

Е. М. Т р е т ь я к о в

**МЕХАНИКА ПЛАСТИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ
КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ТВЕРДЫХ
ТЕЛ С ПОВЕРХНОСТНЫМ УПРОЧНЕННЫМ
СЛОЕМ**

Определены предельные контактные нагрузки при деформировании твердых тел. Приведено полное решение плоской задачи о вдавлении плоского жесткого пуансона в идеально-пластическую полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем. Данные экспериментального исследования несущей способности поверхностного упрочненного слоя подтверждают теоретические выводы.

E-mail: tretyakov_m58@ mail.ru

Ключевые слова: механика, твердое тело, пластичность, плоская деформация, упрочнение, поверхностный слой, предельные напряжения, контактная прочность.

В целях повышения прочности и износостойкости машиностроительных деталей и узлов в машиностроении повсеместно используются различные методы их поверхностного упрочнения, например: закалка и различные виды термической обработки деталей, их цементация, азотирование, различные способы плазменной и лазерной обработки поверхностей, разные методы нанесения и напыления высокопрочных и износостойких поверхностных слоев. В результате этого на поверхностях деталей и машиностроительных узлов создается поверхностный слой, более прочный и износостойкий по сравнению с материалом основного тела детали.

Весьма важно уметь достаточно точно определять, какие контактные нагрузки может выдержать такая деталь после создания на ее поверхности упрочненного слоя. Ответ на этот вопрос, являющийся целью настоящей работы, имеет первостепенное значение для правильного выбора режимов работы машины и ее узлов. Для различных практических приложений определение предельных контактных нагрузок для нагруженных деталей и узлов имеет фундаментальное значение.

Внешние нагрузки, близкие к предельным, достигаются при сравнительно малых пластических деформациях тела, близких к упругим. Значения предельных контактных нагрузок определяются фактически моментом начала свободного развития пластических деформаций в деформируемом теле. Поэтому для определения предельных контактных нагрузок широко используется схема жесткого идеально-пластического материала.

В прямоугольной декартовой системе xOy для плоской деформации такого тела решаем систему двух дифференциальных уравнений равновесия [1]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

при условии пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (2)$$

Поле скоростей $\bar{v} = (v_x, v_y)$ материальных частиц деформируемой полосы должно удовлетворять условию несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

и уравнению соосности девиаторов напряжений и скоростей деформаций, вытекающему из теории пластического течения Прандтля,

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Согласно условию пластичности Губера–Мизеса в формуле (2) пластическая постоянная $k = \sigma_s/\sqrt{3}$, а согласно условию текучести Треска–Сен-Венана — $k = \sigma_s/2$, где σ_s — предел текучести деформируемого тела.

Таким образом, для плоской деформации жесткого идеально-пластического тела имеем систему (1)–(4) четырех дифференциальных и одного алгебраического уравнений с пятью неизвестными: тремя компонентами напряжений (σ_x , σ_y и τ_{xy}) и двумя координатами скоростей (v_x и v_y). Известно, что уравнения (1)–(4) приводятся к системе квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа. Эта система имеет два семейства вещественных взаимно ортогональных характеристик, являющихся линиями скольжения в деформируемом теле, которые при плоской деформации совпадают с траекториями $\tau_{\max} = k$, т.е. с линиями скольжения [1].

Вдоль линий скольжения имеют место характеристические соотношения [1]:

$$d\sigma/d\varphi = \pm 2k, \quad (5)$$

где $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ — среднее напряжение в рассматриваемой точке, φ — угол наклона касательной к α -линии скольжения, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки. Знак плюс в формуле (5) относится к α -линии скольжения, а знак минус — к β -линии скольжения [1].

В качестве основной (базовой) задачи рассматривалось вдавливание плоского жесткого пуансона шириной B в пластическую полуплоскость, на поверхности которой имеется упрочненный слой тол-

щиной H . Предел текучести на сдвиг поверхностного упрочненного слоя равен k_1 , и он отличен от значения k основного материала детали, причем $k_1 > k$ (рис. 1, *a*). В этом случае условие пластичности (2) записывается дважды: для поверхностного упрочненного слоя, в котором $\tau_{\max} = k_1$, и для основной массы тела, отвечающей значению пластической постоянной $\tau_{\max} = k$.

Рассматриваемый случай полностью определяется заданием четырех размерных параметров: k, k_1, H и B , или двух безразмерных параметров: k/k_1 и H/B , являющихся критериями подобия рассматриваемой задачи. В зависимости от значений параметров процесса k/k_1 и H/B пластическая область может возникать либо в одном поверхностном упрочненном слое, либо одновременно в поверхностном слое

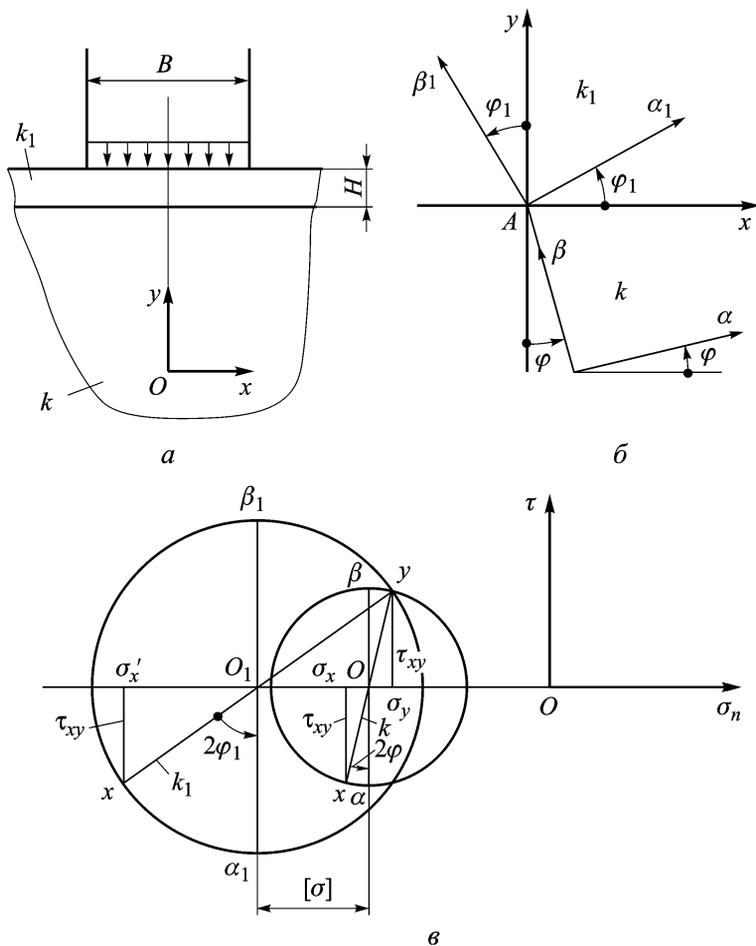


Рис. 1. Схемы, используемые при решении плоской задачи о вдавливании плоского жесткого пуансона в пластически неоднородную полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем ($k_1 \geq k$):

a – основная схема для постановки решаемой задачи; *б* – линии скольжения в точке A , принадлежащей границе раздела сред; *в* – круги Мора для точки, лежащей на границе раздела сред

и в более мягкой подложке. Как показано в работе [2], для двухкомпонентной среды с $k_1 > k$ и с линией раздела сред, параллельной оси Ox , решения теории пластичности сопровождаются разрывами нормальных напряжений σ_x на указанной линии. Значение разрыва зависит от напряженного состояния в рассматриваемой точке.

