

# ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 629.783

## ОПТИМАЛЬНОЕ УДЕРЖАНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ НА СОЛНЕЧНО-СИНХРОННОЙ ОРБИТЕ

Ван Лицзе, Баранов А.А.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: wanglitse\_bmstu@mail.ru; andrey\_baranov@list.ru

*Рассмотрена задача поддержания солнечно-синхронной орбиты с помощью двигателей малой тяги. Проанализированы требуемые характеристики орбиты и эволюция ее параметров, связанная с атмосферным сопротивлением и притяжением Солнца. В основу решения задачи положена дискретная математическая модель движения космического аппарата при воздействии ограниченного управления. Для решения задачи использован метод линейного программирования с учетом ограничения на тягу двигателя, основанный на применении алгоритма внутренних точек. В целях обеспечения максимально возможного времени свободного полета со значениями параметров орбиты в допустимом диапазоне применена комбинированная стратегия поддержания, включающая в себя стратегию ожидания при удержании космического аппарата по долготе и стратегию предосторожности для коррекции наклона орбиты. Эффективность предложенного метода поддержания параметров солнечно-синхронной орбиты показана на примерах. Проанализированы распределение управляющих импульсов на каждом витке коррекции и зависимость годового суммарного импульса скорости от солнечной активности.*

**Ключевые слова:** солнечно-синхронная орбита, двигатель малой тяги, метод линейного программирования, оптимальное удержание, алгоритм внутренних точек.

## OPTIMAL MAINTENANCE OF SPACECRAFT WITH LOW-THRUST ENGINES ON SUN-SYNCHRONOUS ORBIT

Wang Lijie, Baranov A.A.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia Federation  
e-mail: wanglitse\_bmstu@mail.ru; andrey\_baranov@list.ru

*The problem of sun-synchronous orbit maintenance for the spacecrafts using low-thrust engines is investigated. The required orbital characteristics and evolutions of the orbital parameters associated with drag and solar attraction are analyzed. Discrete mathematical model of the spacecraft motion is developed taking into account the action of limited control. A linear programming method with restriction of thrust based on the application of the interior-point algorithm is used. The combined maintenance strategy is proposed in order to obtain maximum free flight time for spacecraft. This strategy consists of the expectation strategy for longitude control, as well as precautionary strategy for the inclination correction. Effectiveness of the proposed algorithm is proved by numerical simulations. Distribution of control impulses over each correction circuit is analyzed, the annual summary characteristic velocity value with respect to solar activity is also estimated.*

**Keywords:** sun-synchronous orbit, low-thrust engine, linear programming method, optimal maintenance, interior-point algorithm.

Солнечно-синхронной орбитой (ССО) является орбита, обеспечивающая равенство скорости прецессии плоскости орбиты и средней угловой скорости годового движения Земли вокруг Солнца [1]. Орбита ССО интересна тем, что космический аппарат (КА) пролетает над одной и той же широтой земной поверхности приблизительно в одно и то же местное солнечное время. Таким образом, угол освещения земной поверхности очень хорошо подходит для спутников дистанционного зондирования Земли. Одна из особенностей ССО состоит в том, что они имеют большое наклонение и обычно расположены на небольших высотах. На низкой орбите из-за действия возмущающих факторов, связанных с несферичностью Земли и атмосферным сопротивлением, реальная траектория полета КА всегда будет отличаться от расчетной ССО. Если отличия превышают допустимые отклонения, значения которых определяются требованиями к траектории полета, возникает необходимость коррекции соответствующих элементов орбиты.

Традиционное использование для коррекции орбиты химической двигательной установки (ХДУ) приводит к значительным затратам топлива. Одним из возможных путей решения этой проблемы является использование электрических реактивных двигателей (ЭРД) сверхмалой тяги. Высокий удельный импульс тяги ЭРД позволяет существенно сократить бортовые запасы топлива для поддержания орбиты и реализовать длительные сроки активного существования (САС) КА. К сожалению, амплитуда самой тяги таких двигателей мала, что приводит к увеличению числа витков, на которых исполняются корректирующие импульсы, и продолжительности проведения каждой коррекции. Поэтому в задачах поддержания орбиты КА с двигателями малой тяги приходится учитывать ограничение на тягу двигателя и продолжительность его работы.

Вопросы, связанные с формированием и поддержанием ССО с помощью ХДУ и ЭРДУ, изучались многими авторами, например, в работах [1–7]. В [1] рассмотрена задача о коррекции параметров рабочей ССО КА с ХДУ. В [2, 3] изложены задачи об оптимальной коррекции движения КА, которые решаются с помощью метода линейного программирования. В [4] предложены оптимальный и квазиоптимальный алгоритмы для линейной коррекции эллиптических орбит, базирующиеся на методе линейного программирования. В [5] на основе метода внутренних точек для решения задач линейного программирования разработан численный метод расчета оптимальных продолжительных маневров. В [6] предложены численно-аналитические алгоритмы для расчета параметров маневров перехода малого КА с орбиты выведения на рабочую ССО и для расчета маневров поддержания параметров такой орбиты в заданном диапазоне. В [7] все элементы орбиты

корректируются с помощью совместной двигательной системы с непрерывным и импульсным ЭРД.

В настоящей работе осуществляется дискретизация математической модели движения КА с ЭРД, предлагается поэтапный алгоритм расчета параметров оптимальной коррекции, базирующийся на методе линейного программирования, учитываются естественная эволюция орбиты и ограничения на тягу двигателя.

