\text{кэ}}) \{\mathbf{V}\}_{\text{кэ}} = 0, \quad (12)$$

где

$$[K]_{\text{кэ}} = [C] \left[\iint_{S_{\text{кэ}}} \left(\frac{\partial \{X\}}{\partial r} \frac{\partial \{X\}^T}{\partial r} + \frac{\{X\} \{X\}^T}{r^2} + \frac{\partial \{X\}}{\partial z} \frac{\partial \{X\}^T}{\partial z} \right) r dr dz \right] [C]^T,$$

$$[M]_{\text{кэ}} = [C] \left[\int_{\Gamma_{\text{кэ}}} \{X\} \{X\}^T r dr \right] [C]^T. \quad (13)$$

Объединяя все КЭ в ансамбль, имеем задачу на собственные значения:

$$([K] - \lambda [M]) \{\mathbf{V}\} = 0. \quad (14)$$

Результаты вычислений собственных значений одноузловых неосесимметричных колебаний первой и второй задачи методом Трефтца при $N = 10$ и методом КЭ приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Собственные значения первого и второго тонов колебаний жидкости в сферической емкости, дно которой выполнено в виде части сферы ($R_1 = R_{01}/R_0 = 1$)

$h = \frac{h^*}{R_0}$	$H_1 = \frac{H_1^*}{R_0}$	Метод Ритца		МКЭ		МКЭ	
		$\lambda_{11}^{(1)}$	$\lambda_{11}^{(2)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda_0^{(1)}$	$\lambda_0^{(2)}$
0,3	1,8	0,8250	5,3091	0,8259	5,3490	1,1121	5,9754
0,6	1,8	1,2037	5,3331	1,2038	5,3730	1,2621	5,4068
1,7	1,8	3,1638	9,1396	3,1664	7,9906	3,1686	7,9983
0,3	1,9	1,0514	5,7804	1,0509	5,8435	1,1121	5,9754
0,8	1,9	1,3865	5,2394	1,3863	5,2765	1,3922	5,2749
1,1	1,9	1,6623	5,3599	1,6626	5,3961	1,6649	5,3976
0,5	1,7	0,9751	5,2563	0,9757	5,2879	1,2072	5,5438
1,2	1,7	1,7668	5,4954	1,7674	5,5344	1,7887	5,5367

Собственные значения первого и второго тонов колебаний жидкости в области между двумя сферами

$h = \frac{h^*}{R_0}$	$H_1 = \frac{H_1^*}{R_0}$	$R_2 = \frac{R_{02}}{R_0}$	Метод Ритца		МКЭ		МКЭ	
			$\lambda_{11}^{(1)}$	$\lambda_{11}^{(2)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda_0^{(1)}$	$\lambda_0^{(2)}$
0,3	0,9	0,1	1,0968	5,8503	1,0883	5,8917	1,1121	5,9754
0,6	0,8	0,2	1,2274	5,3241	1,2112	5,3431	1,2621	5,4068
0,7	0,5	0,3	1,1650	4,6851	1,1090	4,4746	1,3233	5,3199
0,6	0,4	0,2	1,2287	5,2279	1,2194	5,2476	1,2621	5,4068
1,1	0	0,1	1,6576	5,2977	1,6565	5,3885	1,6649	5,3976
0,9	0	0,2	1,4627	5,2189	1,4615	5,3581	1,4705	5,2738

Результаты, полученные в первой и второй задачах методом Трефтца, практически совпадают с результатами МКЭ. Решение третьей задачи о малых колебаниях жидкости в сфере с внутренними шарами-баллонами (см. рисунок, в), полученное МКЭ, приведено в табл. 3.

Таблица 3

Собственные значения первого и второго тонов колебаний жидкости в сферической емкости с внутренними шар-баллонами

$h = \frac{h^*}{R_0}$	$R_3 = \frac{R_{03}}{R_0}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda_0^{(1)}$	$\lambda_0^{(2)}$
0,4	0,1	1,0295	5,5167	1,1575	5,7254
0,4	0,15	0,6590	4,0410		
1,0	0,1	1,5477	5,3115		
1,0	0,2	1,4113	5,2979	1,5603	5,3135
1,0	0,3	0,7648	4,2200		
1,3	0,1	1,9332	5,7374		
1,3	0,2	1,8758	5,7384	1,9385	5,7380
1,3	0,3	1,5629	5,6832		

В двух крайних столбцах табл. 1–3 приведены собственные значения первого и второго тонов “классической” гладкой задачи, полученные МКЭ.

Заключение. Рассмотренные задачи позволяют оценить влияние внутрибаковых устройств на колебательный процесс жидкости, частично заполняющей сферические емкости.

Автор благодарит канд. физ.-мат. наук А.Н. Темнова за помощь при написании статьи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 500 с.
2. Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 11. С. 175–192.

3. Нгуен Х.З., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива непостоянного объема в сферической емкости // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 12. С. 426–439.
4. Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 212 с.
5. Лимарченко О.С., Матаратцо Д., Ясинский В.В. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 2002. 304 с.
6. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. № 3. С. 31–38.
7. Connor J.J., Brebbia C.A. Finite element techniques for fluid flow. London – Boston: Newnes – Butterworths, 1977. 264 p.
8. Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. Л.: Судостроение, 1984. 237 с.

REFERENCES

- [1] Kolesnikov K.S. Dinamika raket [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 500 p.
- [2] D'yachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. Liquid fuel fluctuations in taper and cylindrical vessels. *Jelekt. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2013, no. 11, pp. 175–192 (in Russ.).
- [3] Nguen Kh.Z., Temnov A.N. Fluctuations of liquid fuel of changeable volume in a spherical vessel. *Jelekt. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2014, no. 12, pp. 426–439 (in Russ.).
- [4] Lukovskiy I.A., Barnyak M.Ya., Komarenko A.N. Priblizhennyye metody resheniya zadach dinamiki ogranichenogo ob'ema zhidkosti [Approximate methods to solve dynamic problems of limited volume of liquid]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1984. 212 p.
- [5] Limarchenko O.S., Mataratstso D., Yasinskiy V.V. Dinamika vrashchayushchikhsya konstruksiy s zhidkost'yu [Dynamics of rotating constructions containing liquid]. Kiev, GNOZIS Publ., 2002. 304 p.
- [6] D'yachenko M.I., Temnov A.N. Natural Oscillations of Liquid Propellant under Redistribution Conditions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2012, no. 3, pp. 31–38 (in Russ.).
- [7] Connor J.J., Brebbia C.A. Finite element techniques for fluid flow. London–Boston: Newnes–Butterworths, 1977. 264 p.
- [8] Ershov N.F., Shakhverdi G.G. Metod konechnykh elementov v zadachakh gidrodinamiki i gidrouprugosti [Finite element method in the problems of hydrodynamics and hydroelasticity]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1984. 237 p.

Статья поступила в редакцию 05.11.2014

Нгуен Зуй Хунг — аспирант кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители”. Специализируется в области механики жидкости и газа.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Nguyen D. H. — post-graduate of “Spacecraft and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mechanics of liquid and gas.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.