Значение разрыва $[\sigma]$ среднего напряжения $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ необходимо учитывать при пересечении линией скольжения границы раздела сред. С учетом этого замечания разностная форма характеристических уравнений (5) принимает вид [2]

$$\Delta\sigma = \pm 2k\Delta\varphi \pm [\sigma], \quad (6)$$

где верхний знак (плюс) у первого члена в правой части относится, как отмечалось ранее, к α -линии скольжения, а нижний знак (минус) — к β -линии.

Знак у разрыва среднего напряжения $[\sigma]$ зависит от направления пересечения линией скольжения границы раздела сред и определяется происходящим при этом увеличением или уменьшением величины σ . В рассматриваемой задаче у свободной поверхности, примыкающей к контактной, при переходе от более прочного поверхностного слоя с $\tau_{\max} = k_1$ к более мягкой подложке с $\tau_{\max} = k$ алгебраическое значение среднего напряжения σ возрастает, а модуль $|\sigma|$ уменьшается, т.е. $\sigma < 0$, а $\Delta\sigma > 0$ [2].

Определим значение разрыва $[\sigma]$ в общем случае, когда на границе раздела сред имеется касательное напряжение $\tau_{xy} \neq 0$ (рис. 1). Вследствие непрерывности касательных напряжений τ_{xy} на линии раздела сред получаем, что $|\tau_{xy}| \leq k < k_1$. На границе раздела сред, совпадающей с осью Ox , статические условия требуют непрерывности напряжений σ_y и τ_{xy} . Для точки A , лежащей на линии раздела сред, этому условию отвечает общая точка кругов Мора с радиусами k_1 и k (рис. 1, б, в). Значения углов φ_1 и φ , образуемых α -линиями скольжения с осью Ox в области поверхностного слоя и более мягкой подложки, при $\tau_{xy} \neq 0$ оказываются разными. Из рис. 1, б следуют соотношения

$$\varphi = 0,5 \arccos(\tau_{xy}/k); \quad \varphi_1 = 0,5 \arccos(\tau_{xy}/k_1), \quad (7)$$

где $k_1 > k$ и, следовательно, $\varphi_1 > \varphi$.

Этому условию отвечают направления линий скольжения α и α_1 в рассматриваемой точке A границы раздела сред (см. рис. 1, б). Таким образом, при $|\tau| = |\tau_{xy}| \neq 0$ удовлетворение статическим условиям приводит к скачкообразному изменению направлений линий скольжения семейств α и β на границе раздела сред. При отсутствии касательных напряжений на указанной границе, т.е. при $|\tau| = |\tau_{xy}| = 0$, из формул (7) получаем, что в этом случае на этой границе $\varphi = \varphi_1 = \pi/4$.

Значение разрыва гидростатического давления (среднего напряжения σ) в точке A , лежащей на границе раздела сред, определяется по формуле [2]

$$[\sigma] = k_1 \sin 2\varphi_1 - k \sin 2\varphi, \quad (8)$$

следующей из кругов Мора, показанных на рис. 1, в.

Из формул (7) и (8) следует, что значение разрыва среднего напряжения $[\sigma]$ на границе раздела сред с разными значениями пределов текучести σ_s (или значений k) зависит от напряженного состояния в рассматриваемой точке. При $\varphi = \varphi_1 = \pi/4$, т.е. при $|\tau| = |\tau_{xy}| = 0$, из формулы (8) получаем $|\sigma|_{\min} = (k_1 - k)$, а при $|\tau| = |\tau_{xy}|_{\max} = k$ из кругов Мора (см. рис. 1, в) находим $|\sigma|_{\max} = \sqrt{k_1^2 - k^2}$.

На границе раздела сред напряжения σ_x так же, как и среднее напряжение σ , терпят разрыв. Это видно из кругов Мора (см. рис. 1, в), с помощью которых получаем следующее соотношение [2]:

$$[\sigma_x] = (\sigma'_x - \sigma_x) = [\sigma] + k_1 \sin 2\varphi_1 - k \sin 2\varphi = 2[\sigma]. \quad (9)$$

Учитывая непрерывность σ_y , отметим, что полученное соотношение (9) для разрывов ($[\sigma_x] = 2[\sigma]$) следует непосредственно из формулы $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$, определяющей среднее напряжение σ при плоской деформации жесткопластического тела.

Перейдем теперь к решению весьма важной задачи теории пластичности: вдавливание плоского жесткого пуансона в пластическую полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем. Аналогичная задача в упрощенной постановке — задача о вдавливании плоского пуансона в пластически однородную полуплоскость относится к важнейшим и наиболее востребованным решениям теории пластичности. Решения указанной задачи приводятся буквально во всех учебниках и монографиях по теории пластичности. В них приводятся два решения указанной задачи: решение Л. Прандтля и решение Р. Хилла [1]. Оба решения отвечают одним и тем же нормальным предельным контактным напряжениям (средним контактными давлениями)

$$p_c = 2k(1 + \pi/2) = 2,57 \cdot 2k, \quad (10)$$

но в них разные размеры пластической области и разная кинематика процесса.

Оба указанных решения являются полными и точными решениями теории пластичности, удовлетворяющими всем уравнениям плоской деформации идеально-пластического тела. В решении Прандтля у плоского основания вдавливаемого пуансона имеется жесткая область в деформируемом теле, которая движется вместе с вдавливаемым пуансоном. Эта область играет роль жесткого наконечника у вдавливаемого индентора. Во втором решении (решении Хилла) две пластические области примыкают к двум угловым точкам вдавливаемого пуан-

сона и процесс вдавливания сопровождается их проскальзыванием по контактной поверхности пуансона.

До недавнего времени указанное положение трактовалось как одновременное существование двух разных решений одной и той же задачи теории пластичности. Это объяснялось неоднозначностью решений, якобы органически присущей жесткой идеально-пластической модели, использованной в решениях Прандтля и Хилла. Такая точка зрения излагается в различных монографиях и учебниках. Однако специальное исследование, проведенное в работе [3], доказало, что дело обстоит иначе.

Оказалось, что решения Прандтля и Хилла относятся к двум разным этапам процесса вдавливания плоского пуансона, следующим друг за другом. Начальный этап связан с возникновением пластических областей у углов вдавливаемого пуансона, и по мере увеличения внешней нагрузки постепенным распространением их к оси симметрии пуансона. В этой стадии вдавливаемый пуансон еще неподвижен, так как он покоится на оставшейся упругой (жесткой) части контактной области. При достижении контактной нагрузкой предельного значения, определяемого формулой Прандтля (10), пластические области, распространяющиеся от углов пуансона, достигают его оси симметрии. Именно этому предельному состоянию конца начального этапа деформирования полуплоскости отвечает решение Хилла [3]. В этот момент весь металл под подошвой плоского пуансона находится в пластическом состоянии и только с этого момента может начинаться вдавливание пуансона в деформируемую полуплоскость.

В работе [3] доказано, что для самого процесса вдавливания пуансона в полуплоскость решение Хилла оказывается неустойчивым по Ляпунову решением. Поэтому движение пуансона, т.е. сам процесс вдавливания, происходит в соответствии с устойчивым в этом случае решением Прандтля, которому и отвечают все экспериментально полученные поля линий скольжения для вдавливаемого пуансона. Таким образом, поля линий скольжения Прандтля и Хилла и предельная контактная нагрузка (10), относящаяся к ним, отвечают моменту начала собственно процесса вдавливания плоского пуансона и моменту смены двух указанных решений [3].