При решении задачи дистанционного зондирования земной поверхности необходимо обеспечить [8]:

— синхронность прецессии орбитальной плоскости КА со средним движением Земли вокруг Солнца и, как следствие, обеспечивающую стабильность освещенности наблюдаемых объектов на поверхности Земли;

— стабильность высоты полета и местного солнечного времени на одной и той же широте;

— повторяемость трассы КА через смежные районы съемки, что позволит осуществить полное покрытие заданного района земной поверхности.

В процессе полета элементы орбиты КА изменяются под воздействием гравитационного поля и атмосферного сопротивления Земли, гравитационных полей Солнца, Луны, а также возмущений, вызванных поддержанием ориентации КА с помощью двигательной установки.

Особенность гравитационных возмущений заключается в том, что они не приводят к монотонному изменению элементов орбиты с увеличением времени. А под влиянием атмосферного торможения высота КА все время уменьшается. Несмотря на малость этого уменьшения, в результате длительного воздействия атмосферного сопротивления трасса орбиты может настолько сместиться к востоку, что нарушается условие съемки заданного наблюдаемого района. Для орбит с малыми эксцентриситетами темп падения высоты  $\dot{h}$  может быть рассчитан по приближенной формуле [9, 10]

$$\dot{h} = -C_x S \rho \sqrt{\mu a} / m_{ka}. \quad (1)$$

Здесь  $C_x$  — коэффициент лобового сопротивления;  $S$  — площадь миделевого сечения КА для атмосферного сопротивления,  $\text{м}^2$ ;  $m_{ka}$  — масса КА, кг;  $\rho$  — плотность атмосферы на высоте полета КА,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $a$  — большая полуось орбиты, км;  $\mu = 398601$  — гравитационная постоянная Земли,  $\text{км}^3/\text{с}^2$ . Рассмотрим пример расчета  $\dot{h}$  по формуле (1) с использованием модели плотности атмосферы NRLMSISE-00 для следующих условий:  $S = 2,5 \text{ м}^2$ ,  $a = 6890,396$  км, текущее значение индекса солнечной активности  $F_{10,7}$  совпадает со средним и равно 125 единиц, среднее значение геомагнитного индекса  $a_p = 12$  баллов.

Пренебрегая зависимостью плотности атмосферы от времени и широты, можно вычислить плотность атмосферы на высоте  $h = 512,396$  км, которая оказывается равной  $2,18 \cdot 10^{-13}$  кг/м<sup>3</sup>, и  $\dot{h} = -1,53 \cdot 10^{-4}$  м/с =  $-13,2$  м/сутки.

Солнце все время находится с одной стороны ССО и его притяжение приводит к изменению положения орбитальной плоскости, т.е. изменяет наклонение орбиты. Для ССО выражение для вековых возмущений наклонения орбиты  $i$  имеет вид [11]

$$\frac{di}{dt} = \frac{3n_s^2}{16n} \sin i (1 + \cos i_s)^2 \sin(2u_s - 2\Omega),$$

где  $i_s$  — склонение Солнца;  $u_s$  — прямое восхождение Солнца;  $n_s$  — угловая скорость среднего Солнца;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $n$  — среднее движение КА. Если местное солнечное время составляет 21:00, тогда  $2u_s - 2\Omega = 90^\circ$ , и для ССО высотой  $h = 512,396$  км  $\frac{di}{dt} = -0,04^\circ/\text{год}$ . Наклонение орбиты уменьшается вследствие гравитационного притяжения Солнца, что приводит к изменению скорости прецессии долготы восходящего узла ( $d\Omega/dt = -\frac{3}{2}J_2n(R_e/a)^2 \cos i$ , где  $J_2$  — коэффициент при второй зональной гармонике в разложении геопотенциала;  $R_e$  — экваториальный радиус Земли). В совокупности с начальными ошибками это приводит к значительному отклонению местного солнечного времени прохождения восходящего узла от расчетного значения за САС КА.

Анализ влияния каждого из указанных факторов на параметры орбиты показывает, что увеличение САС КА на ССО может привести к недопустимому ухудшению условий съемки. Таким образом, удержание КА в течение довольно значительного САС на ССО может достигаться только путем периодического проведения коррекции траектории КА.

**Постановка задачи коррекции траектории КА двигателями малой тяги.** Для описания орбитального движения будем использовать геоцентрическую инерциальную систему координат  $OXYZ$ , в которой плоскость  $OXY$  совпадает с экваториальной плоскостью Земли, ось  $OX$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $OZ$  совпадает с осью вращения Земли, а ось  $OY$  дополняет систему до правой. Для того чтобы управляющее ускорение могло быть сообщено КА в требуемом направлении, обычно используется один из следующих двух способов установки корректирующих двигателей. При первом способе имеется всего один двигатель, жестко связанный с аппаратом. В этом случае изменение направления корректирующего ускорения достигается путем соответствующего изменения ориентации КА. При втором способе аппарат сохраняет постоянную ориентацию и на нем



где

$$B(t, \mathbf{X}(t)) = \begin{bmatrix} 2/n & 0 & 0 \\ -3\omega_e(t_\Omega - t)/(na) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin u/(na \sin i) \\ 0 & 0 & \cos u/(na) \end{bmatrix},$$