Для решения рассматриваемой фундаментальной задачи используется метод характеристик, т.е. метод построения полей линий скольжения при плоской деформации жесткого идеально-пластического тела с разными значениями пределов текучести поверхностного упрочненного слоя k_1 и более мягкой подложки k ($k_1 > k$). Результаты проведенного в работе [3] исследования указывают на определяющее значение классического решения Прандтля рассматриваемой задачи и в случае деформирования пластически неоднородной полуплоскости с поверхностным упрочненным слоем.

Как для пластически однородной среды, так и для рассматриваемой задачи имеем одни и те же дифференциальные уравнения (1)–(4) в каждой из сред со своим значением пластической постоянной k_1 или k в каждой из них. Эти системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных, как указывалось ранее, имеют два семейства взаимно ортогональных характеристик, совпадающих в физической плоскости с линиями скольжения семейств α_1, β_1 или α, β в зависимости от рассматриваемой среды. Как отмечалось ранее, на границе раздела сред, параллельной оси Ox , терпят разрыв нормальное напряжение σ_x и среднее напряжение σ . Значения разрывов $[\sigma_x]$ и $[\sigma]$ определяются по формулам (8) и (9).

Вдоль линий скольжения α и β выполняются характеристические соотношения (5) и (6) для напряжений. Эти же линии скольжения являются характеристиками и для поля скоростей [1]. Если вектор скорости v разложить по направлениям характеристических линий α и β , определив его координатами v_α и v_β в криволинейной координатной системе $\alpha O \beta$, то вдоль линий скольжения выполняются дифференциальные характеристические соотношения Гейрингер [1, 4]

$$\begin{aligned} \frac{dv_\alpha}{d\varphi} &= +v_\beta \quad (\text{вдоль } \alpha\text{-линий}); \\ \frac{dv_\beta}{d\varphi} &= -v_\alpha \quad (\text{вдоль } \beta\text{-линий}). \end{aligned} \quad (11)$$

Задача о вдавливании плоского пуансона в пластическую полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем ставится следующим образом. На поверхности полуплоскости имеется упрочненный слой толщиной H с пределом текучести на сдвиг $k_1 > k$, где k — предел текучести на сдвиг у подложки. Длину нагруженной контактной области обозначим B (рис. 1, *a*). Задача о вдавливании пуансона со скоростью v полностью определится заданием четырех размерных параметров H, B, k и k_1 . Этот набор размерных параметров можно заменить на два безразмерных параметра: H/B и k/k_1 , являющихся критериями подобия рассматриваемого процесса. Диапазон их изменения в рассматриваемой задаче следующий: $0 \leq H/B \leq 0,5$, $0 \leq k/k_1 \leq 1$. При такой постановке задачи реализуется случай разрывной неоднородности деформируемой пластической среды.

Поле линий скольжений для рассматриваемой задачи показано на рис. 2, *a*. При $\tau_{xy} = 0$ из формулы (7) получаем $\varphi_1 = \varphi = \pi/4$, поэтому в таких областях на границе раздела сред отсутствует излом линий скольжения. Под пуансоном пластическая область (как и в решении Прандтля для однородной среды) имеет вид прямоугольного равнобедренного треугольника bag , как и у свободных границ — в виде треугольника aqf . Точка a в углу пуансона — особая, и в ее окрестности

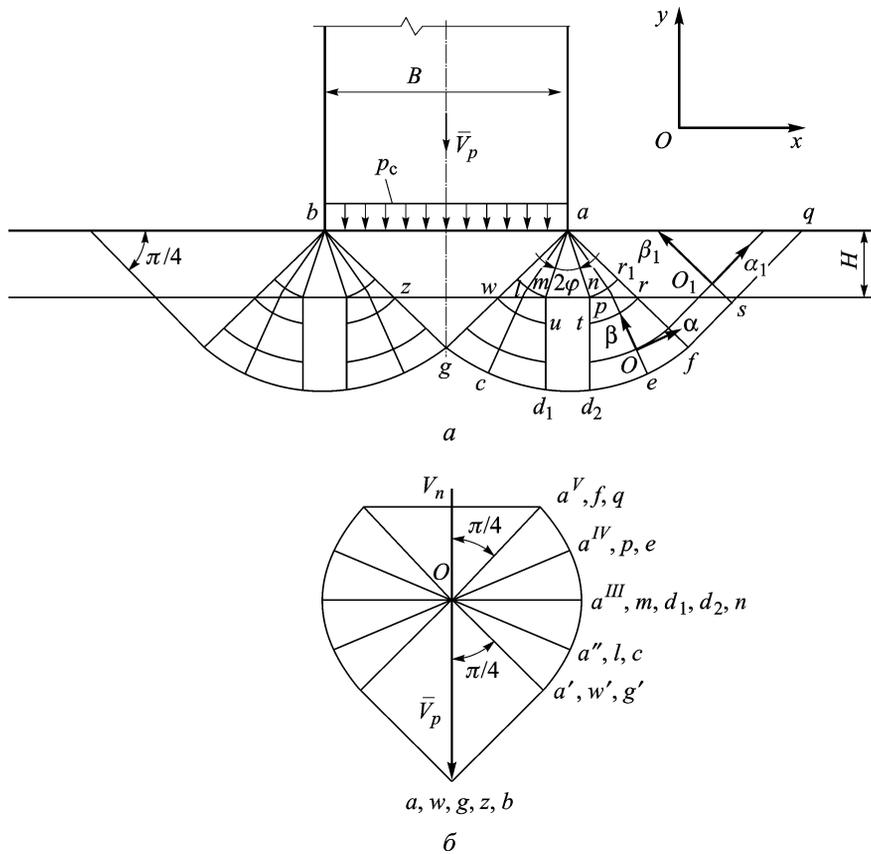


Рис. 2. Поле линий скольжения и голограф скоростей при вдавливании плоского пуансона в пластически неоднородную полуплоскость ($k_1 > k$): а – поле линий скольжения ($0 \leq H/B \leq 0,5$); б – голограф скоростей

β -линии образуют веер (рис. 2, а). Соответственно в областях atw и arn упрочненной полосы α -линии оказываются дугами окружностей с центром в особой точке a .

Введем следующие обозначения линий скольжения для рассматриваемых сред: α, β и угол φ – для мягкой подложки, α_1, β_1 и угол φ_1 – для упрочненного слоя. При $k_1 \geq k$ модуль угла $|\varphi_1| \geq |\varphi|$. Линии скольжения семейств α, β и α_1, β_1 показаны на рис. 2, а. Рассмотрим продолжение поля линий скольжения за границу раздела сред. На границе раздела сред углы φ и φ_1 связаны между собой соотношениями (7), которые можно записать в виде

$$k \cos 2\varphi = k_1 \cos 2\varphi_1 = \tau_{xy}, \quad (12)$$

где k и k_1 (или отношение k/k_1) известны.

Веер из линий скольжения β_1 в областях awt и anr с вершиной в точке a определяет углы φ_1 на границе раздела сред. Для заданного φ_1 и известного отношения k/k_1 из формулы (12) определяются углы φ , т.е. направления линий α и β в подложке. Отметим, что семей-

ство β -линий в подложке — прямолинейно, а на границе раздела сред происходит излом линий скольжения (см. рис. 2, а).