$f(t, \mathbf{X}(t))$  — известная функция, описывающая воздействие внешних факторов на изменение элементов орбиты;  $\omega_e$  — угловая скорость вращения Земли;  $u$  — аргумент широты;  $n$  — среднее движение КА;  $t_0$  — начальный момент времени полета;  $t_\Omega$  — момент прохождения через восходящий узел. Отметим, что управляющее ускорение в направлении, перпендикулярном вектору скорости КА в орбитальной плоскости, не влияет на корректируемые параметры, поэтому будем считать, что составляющая управляющего ускорения на этом направлении равна нулю, т.е.  $a_s = 0$ . Обозначая угол между вектором скорости и вектором управления через  $\varphi$ , можно записать

$$a_\tau = |\mathbf{a}| \cos \varphi, \quad a_h = |\mathbf{a}| \sin \varphi. \quad (3)$$

Цель задачи — поддержание значений корректируемых параметров в заданной окрестности  $[\mathbf{X}_d - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{X}_d + \boldsymbol{\delta}]$  ( $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_k\}$ ,  $\delta_k = \text{const} > 0$ ,  $k = 1, \dots, 4$ ) их расчетных значений  $\mathbf{X}_d$  на фиксированном САС:

$$\mathbf{X}(t) \in [\mathbf{X}_d - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{X}_d + \boldsymbol{\delta}]. \quad (4)$$

Ввиду ограниченности тяги двигателя управляющий вектор  $\mathbf{a}$  в (2) всегда ограничен по значению, т.е. область допустимых управлений  $U$  имеет вид

$$U = \{\mathbf{a} : |\mathbf{a}| \leq a_{\max}\}. \quad (5)$$

В задаче управления на интервале времени  $[t_s, t_k]$ , на котором выполняется один сеанс коррекции выбранных элементов орбиты, в качестве критерия оптимальности используется функционал минимума суммарной характеристической скорости:

$$I[a] = \min_{\mathbf{a}(t)} \int_{t_s}^{t_k} |\mathbf{a}(t)| dt, \quad (6)$$

где  $t_s$  и  $t_k$  — начальный и конечный моменты времени сеанса коррекции.

**Представление сформулированной задачи в форме задачи линейного программирования.** Для решения сформулированной задачи будем использовать теорию дискретного терминального управления, предложенную в работе Ю.П. Улыбышева [5]. Для использования результатов работы [5] необходимо перейти к дискретной модели полета и определить множества псевдоимпульсов управления, из которых

строится оптимальная программа коррекции. Для этого рассмотрим дискретный вариант сформулированной задачи коррекции траектории.

Предположим, что интервал времени  $[t_s, t_k]$  каждого сеанса коррекции траектории фиксирован, при этом длительность каждого сеанса коррекции может составлять несколько витков. Разделим интервал  $[t_s, t_k]$  на  $K$  подынтервалов времени  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j (j = \overline{1, K})$ , в которых зададим корректирующие реактивные ускорения. При малой продолжительности каждого подынтервала вектор управляющего ускорения в каждом подынтервале можно считать постоянным, т.е. при  $t \in [t_j, t_{j+1})$   $\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{a}(t_j)$ . Предположим, что вектор управляющего ускорения в каждом подынтервале рассматривается как суммарный вектор некоторых равномерных векторов псевдоуправления  $\mathbf{a}^{(l)}(t_j)$  [5],  $l = \overline{1, S}$ , у каждого из которых угол между вектором скорости и вектором управления равен  $\varphi_j^{(l)}$ , т.е.  $\mathbf{a}(t_j) = \sum_{l=1}^S a^{(l)}(t_j)$ . Таким образом, строится кусочно-постоянное управление в дискретной модели полета.

В конечный момент времени каждого сеанса коррекции траектории  $t_k$  для кусочно-постоянного управления корректируемые параметры могут быть представлены в форме

$$X(t_k) \approx \mathbf{X}^*(t_k) + \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^S B(t_j, \mathbf{X}(t_j)) \mathbf{a}^{(l)}(t_j) \Delta t_j, \quad (7)$$

где  $\mathbf{X}^*(t_k)$  — корректируемые параметры в момент времени  $t_k$  свободного движения без коррекции. Обозначим через  $\Delta \mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^*(t_k) = (\Delta a, \Delta \lambda_\Omega, \Delta \Omega, \Delta i)^T$  изменение элементов орбиты в момент времени  $t_k$ , через  $\Delta \mathbf{V}_j^{(l)} = \mathbf{a}^{(l)}(t_j) \Delta t_j = (\Delta V_j^{(l)} \cos(\varphi_j^{(l)}), \Delta V_j^{(l)} \sin(\varphi_j^{(l)}))^T$  ( $\Delta V_j^{(l)}$  — модуль вектора  $\Delta \mathbf{V}_j^{(l)}$ ) — корректирующий импульс на  $l$ -м сегменте  $j$ -го подынтервала, через  $\Delta \mathbf{V} = (\Delta V_1^{(1)}, \Delta V_1^{(2)}, \dots, \Delta V_1^{(S)}, \dots, \Delta V_K^{(1)}, \Delta V_K^{(2)}, \dots, \Delta V_K^{(S)})^T$  — последовательность корректирующих импульсов на всех подынтервалах времени,  $\Delta \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{K \cdot S}$ , тогда выражение (7) будет представлено в виде

$$\Delta \mathbf{X}(t_k) = A_e \Delta \mathbf{V}, \quad (8)$$

где  $A_e$  — матрица влияния размера  $4 \times KS$ , элементы которой на  $[(j-1)S + l]$ -м столбце имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2 \cos(\varphi_j^{(l)})/n \\ -3\omega_e(t_\Omega - t_j) \cos(\varphi_j^{(l)})/(na) \\ \sin u(t_j) \sin(\varphi_j^{(l)})/(na \sin i) \\ \cos u(t_j) \sin(\varphi_j^{(l)})/(na) \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, K}, \quad l = \overline{1, S}.$$

Ввиду ограниченности значения реактивного ускорения на каждом подынтервале на компоненты вектора  $\Delta V$  накладывается ограничение по амплитуде

$$U = \left\{ \Delta \mathbf{V} : \Delta V_j^{(1)} + \Delta V_j^{(2)} + \dots + \Delta V_j^{(S)} \leq \Delta V_{j \max}, \quad j = \overline{1, K} \right\}. \quad (9)$$

Для задачи коррекции помимо терминальных условий может накладываться дополнительное ограничение, касающееся работы двигателя. Например, когда КА проходит через земную тень, корректирующий двигатель не может работать. Кроме того, возможны и другие причины отключения двигателя на определенном участке полета. Эти дополнительные ограничения по суммарной длительности работы двигателя на некотором витке имеют вид

$$A_c \cdot \Delta \mathbf{V} \leq \mathbf{b}, \quad (10)$$

где

$$A_c = \begin{bmatrix} \underbrace{1/a_{\max} \cdots 1/a_{\max}}_S \cdots \underbrace{1/a_{\max} \cdots 1/a_{\max}}_S & & & & \\ & \underbrace{1/a_{\max} \cdots 1/a_{\max}}_{2\text{-й виток}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \underbrace{1/a_{\max} \cdots 1/a_{\max}}_{R\text{-й виток}} \end{bmatrix}$$

— матрица размером  $R \times KS$ , в каждой строке которой включаются все подынтервалы на соответствующем витке;  $R$  — число витков. Вектор ограничений  $\mathbf{b}$  в этом случае равен

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta t_{1 \max} \\ \Delta t_{2 \max} \\ \vdots \\ \Delta t_{R \max} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, исходная задача коррекции траектории (2), (4)–(6) свелась к задаче математического программирования: найти вектор  $\Delta V$ , минимизирующий линейный функционал

$$I[\Delta \mathbf{V}] = \min_{\Delta \mathbf{V}} \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^S \Delta V_j^{(l)} \quad (11)$$

с ограничениями в виде векторных равенства (8), неравенства (9), (10).

Следует отметить, что в предлагаемой формулировке задача может иметь весьма высокую размерность. Однако с помощью известного алгоритма внутренних точек [13] задача линейного программирования эффективно решается.

**Алгоритм коррекции параметров орбиты и стратегия управления.** Для уменьшения затрат суммарного импульса необходим выбор стратегии поддержания с учетом области допустимых значений корректируемых параметров.

Известно, что в области допустимых значений изменение географической долготы восходящего узла может быть осуществлено путем изменения высоты орбиты. Когда географическая долгота превышает восточную границу  $\lambda_d + \delta_{\lambda \max}$ , необходимо увеличить высоту орбиты ( $\delta_{\lambda \max}$  — допустимая погрешность удержания географической долготы). При этом повышение высоты орбиты на

$$\Delta a = \sqrt{\frac{4a \left| 2\dot{h}\delta_{\lambda \max} \right|}{3\omega_e}}$$

первоначально сопровождается смещением трассы на запад, а затем, после снижения высоты КА ниже номинальной высоты из-за воздействия атмосферного сопротивления, — на восток [1]. Такая стратегия, именуемая стратегией ожидания, позволяет увеличить периодичность проведения коррекций орбиты и обеспечить максимальную длительность полета КА со значениями элементов орбиты в допустимом диапазоне. Кроме того, при использовании стратегии ожидания для управления долготой минимизируется расход рабочего тела на проведение коррекций.

Однако коррекция наклона орбиты двигателями малой тяги с использованием стратегии ожидания оказалась невозможной. Это обусловлено малостью реактивной тяги ЭРД, не позволяющей реализовать требуемые значения корректирующих импульсов скорости. Поэтому для коррекции наклона необходима стратегия, заключающаяся в многократном предварительном включении двигательной установки для увеличения наклона орбиты на

$$\Delta i = N\delta_{\text{год}}/N_{\text{год}},$$

где  $\delta_{\text{год}}$  — годовое изменение наклона орбиты;  $N_{\text{год}}$  — число витков за год полета;  $N$  — число витков между последовательными сеансами коррекции наклона орбиты. Именно такая стратегия управления, называемая стратегией предосторожности, используется в настоящей работе.

При решении задачи использовалась последовательность дискретных терминальных управлений. Чтобы решить задачу удержания КА на номинальной орбите с заданной точностью, использовалась итерационная процедура (рис. 2), которая состоит из следующих этапов.

1. Инициализация исходных данных для расчета коррекций удержания.