На участках d_1ma и d_2na в точках m и n границы раздела сред (см. рис. 2, а) $\tau_{xy} = k$ и, следовательно, $\varphi = 0$. Предельное значение угла $\varphi_1 = \pm\psi$ получаем, приняв в формуле (7) напряжение $\tau_{xy} = k$:

$$\psi = 0,5 \arccos(k/k_1), \quad (13)$$

где ψ — предельное значение угла φ_1 в области $awra$ упрочненного слоя. Угол φ_1 в указанной области изменяется в интервале $-\pi/4 \leq \varphi_1 \leq -\psi$ или $\psi \leq \varphi_1 \leq \pi/4$.

Предельным значениям $\varphi_1 = \pm\psi$ и $\tau_{xy} = k$ на границе раздела сред отвечают предельные положения линий β_1 и β в виде ломаных amd_1 и and_2 . Они выделяют жесткую область amd_1d_2na в виде “домика” внутри пластической области agd_1d_2fa . Продолжение линий скольжения в указанную область невозможно, так как это вызывает нарушение статического условия $|\tau_{xy}| < k$. Угол $\angle man$ при вершине a этой области равен 2ψ .

Из формулы (13) следует, что при $k = k_1$, $\psi = 0$, т.е. для однородной полуплоскости область amd_1d_2na вырождается в прямую вертикальную линию β , при этом поле линий скольжения (см. рис. 2, а) непрерывным образом переходит в поле классического решения Прандтля для однородной среды. Аналогичный случай получается при неограниченном уменьшении толщины упрочненного слоя H , т.е. при $H \rightarrow 0$. В этом случае указанная жесткая область amd_1d_2na также вырождается в вертикальную β -линию решения Прандтля. В другом предельном случае при $k = 0$ из формулы (13) получаем $|\psi| = \pi/4$, $2\psi = \pi/2$, т.е. в этом случае жесткий участок занимает всю область $awra$. Подробно указанные предельные случаи рассмотрены в работах [5, 6].

В общем случае семейство α -линий в мягкой подложке образуются криволинейными линиями, ортогональными к прямым линиям β . Эти линии в подложке уже не являются дугами окружностей, как это было в области awr поверхностного упрочненного слоя. В подложке β -линии образуют однопараметрическое семейство кривых, параметром которых служит угол φ_1 . Огибающая этого однопараметрического семейства является геометрическим местом центров кривизны α -линий, т.е. является их эволютой. В подложке α -линии можно получить как траектории точек нерастяжимой нити при ее разматывании с эволюты. Таким образом, α -линии в подложке являются эвольвентами.

Построенная таким образом сетка линий скольжения в подложке (области wmd_1g и $nrf d_2$, см. рис. 2) отвечает всем требованиям, предъявляемым к полям линий скольжения. В частности, прямые отрезки β -линий, отсекаемые двумя разными α -линиями, по своему постро-

ению имеют одинаковую длину. При использовании характеристических соотношений для расчета напряжений рассматриваемое поле линий скольжения автоматически удовлетворяет статическим условиям, т.е. условиям равновесия и условию пластичности. Согласно экстремальным принципам теории пластичности это обеспечивает, по меньшей мере, получение нижней оценки величины предельной контактной нагрузки [1].

В работе [4] приведен подробный анализ напряжений и их разрывов для поля линий скольжения, показанного на рис. 2, *а*. На рис. 2, *б* приведен годограф скоростей для рассматриваемой задачи. Доказано, что поле линий скольжения (см. рис. 2, *а*) удовлетворяет кинематическим условиям задачи, поле скоростей в нем непрерывно, а скорости ломаных линий β — постоянны [4]. Отметим, что годограф скоростей для пластически неоднородной среды (см. рис. 2, *б*) совпадает с годографом скоростей решения Прандтля для однородной среды (при $k_1 = k$). Однако при $k_1 \neq k$ указанный годограф определяет поле скоростей в физической плоскости, отличное от решения Прандтля.

В полученном решении, как следует из годографа скоростей (см. рис. 2, *б*), ломаные β -линии совершают мгновенное поступательное движение. Когда $k_1 \rightarrow k$, ломаные линии β выпрямляются и в пределе становятся прямыми β -линиями решения Прандтля, а условие постоянства их скоростей сохраняется [4]. С помощью годографа скоростей (см. рис. 2, *б*) было определено мгновенное направление скоростей материальных точек в рассматриваемой задаче. Из годографа следует, что жесткая область amd_1d_2na движется в горизонтальном направлении как одно целое со скоростью, параллельной горизонтальному направлению ее основания d_1d_2 (см. рис. 2, *а*, *б*).

В работе [4] доказано, что поле линий скольжения (см. рис. 2) удовлетворяет не только статическим, но и кинематическим условиям задачи. При этом верхняя и нижняя оценки предельных контактных нагрузок совпадают и поле линий скольжения дает истинное (или фактическое) значение предельных контактных нагрузок в рассматриваемой задаче. Доказано также, что рассматриваемое поле линий скольжения удовлетворяет дополнительно следующим двум условиям: требованию неотрицательности диссипации энергии пластической деформации во всех точках пластической области и условию существования жестких областей внутри пластической области. Это означает, что поле линий скольжения является точным и полным решением плоской задачи теории пластичности, которое определяет точные теоретические значения предельных контактных нагрузок [4–6].

Описание методики определения предельных контактных нагрузок $p_c/2k_1$ для поля (см. рис. 2) и вычисление их значений приведено в работах [5, 6]. Принципиальная сложность расчета предельных нагрузок

$p_c/2k_1$ в рассматриваемой задаче связана с тем, что пластические области под пуансоном и у свободных границ оказываются отделенными друг от друга двумя жесткими областями amd_1d_2na . Это не позволяет вычислить предельные контактные давления под пуансоном непосредственно с помощью характеристических соотношений, как это делается в решении Прандтля для пластически однородной среды, так как эти соотношения не действуют в жестких областях.

В рассматриваемом случае для расчета величин $p_c/2k_1$ нужно с помощью характеристических соотношений (6) рассчитать нормальные напряжения σ с обеих сторон жестких областей, т.е. определить их значения на сторонах amd_1 и and_2 (см. рис. 2). Отметим, что значения средних давлений в области $aqsr$ составляют $\sigma = -k_1$, а в области rsf $\sigma = -k$. В упрочненной области $bawz$ под пуансоном $\sigma = -p_c + k_1$, а в области zwg подложки под пуансоном $\sigma = -p_c + k$ [4, 5]. После определения значений σ на границах жесткой области amd_1d_2na условие равновесия этой области дает дополнительное уравнение для определения $p_c/2k_1$. Именно такой метод определения предельных давлений $p_c/2k_1$ был применен в рассматриваемой задаче [5, 6].

В табл. 1 приведены рассчитанные таким образом значения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$. В работе [6] подробно описан метод, использованный для расчета значений $p_c/2k_1$. Там же для диапазонов $0 \leq H/B \leq 0,5$ и $0 \leq k/k_1 \leq 1$ приведены графики зависимостей $p_c/2k_1$ от отношения H/B .