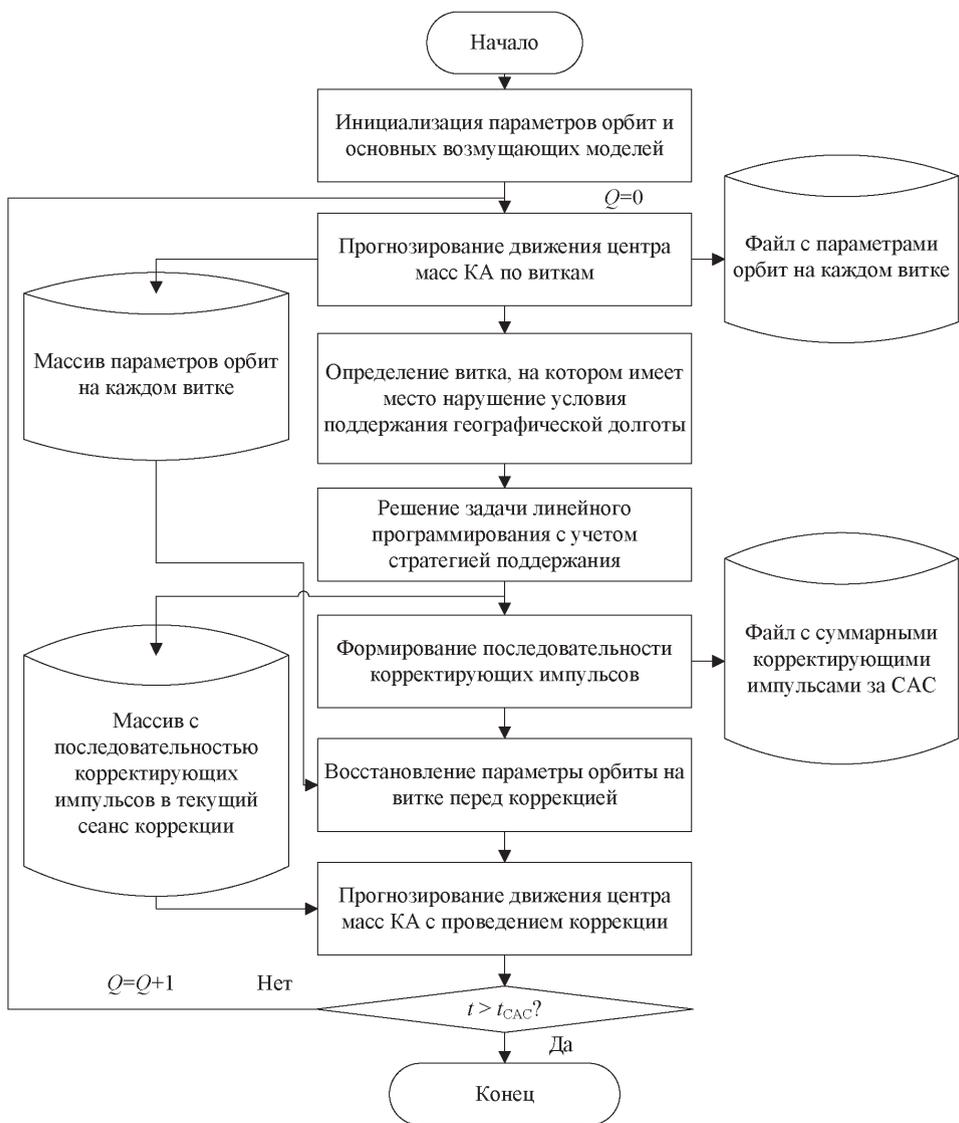


Рис. 2. Блок-схема программы расчета коррекций поддержания

2. Интегрирование точной модели движения неуправляемого КА в геоцентрической инерциальной системе координат  $OXYZ$ , в которой учитываются возмущающие факторы, вызываемые несферичностью Земли (гравитационная модель Земли EGM2008 [10]) атмосферным сопротивлением (модель плотности атмосферы Земли NRLMSISE-00 [14], данные о солнечной активности и геомагнитном показателе, притяжением Луны и Солнца (эфемерида класса DE405 [15]), давлением светового излучения с учетом тени Земли [11], прецессией и нутацией земной оси [10], позволяет рассчитывать изменение средних элементов  $\Delta \mathbf{X} = (\Delta a, \Delta \lambda_\Omega, \Delta \Omega, \Delta i)^T$  по виткам.

3. Определение витка  $N_k$ , начиная с которого отклонение географической долготы  $\Delta\lambda_\Omega$  снижается ниже допустимой нижней границы  $-\delta_{\lambda\max}$ .

4. При заданной продолжительности  $T_{\text{кор}}$  или заданном числе витков  $N_{\text{кор}}$  в каждом сеансе коррекции (например,  $N_{\text{кор}} = 6$ ) на основе метода линейного программирования, изложенного ранее, для отклонения  $\Delta X$  в витке  $N_k$  определяется последовательность импульсов скорости  $\Delta V$ , обеспечивающая совместное повышение высоты и наклона орбиты по стратегии поддержания КА.

5. Используя параметры орбиты перед текущей коррекцией, т.е. параметры орбиты  $(N_k - N_{\text{кор}} + 1)$ -го витка, прогнозируют движение центра масс КА с учетом сформированной последовательности корректирующих импульсов.

6. Для определения номера витка и параметров следующего сеанса коррекции повторяются все действия, начиная с п. 2.

Как следует из блок-схемы, в программе организован цикл по номеру сеанса коррекции  $Q$ , в котором последовательно определяются витки проведения коррекции и ее параметры. Выход из этого цикла осуществляется при превышении текущим временем  $t$  заданного значения  $t_{\text{САС}}$ .

**Численные примеры и анализ.** Данная методика применялась при расчете параметров коррекции малого КА (МКА). Его характеристики и номинальные элементы орбиты приведены далее и в табл. 1.

#### *Характеристики КА*

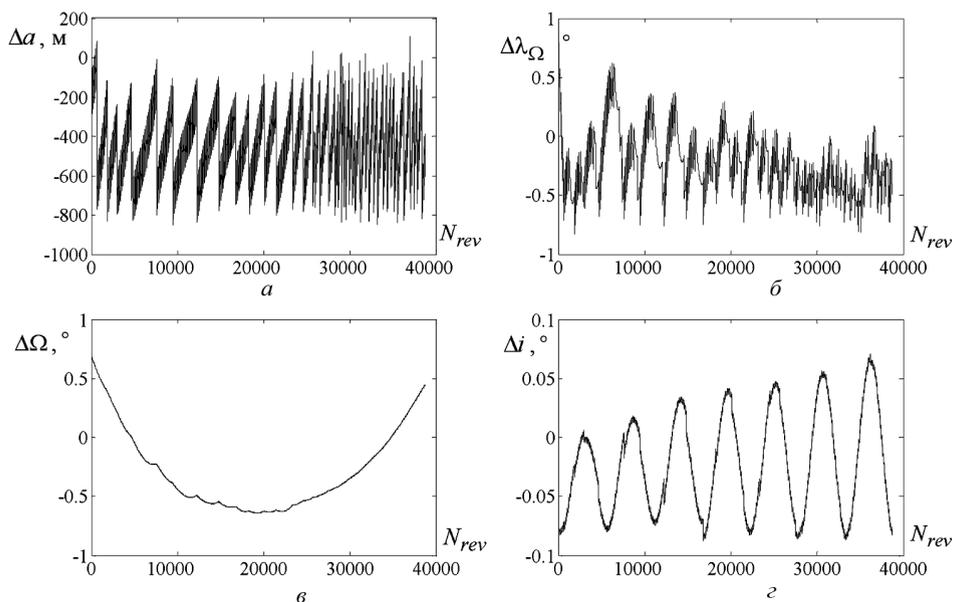
Масса, кг .....	465
Площадь миделевого сечения для атмосферного сопротивления, м <sup>2</sup> .....	2,5
Коэффициент лобового сопротивления $C_x$ .....	2,5
Площадь миделевого сечения для давления светового излучения, м <sup>2</sup> .....	0,3
Коэффициент давления светового излучения .....	1,3

Таблица 1

#### **Номинальные и начальные средние элементы орбиты**

Значения	Параметры					
	$a$ , км	$e$	$\omega$	$i$	$\Omega$	$u$
Номинальные	6890,421	0,001077	90°	97,448°	73,3°	0°
Начальные	6890,721	0,001077	90°	97,528°	72,6°	0°

Рассмотрим задачу коррекции, обеспечивающей удержание МКА на ССО на интервале времени от 1 августа 2006 года UTC до 1 августа 2013 года UTC. Предполагаем, что  $\delta_{\lambda\max} = 0,7^\circ$ ;  $\Delta i = 0,00525^\circ \times N/800$ , где  $N$  — число витков между последовательными сеансами

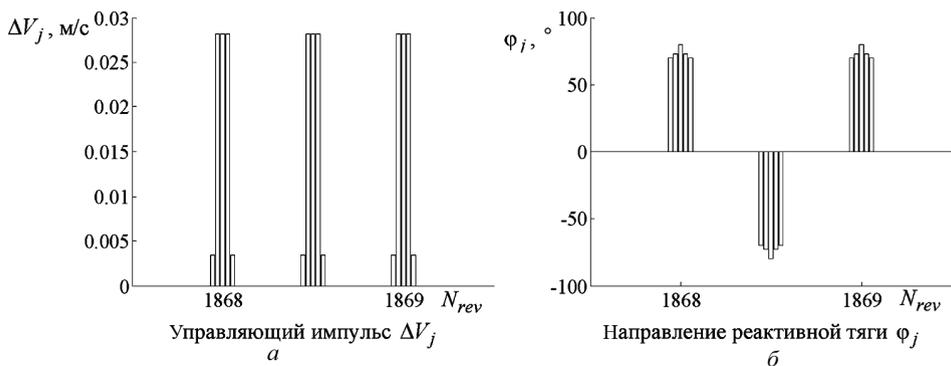


**Рис. 3.** Изменение корректируемых средних элементов орбиты  $\Delta X$  по номерам витка  $N_{rev}$

коррекции наклонения орбиты. Корректирующей двигательной установкой является СПД-100, тяга которого равна 83 мН, удельный импульс  $I = 2500$  с.

На рис. 3 приведены результаты изменения выбранных элементов орбиты, подтверждающие приемлемую точность поддержания орбиты. Следует отметить, что в этом случае число витков  $N_{кор}$ , на которых проводилась коррекция, составляет 6.

На рис. 4 приведена часть результатов исполнения управляющих импульсов, отметим, что на каждом витке одного сеанса коррекции находятся два участка смежных подынтервалов с ненулевыми управляющими импульсами. На каждом участке, кроме первого и послед-



**Рис. 4.** Дискретный управляющий импульс за некоторые витки:  $a$  — управляющий импульс  $\Delta V_j$ ;  $b$  — направление реактивной тяги  $\varphi_j$

него управляющих импульсов, все внутренние управляющие импульсы принимают максимальное значение, а первый и последний могут быть не максимальными. При этом можно рассматривать каждый участок как участок непрерывной работы двигателя. Таким образом, на каждом витке наблюдаются два участка работы двигателя, продолжительностью примерно 511 с.