Таблица 1

Значения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$

k/k_1	$H/B = 0$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,0	0,300	0,641	1,029	1,478	2,0
0,05	0,128	0,416	0,740	1,107	1,526	2,007
0,1	0,257	0,537	0,847	1,192	1,580	2,015
0,2	0,514	0,769	1,046	1,349	1,680	2,044
0,3	0,771	1,0	1,245	1,507	1,788	2,092
0,4	1,028	1,228	1,438	1,661	1,897	2,147
0,5	1,285	1,455	1,632	1,816	2,009	2,211
0,6	1,542	1,679	1,820	1,966	2,116	2,272
0,7	1,800	1,903	2,009	2,117	2,228	2,342
0,8	2,057	2,125	2,195	2,266	2,339	2,412
0,9	2,314	2,349	2,384	2,420	2,456	2,493
1,0	2,571	2,571	2,571	2,571	2,571	2,571
k/k_1	$B/H = \infty$	10,0	5,0	3,33	2,5	2,0

Отметим, что в случае $k/k_1 = 1$ имеем однородную полуплоскость, отвечающую классическому решению Прандтля, в котором предель-

ные контактные напряжения определяются по формуле Прандтля (10) при $k = k_1$. Случай $H/B = 0$, т.е. $H = 0$, отвечает решению Прандтля с значениями k , выраженными в долях значения k_1 поверхностного упрочненного слоя. В этом можно убедиться, обратившись к значениям $p_c/2k_1$ при $H/B = 0$, приведенным в первом столбце табл. 1, которые составляют соответствующие доли значений предельных контактных напряжений, определяемых по формуле Прандтля (10) при $k = k_1$.

В работе [7] доказано, что при $H/B \geq 1,579$, т.е. при достаточно большой толщине поверхностного упрочненного слоя, деформируемая полуплоскость ведет себя как однородная с $\tau_{\max} = k_1$. В этом случае на предельные контактные напряжения $p_c/2k_1$ не влияет наличие более мягкой, но достаточно глубоко расположенной от контакта, подложки. Поле линий скольжения в этом случае будет таким же, как и в классическом решении Прандтля для однородной полуплоскости (рис. 3, а). При уменьшении отношения H/B наступает момент, когда пластическая область под пуансоном проникает через толщину поверхностного слоя и выходит на границу раздела сред.

Наступление этого момента зависит не только от отношения H/B , но и от значения отношения k/k_1 [7]. В этом случае более мягкая подложка играет роль своеобразной твердой смазки, по поверхности кото-

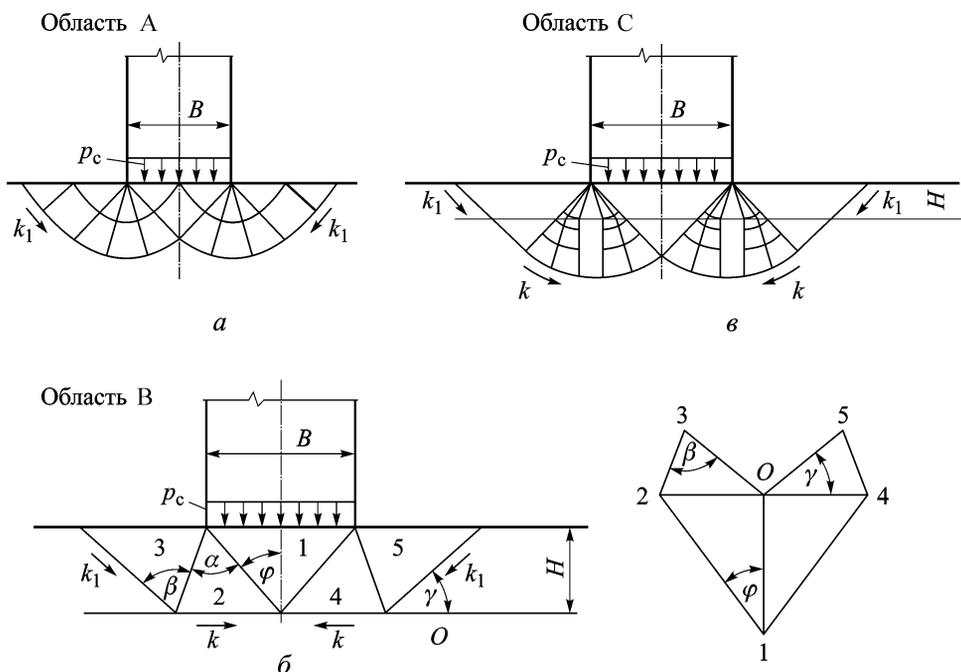


Рис. 3. Поля линий скольжения, используемые при решении задачи о вдавливании плоского пуансона в пластически неоднородную полуплоскость:

a – поля линий скольжения классического решения Прандтля; *б* – кинематическое поле линий скольжения с годографом скоростей (для $H/B > 0,5$); *в* – поле линий скольжения при $0 \leq H/B \leq 0,5$

рой будут скользить частицы поверхностного слоя. При дальнейшем уменьшении толщины упрочненного слоя H пластическая область проникает в более мягкую подложку, тогда возникает рассмотренный выше случай (рис. 3, б), для которого получено полное решение задачи.

Для существования пластической области в одном поверхностном слое точное решение задачи пока не удалось получить. Поэтому значение предельных нагрузок $p_c/2k_1$ было определено энергетическим методом, опирающимся на экстремальные принципы, с использованием численных методов решения оптимизационных задач [7]. В основе применяемого метода лежит дискретизация деформируемой среды в виде набора жестких треугольных блоков, удовлетворяющих кинематическим условиям задачи (рис. 3, б). Диссипация работы пластической деформации происходит на границах блоков из-за наличия разрывов тангенциальных компонент скоростей. Согласно экстремальным принципам теории пластичности такие решения позволяют получить верхнюю оценку контактных нагрузок, вызывающих начало пластического течения [1].

Пластическая область была представлена пятью треугольными блоками 1–5 (см. рис. 3, б). Неподвижная область, лежащая за их пределами, обозначена цифрой 0. На том же рисунке приведен годограф скоростей для рассматриваемого случая. Разрывы скоростей на границах указанных блоков 1–5 и тела 0 отвечают на годографе отрезкам 1–2, 2–3, 3–0 и 0–2, т.е. соответствуют парным сочетаниям номеров блоков. Жесткий блок 1, прилегающий к поверхности контактирующего тела, движется со скоростью 0–1 при отсутствии проскальзывания по контактной поверхности этого тела (зона прилипания).

Кинематическое поле линий скольжения (см. рис. 3, б) содержит в качестве параметров задачи три угла: α , β и φ . Из рис. 3, б следует, что связанный параметр $\varphi = \arctg(B/2H)$, т.е. угол φ полностью определяется заданием толщины упрочненного слоя H/B . Укажем диапазон возможного изменения параметров H/B и φ : $0 \leq H/B < \infty$, $\pi/2 \geq \varphi > 0$. Два других угла α и β могут служить параметрами минимизации верхней оценки мощности работы пластической деформации, оптимальный выбор которых позволяет получить минимальное отклонение расчетных предельных нагрузок от их фактических значений. Из геометрических соображений получаем следующие диапазоны изменения параметров α и β : $0 \leq \alpha < \pi/2 + \varphi$ и $0 < \beta < \pi/2 - \varphi + \alpha$ [7].

Мощность диссипации энергии пластической деформации W определяется по формуле [7]

$$W = k_r \sum_i [v_\tau]_i l_i, \quad (14)$$

где l_i — длина линии разрыва тангенциальных скоростей в физической плоскости, совпадающей с соответствующей границей жесткого треугольного блока; $[v_\tau]_i$ — отвечающий указанной границе разрыв тангенциальной компоненты скорости; k_r — значение пластической постоянной материала на данной линии l_i разрыва скорости. Поверхностному упрочненному слою отвечает значение $k_r = k_1$, а основной массе тела (подложке) соответствует значение $k_r = k$. На границе раздела поверхностного слоя и подложки (см. рис. 3, б) реализуется значение $k_r = k$.