Годовые изменения индексов солнечной активности следующие: первый год —  $F_{10,7} = 70,4 \dots 74,9$ ; второй —  $F_{10,7} = 68,1 \dots 70,4$ ; третий —  $F_{10,7} = 68,1 \dots 70,2$ ; четвертый  $F_{10,7} = 70,2 \dots 82,1$ ; пятый —  $F_{10,7} = 82,1 \dots 128,7$ ; шестой —  $F_{10,7} = 128,7 \dots 154,6$ ; седьмой год —  $F_{10,7} = 105,3 \dots 154,6$ .

В табл. 2 показаны данные о распределении суммарных управляющих импульсов и числе включения двигателя по годам, где  $\Delta V_a = \sum \Delta V_j \cos(\varphi_j)$ ,  $\Delta V_i = \sum \Delta V_j \sin(\varphi_j)$  — годовые суммарные импульсы скорости коррекции высоты и наклона орбиты;  $Q_{PD}$  — число включений двигателя;  $N_{PCK}$  и  $N_{KCK}$  — номера начального витка первого и последнего сеансов коррекции в каждом году. Из-за ежедневного изменения солнечной активности и геомагнитного показателя за САС КА составляющая годовых управляющих импульсов  $\Delta V_a$  неравномерно распределяется по виткам. Ранее приведены годовые изменения индексов солнечной активности  $F_{10,7}$ . Анализ данных табл. 2 и  $F_{10,7}$  показывает, что параметры  $\Delta V_a$  и  $Q_{PD}$  зависят от изменения индексов солнечной активности. Например, на шестом году полета индекс солнечной активности имеет наибольшее значение по сравнению с остальными годами полета, поэтому параметры  $\Delta V_a$  и  $Q_{PD}$  оказались наибольшими. Аналогично, на третьем году полета индекс солнечной активности имеет наименьшее значение, параметры  $\Delta V_a$  и  $Q_{PD}$  оказались наименьшими. При совместной стратегии поддержания высоты и наклона орбиты  $\Delta V_i$  зависит от числа витков между последними сеансами предыдущего и текущего годов, т.е.

Таблица 2

**Распределения управляющих импульсов по годам**

Тип двигателя	$N_{кор}$	Параметры	Год полета							САС
			1	2	3	4	5	6	7	
СПД-100	6	$\Delta V$ , м/с	4,49	4,30	5,06	6,07	5,58	6,40	5,42	37,31
		$\Delta V_a$ , м/с	1,14	0,60	0,54	0,93	1,51	3,86	2,87	11,45
		$\Delta V_i$ , м/с	4,29	4,25	5,02	5,98	5,32	4,96	4,55	34,37
		$Q_{PD}$	72	24	24	60	72	168	132	552
		$N_{PCK}$	671	7595	12261	16818	23361	28283	33851	—
		$N_{KCK}$	4849	9445	14816	21499	27530	33197	38393	—

зависит от разности значений  $N_{КСК}$  текущего и предыдущего годов. В случае 6-витковой коррекции на четвертом году полета разность значений параметров  $N_{КСК} = 6683$  имеет наибольшее значение, поэтому боковая составляющая управляющих импульсов  $\Delta V_i$  является наибольшей. Из-за различной разности  $N_{КСК}$ , хотя на первом и четвертом годах параметр  $Q_{PD}$  имеет одинаковое значение, но  $\Delta V_i$  оказалась разной, и параметр  $\Delta V_i$  на четвертом году соответствует большим затратам импульсов скорости для коррекции наклона орбиты.

При проведении 6-витковых коррекций число включения двигателя равно 552 (46 сеансов коррекции), суммарная характеристическая скорость за САС 7 лет составит 37,31 м/с, общая продолжительность работы двигателя — 58,06 ч, общее изменение массы КА — 0,69 кг.

Если перейти к проведению 15-витковых коррекций, то при этом потребуется суммарный импульс 36,19 м/с, число включений двигателя будет равно 1350, общая продолжительность работы двигателя составит 56,32 ч, общее изменение массы КА — 0,67 кг. Таким образом, переход к 15-витковым коррекциям несущественно уменьшает затраты горючего, но значительно увеличивает число маневров.

Если корректирующей двигательной установкой является СПД-50, тяга которого равна 20 мН, удельный импульс  $I = 1250$  с, то при проведении 30-витковых коррекций за САС КА потребуется суммарный импульс скорости 36,73 м/с, число включений двигателя будет равно 2820, общая продолжительность работы двигателя — 237,21 ч, общее изменение массы КА — 1,36 кг.

**Выводы.** Предложена дискретная математическая модель движения КА, управляемого двигателями малой тяги, допускающая практическое применение при проектировании полетов КА на ССО. Разработан численный алгоритм расчета корректирующих импульсов для поддержания ССО, базирующийся на методах решения задач линейного программирования с ограничениями на реактивную тягу. Показано, что использование алгоритма внутренних точек в таких задачах позволяет получать последовательности корректирующих импульсов и минимизировать энергетические затраты на коррекцию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чернов А.А., Чернявский Г.М. Орбиты спутников дистанционного зондирования Земли: Лекции и упражнения. М.: Радио и связь, 2004. 200 с.
2. Колосов Г.Е., Ван Лицзе. Коррекция параметров полета с двигателями малой тяги // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2012. № 11. С. 27–36.
3. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения: Гарантирующий подход. М.: Наука, 1980. 360 с.