Суммирование в правой части формулы (14) распространяется на всю пластическую область. Приравняв мощность работы внешних сил к мощности работы пластической деформации, получим следующее соотношение [7]:

$$p_c/2k_1 = 1/\sin 2\varphi + k \sin \alpha / [2k_1 \cos \varphi \cos(\varphi - \alpha)] + \cos(\varphi - \alpha + \beta) / [2 \cos(\varphi - \alpha) \sin \beta] + \cos(\varphi - \alpha) / [2 \cos(\varphi - \alpha + \beta) \sin \beta], \quad (15)$$

определяющее для рассматриваемого случая зависимость предельной контактной нагрузки $p_c/2k_1$ от параметров α , β , φ и отношения пределов текучести k/k_1 .

Правая часть формулы (15) является целевой функцией решаемой задачи, которую можно записать в общей форме: $p_c/2k_1 = \Phi(\alpha, \beta, \varphi, k/k_1) = \Phi_1(\alpha, \beta, H/B, k/k_1)$. Требуется найти значения $p_c/2k_1$, отвечающие минимуму целевой функции, используя величины α и β как параметры оптимизации при фиксированных значениях H/B и k/k_1 . Диапазоны изменения указанных аргументов следующие: $0 \leq \alpha < \pi/2 + \varphi$; $0 < \beta < \pi/2 - \varphi + \alpha$ и $0 < \varphi \leq \pi/2$. Отметим, что отношения H/B и k/k_1 изменяются в диапазонах $0 \leq H/B < \infty$ и $0 \leq k/k_1 \leq 1$. Минимизация целевой функции Φ_1 приводит к нахождению минимальной верхней оценки величины предельной контактной нагрузки $p_c/2k_1$ [7].

Указанные условия определяют типичную оптимизационную задачу для заданной области изменения ее переменных. Для нахождения минимума целевой функции формулы (15) в работе [7] был применен численный метод покоординатного спуска при циклическом переборе координатных векторов (ортов), по направлению которых отыскивались последовательно относительные минимумы в соответствующих сечениях целевой функции. Определенный таким образом относительный минимум служил начальной точкой для продолжения дальнейшего поиска минимума в направлении следующего орта. Для этого была разработана для ЭВМ специальная программа, с использованием которой были определены предельные контактные давления $p_c/2k_1$, приведенные в табл. 2 [7].

Точность проведенного расчета обеспечивала получение четырех верных знаков у получаемых расчетом верхних значений предельных контактных нагрузок $p_c/2k_1$. Полученные таким образом значения $p_c/2k_1$ уточнялись посредством дополнительной корректирующей функции, использующей имеющиеся точные значения предельных контактных давлений. Относительную погрешность значений $p_c/2k_1$ удалось снизить до $\pm 1\%$ [7]. В табл. 2 приведены скорректированные описанным образом значения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$.

На рис. 3 показаны три рассмотренных случая возможного расположения пластической области при вдавливании плоского пуансона в полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем. На рис. 3, *a* изображен случай относительно большой толщины H/B упрочненного слоя. При этом вся пластическая область располагается в поверхностном упрочненном слое — реализуется классическое решение Прандтля со значениями $p_c/2k_1$, определяемыми по формуле (10). На рис. 3, *б* изображен случай, относящийся к меньшему значению отношения H/B , когда пластическая область в поверхностном слое выходит на линию раздела сред. Здесь для нахождения предельных значений $p_c/2k_1$ использовалось кинематическое поле линий скольжения со значениями $p_c/2k_1$, приведенными в табл. 2. Изображение на рис. 3, *в* отвечает, как отмечалось ранее, точному решению поля рис. 2. Предельные значения $p_c/2k_1$ для последнего случая приведены в табл. 1.

На рис. 4 показаны кривые изменения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$ от отношения H/B для $k/k_1 = 0; 0,3; 0,6; 0,9; 1,0$.

Таблица 2

Скорректированные значения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$

H/B	k/k_1											
	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98
0,5	2,000	2,076	2,148	2,217	2,284	2,348	2,410	2,469	2,527	2,583	—	—
0,6	2,013	2,082	2,148	2,211	2,271	2,328	2,384	2,437	2,488	2,538	2,562	2,576
0,7	2,044	2,109	2,170	2,228	2,284	2,337	2,387	2,436	2,483	2,528	2,549	2,562
0,8	2,087	2,148	2,206	2,261	2,313	2,362	2,410	2,455	2,498	2,539	2,560	2,571
0,9	2,138	2,196	2,251	2,303	2,352	2,399	2,444	2,486	2,527	2,566	2,585	2,596
1,0	2,194	2,250	2,303	2,353	2,400	2,444	2,487	2,527	2,566	2,602	—	—
1,1	2,253	2,308	2,359	2,407	2,453	2,496	2,536	2,575	2,612	—	—	—
1,2	2,316	2,369	2,419	2,466	2,509	2,551	2,590	—	—	—	—	—
1,3	2,381	2,433	2,481	2,527	2,570	2,610	—	—	—	—	—	—
1,4	2,448	2,499	2,546	2,590	2,632	—	—	—	—	—	—	—
1,5	2,516	2,566	2,612	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,6	2,586	2,635	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

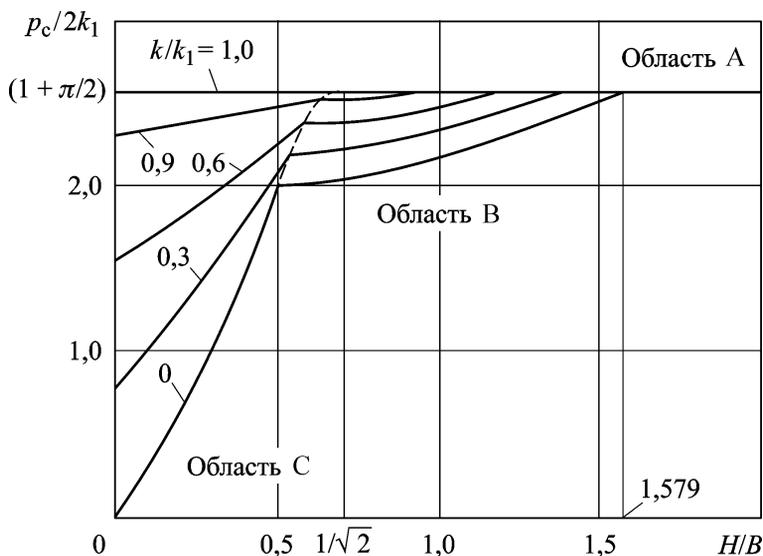


Рис. 4. Графики зависимостей предельных контактных давлений $p_c/2k_1$ от относительной толщины поверхностного упрочненного слоя H/B для разных значений отношений k_1/k_1

Горизонтальная линия $k/k_1 = 1,0$ отвечает однородной полуплоскости с $\tau_{\max} = k_1$ и решению Прандтля (10), показанному на рис. 3, а. Область В на рис. 4 отвечает значениям предельных давлений $p_c/2k_1$ для пластической области (см. рис. 3, б), приведенным в табл. 2. Видно, что последнее решение может возникать только в случае, когда $H/B < 1,579$. Область С на рис. 4 отвечает предельным значениям $p_c/2k_1$ для пластической области (см. рис. 3, в), приведенным в табл. 1.