4. Назиров Р.Р., Тимохова Т.А. Оптимальная линейная коррекция эллиптических орбит // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 93–101.
5. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 2. С. 135–147.
6. Баранов А.А., Де Прадо А.Ф.Б., Разумный В.Ю., Баранов А.А. Оптимальные переходы с малой тягой между близкими околокруговыми компланарными орбитами // Космические исследования. 2011. Т. 49. № 3. С. 278–288.
7. Garulli A., Giannitrapani A., Leomanni M., Scortecchi F. Autonomous Low-Earth-Orbit Station-Keeping with Electric Propulsion // J. of Guidance Control and Dynamics. 2011. Vol. 34. No. 6. P. 1683–1693.
8. Дубровинский Я.В., Журавлев К.В., Шершнев Н.И. Баллистическое моделирование и расчет рабочих орбит перспективных космических аппаратов гидрометеорологического назначения // Вопросы электромеханики. 2005. Т. 102. С. 220–234.
9. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Бетанов В.В., Усачев В.А., Голов Н.А. Возмущенное движение низкоорбитального спутника малой массы // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2014. № 6. С. 14–20.
10. Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Microcosm Press, Hawthorne and Springer, New York. 2007. 1055 p.
11. Chobotov V.A. Orbital Mechanics. AIAA education series, 3rd edition. 2002. 455 p.
12. Ulybyshev Y. Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming // J. of guidance, control, and dynamics. 2007. Vol. 30. No. 2. P. 427–436. DOI:10.2514/1.22642
13. Wright S.J. Primal-dual interior-point methods. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia. 1997. 289 p.
14. Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., Aikin A.C. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues // J. Geophysical research. 2002. Vol. 107. No. 12A. P. 1468–1483.
15. Standish E.M. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405. Technical report JPL IOM 312.F-98-048, NASA-Jet Propulsion Laboratory. 1998. 18 p.

## REFERENCES

- [1] Chernov A.A., Chernyavskiy G.M. Orbity sputnikov distancionnogo zondirovaniya Zemli. Lektsii i uprazhneniya [Orbit of remote sensing satellites. Lectures and exercises]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 2004. 200 p.
2. Kolosov G.E., Van Lijje. Correction of flight parameters with low thrusters. *Polet. Obshcherossiyskiy nauchno-tekhnich. Zhurnal* [Scientific and technical journal "Polyot" ("Flight")], 2012, no. 11, pp. 27–36 (in Russ.).
- [3] Bakhshiyani B.Ts., Nazirov R.R., El'yasberg P.E. Opredelenie i korektsiya dvizheniya: garantiruyushchiy podkhod [Determination and correction of motion: guaranteed approach]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 360 p.
- [4] Nazirov R.R., Timohova T.A. Optimal linear correction of the elliptical orbits. *Avtomatika i telemehaniika* [Automation and Remote Control], 1993, no. 3, pp. 93–101 (in Russ.).
- [5] Ulybyshev Yu.P. Optimization of multi-mode rendezvous trajectories with constraints. *Kosmicheskije issledovaniya* [Cosmic Research], 2008, vol. 46, no. 2, pp. 135–147 (in Russ.).
- [6] Baranov A.A., De Prado A.F.B., Razumny V.Yu., Baranov An.A. Optimal low-thrust transfers between close near-circular coplanar orbits. *Kosmicheskije issledovaniya* [Cosmic Research], 2011, vol. 49, no. 3, pp. 278–288 (in Russ.).
- [7] Garulli A., Giannitrapani A., Leomanni M., Scortecchi F. Autonomous low-earth-orbit station-keeping with electric propulsion. *J. of guidance control and dynamics*, 2011, vol. 34, no. 6, pp. 1683–1693.

- [8] Dubrovinskiy Ya.V., Zhuravlev K.V., Shershneva N.I. Ballistic modeling and calculation of operating orbits of advanced hydrometeorological spacecraft. *Voprosy elektromekhaniki*. [Electromechanical problems], 2005, vol. 102, pp. 220–234 (in Russ.).
- [9] Kazakovtsev V.P., Koryanov V.V., Betanov V.V., Usachev V.A., Golov N.A. Disturbed motion of low-orbiting small mass satellite. *Polet. Obshcherossiyskiy nauchno-tekhnich. Zhurnal* [Scientific and technical journal “Polyot” (“Flight”)], 2014, no. 6, pp. 14–20 (in Russ.).
- [10] Vallado D.A. Fundamentals of astrodynamics and applications. Microcosm Press, Hawthorne and Springer, New York. 2007. 1055 p.
- [11] Chobotov V.A. Orbital Mechanics. *AIAA education series*, 3rd edition, 2002. 455 p.
- [12] Ulybyshev Y. Continuous thrust orbit transfer optimization using large-scale linear programming. *J. of guidance, control, and dynamics*, 2007, vol. 30, no. 2, pp. 427–436. doi:10.2514/1.22642
- [13] Wright S.J. Primal-dual interior-point methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia. 1997. 289 p.
- [14] Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., Aikin A.C. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues. *J. Geophysical research*, 2002, vol. 107, no. 12A, pp. 1468–1483.
- [15] Standish E.M. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405/LE405. *JPL interoffice memorandum* IOM 312. F-98-048. 1998.

Статья поступила в редакцию 13.05.2014

Ван Лицзе — аспирант кафедры “Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области управления движением космических аппаратов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Wang Lijie — post-graduate of “Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecrafts” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of spacecraft orbit control.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Баранов Андрей Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области механики космического полета.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Baranov A.A. — Cand. Sci. (Phys.- Math.), assoc. professor of “Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecrafts” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of space flight mechanics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.