Точное решение для области С показано на рис. 2, и оно справедливо, как указывалось ранее, для $0 \leq H/B \leq 0,5$. Поэтому зависимости $p_c/2k_1 = \Phi(H/B)$ области С приходится (для $1/\sqrt{2} = 0,707 \geq H/B \geq 0,5$) экстраполировать в область В до пересечения с соответствующими кривыми $p_c/2k_1 = \Phi_1(H/B)$ (см. рис. 4). Вследствие практически линейного характера зависимостей $p_c/2k_1 = \Phi(H/B)$ при $H/B > 0,5$ была использована линейная экстраполяция [7, 8].

Полученные таким образом точки пересечения соответствующих кривых $p_c/2k_1$ областей В и С соединены штриховой линией на рис. 4. Конечная точка этой линии, отвечающая абсциссе $H/B = 1/\sqrt{2} = 0,707$, соответствует глубине пластической области в решении Прандтля [7]. Точки пересечения горизонтальной линией $p_c/2k_1 = 1 + \pi/2$ соответствующих линий аналогичных зависимостей области В отвечают смене решения Прандтля (см. рис. 3, а) на кинематическое решение (см. рис. 3, б). Соответственно точки пересечения аналогичных линий областей С и В (см. рис. 4) определяют смену кинематического решения на точное решение. Указанные точки определяют линии смены решений, показанные на рис. 5, б в виде кривых 1 и 2

или, соответственно введенным буквенным обозначениям, кривых A_1B_1 и B_1C_1 .

В работе [8] приведены результаты вычисления координат кривых 1 и 2 (или кривых A_1B_1 и B_1C_1) и отвечающих второй кривой значений предельных контактных напряжений $p_c/2k_1$. Величина предельных напряжений $p_c/2k_1$ на кривой 1 — постоянна, так как она отвечает решению Прандтля (10) с $\tau_{\max} = k_1$. В табл. 3 приведены координаты $H/B = \psi(k/k_1)$ указанных кривых 1 и 2 и значения предельных напряжений $p_c/2k_1$ кривой 2. В табл. 3 индекс “к1” относится к кривой 1, а индекс “к2” — к кривой 2 [8]. Отметим, что, согласно вышеизложенному, ординаты кривой 1 лежат в интервале $1/\sqrt{2} = 0,707 \leq H/B \leq 1,579$, а ординаты кривой 2 — в интервале $0,5 \leq H/B \leq 1/\sqrt{2} = 0,707$ (рис. 5, б).

Таблица 3

Значения координат H/B кривых 1 и 2 и предельных давлений $p_c/2k_1$

	k/k_1						
	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$(H/B)_{к1}$	1,579	1,507	1,438	1,369	1,302	1,234	1,165
$(H/B)_{к2}$	0,50	0,513	0,526	0,538	0,551	0,564	0,577
$(p_c/2k_1)_{к2}$	2,00	2,070	2,140	2,209	2,275	2,333	2,392
	k/k_1						
	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	1,0
$(H/B)_{к1}$	1,092	1,012	0,915	0,851	0,797	0,773	0,707
$(H/B)_{к2}$	0,590	0,602	0,615	0,641	0,676	0,691	0,707
$(p_c/2k_1)_{к2}$	2,443	2,490	2,533	2,553	2,563	2,567	2,571

Кривые зависимостей $p_c/2k_1$ от H/B на рис. 4 построены по численным данным табл. 1 и 2. Область реализации каждого из решений (см. рис. 3) определяется меньшим значением предельного контактного давления $p_c/2k_1$. Кривые $p_c/2k_1 = \varphi(H/B)$ для $k/k_1 = \text{const}$ на рис. 4 являются сечениями некоторой поверхности предельных контактных напряжений $p_c/2k_1 = \psi(k/k_1, H/B)$ плоскостями $k/k_1 = \text{const}$.

В декартовой координатной системе $(k/k_1, H/B, p_c/2k_1)$ предельные напряжения $p_c/2k_1$ образуют поверхность предельных контактных напряжений, показанную на рис. 5 а в прямоугольной изометрической проекции. В области А, отвечающей значениям $H/B \geq (H/B)_{к1}$, деформируемое тело ведет себя как пластически однородная полуплоскость с $\tau_{\max} = k_1$. В области В при $H/B \leq (H/B)_{к1}$ пластическая область выходит на линию раздела поверхностного упрочненного слоя с более мягкой основой (рис. 3, б), что вызывает уменьшение значений предельных контактных напряжений $p_c/2k_1$. Еще более сильное

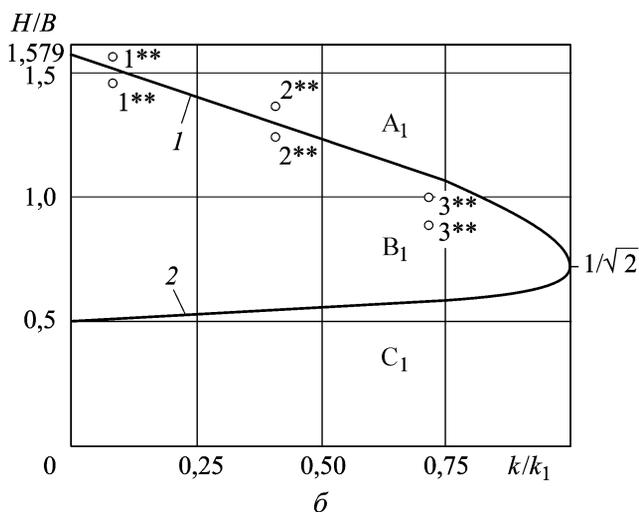
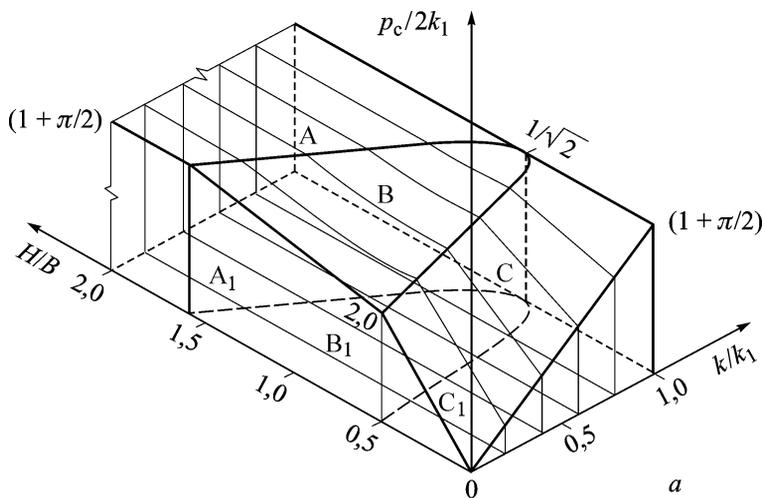


Рис. 5. Зависимость предельных контактных давлений $p_c/2k_1$ от параметров процесса вдавливания плоского пуансона H/B и k/k_1 :

a — поверхность предельных контактных давлений $p_c/2k_1$ в зависимости от параметров задачи H/B и k/k_1 ; *б* — области A_1 , B_1 и C_1 , отвечающие разному характеру деформации неоднородной полуплоскости при вдавливании в нее плоского жесткого пуансона (о — результаты экспериментов)

уменьшение значений $p_c/2k_1$ наблюдается в области C , отвечающей малым значениям $H/B \leq (H/B)_{к2}$, при которых пластическая область захватывает одновременно поверхностный упрочненный слой и более мягкую основу (см. рис. 3, *в*). Точное решение рис. 2, *а* будет реализовано при $H/B \leq 0,5$.

Пространственным линиям смены решений AB и BC (рис. 5, *а*) в плоскости параметров процесса k/k_1 и H/B отвечают их проекции A_1B_1 и B_1C_1 так же, как областям A , B и C отвечают их проекции A_1 , B_1 и C_1 (рис. 5). Отметим, что если точка с координатами $(k/k_1, H/B)$ попадает внутрь поверхности предельных контактных напряжений,

показанной на рис. 5, а, то отвечающее этой точке нагруженное тело пребывает в упругом состоянии. Выход такой изображающей точки на предельную контактную поверхность областей А, В и С отвечает началу контактной пластической деформации.

Обратимся теперь к экспериментальным результатам. В работе [9] приведены результаты экспериментального определения момента проникания пластической области на линию раздела поверхностного упрочненного слоя с более мягкой основой, т.е. в этой работе экспериментально определялись координаты кривой 1 (или A_1B_1) (см. рис. 5). Результаты экспериментального исследования приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты экспериментов

Материал покрытия и основы	k/k_1	Теоретическое значение $(H/B)_к$	Экспериментальное значение $(H/B)_к^*$	Экспериментальное значение $(H/B)_к^{**}$
Cr/Cu	0,0785	1,52	1,451	1,567
Cr/1X18H10T	0,397	1,30	1,262	1,377
Cr/VT-23	0,711	1,09	0,879	1,000

В проведенных экспериментах поверхностным упрочненным слоем служило хромовое покрытие толщиной $H_{Cr} = 17,625 \dots 30$ мкм, нанесенное на образцы методом реактивного электронно-плазменного напыления (разновидность вакуумного ионно-плазменного метода). В качестве основы использовались образцы из отожженной меди, коррозионно-стойкой аустенитной стали марки 1X18H10T и высокопрочного сплава VT-23. Толщину H_{Cr} нанесенного поверхностного слоя хрома определяли с помощью профилографа по размеру ступеньки, образующейся на поверхности образца в результате экранирования (маскирования) его части в процессе напыления.

Экспериментально определялся момент проникания пластической области на линию раздела поверхностного упрочненного слоя с более мягкой подложкой, отвечающий заметному уменьшению предельных контактных давлений $p_c/2k_1$. В качестве индентора использовалась призма Виккерса, пластическое деформирование образцов проводили на приборе ПМТ-3, предназначенном для измерения микротвердости. Полученные массивы экспериментальных точек обрабатывались на ЭВМ с применением метода наименьших квадратов.

Разработанная программа для ЭВМ осуществляла сортировку массивов экспериментальных данных и определяла для них аппроксимирующие линейные зависимости p_c от H/B . Примененный метод обработки позволил определить минимальное среднеквадратическое экспериментальное значение $(H/B)_к^*$ и максимальное аналогичное значе-

ние $(H/B)_k^{**}$, которые приведены в табл. 4 [9]. Экспериментальные данные, представленные в табл. 4, показаны на рис. 5, б.

Согласно данным табл. 4, для пары Cr/Cu теоретическое значение $(H/B)_k = 1,52$, а среднее экспериментальное значение равно 1,509, т.е. отклонение экспериментальных данных от теоретических значений составляет $\Delta = -0,73\%$. Для пары Cr/1X18H10T теоретическое значение $(H/B)_k = 1,30$, среднее экспериментальное значение равно 1,319, т.е. отклонение экспериментальных данных от теоретических значений составляет $\Delta = +1,46\%$. Третья пара Cr/VT-23 отвечает теоретическому значению $(H/B)_k = 1,09$, а соответствующее ей среднее экспериментальное значение равно 0,94, т.е. в этом случае отклонение экспериментальных данных от теоретических значений составляет $\Delta = -13,76\%$.

Последний результат объясняется неучтенным влиянием толщины h_p переходной области от поверхностного упрочненного слоя к более мягкой подложке, которая отсутствует в используемой теоретической модели [8]. Анализ указанной проблемы приведен в работах [8, 9]. В первых двух парах Cr/Cu и Cr/1X18H10T толщина переходной области h_p оказалась пренебрежимо малой и практически не оказала влияния на среднее экспериментальное значение $(H/B)_{кс}$. Иначе обстоит дело с парой Cr/VT-23, для которой неучет переходной области занижил фактическую толщину упрочненного слоя H на 13,76% и, соответственно, экспериментальные результаты по отношению к ожидаемым теоретическим.

В рассматриваемом случае переходная область толщиной h_p возникла в поверхностных слоях пары Cr/VT-23 вследствие температурной диффузии хрома при электровакуумном напылении и она увеличивала фактическую толщину упрочненного слоя H . Описание метода учета влияния h_p на значения предельных контактных давлений $p_c/2k_1$ приведено в работе [8]. Подробное описание экспериментального исследования и методики обработки полученных результатов приведено в работе [9].

Разработанная теория имеет многочисленные приложения, важные в практическом отношении. Укажем некоторые из них.

1. Полученные результаты позволяют разработать принципиально новый и весьма перспективный метод расчета контактной прочности машиностроительных деталей и узлов по предельным контактным нагрузкам [8, 10], учитывающий влияние поверхностного упрочнения деталей на их контактную прочность.

2. Результаты работы позволяют рассчитывать толщину и предел текучести поверхностного упрочненного слоя, требуемые для надежной и безопасной работы проектируемых машин, их деталей и узлов.

Определение указанных характеристик поверхностных покрытий существенно с точки зрения правильного выбора технологии их нанесения и применяемых для этого режимов.

3. Результаты настоящей работы имеют первостепенное значение для склерометрии, в частности для обоснования методов экспериментального определения твердости поверхностных покрытий. Показано, что при $H/B \geq 1,579$ отсутствует влияние на твердость нижележащих слоев, примыкающих к поверхностному упрочненному слою. При $H/B < 1,579$ такое влияние указанных слоев на твердость существует и его можно учитывать с помощью разработанной теории.

4. Изложенную теорию можно использовать для разработки экспериментальных неразрушающих методов контроля адгезии поверхностных покрытий.

Некоторые другие практически важные случаи применения изложенной теории рассмотрены в работе [7]. Разрабатываемые теоретические методы расчета контактной прочности позволяют определять значения предельных контактных напряжений в зубчатых, червячных и кулачковых механизмах, в тяжело нагруженных узлах трения при наличии на поверхностях деталей упрочненного слоя.

Методы расчета контактной прочности по предельным контактным нагрузкам позволяют для заданных параметров контактирующих нагруженных пар определять значения допускаемых контактных давлений, отвечающие требуемым значениям коэффициентов запаса. Разработанная теория позволяет определять фактические значения коэффициентов запаса контактной прочности для рассматриваемых нагруженных контактных пар применительно к условиям их практической эксплуатации [8, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гостехтеориздат, 1956. – 408 с.
2. Т р е т ь я к о в Е. М. О влиянии поверхностного упрочнения деталей машин на величину предельных контактных нагрузок // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – № 2. – С. 91–99.
3. Т р е т ь я к о в Е. М. О взаимосвязи и практической реализации классических решений Прандтля и Хилла // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2000. – № 4. – С. 37–46.
4. Т р е т ь я к о в Е. М. Полное решение задачи о вдавливании плоского жесткого пуансона в пластичную полуплоскость при наличии на ее поверхности относительно тонкого упрочненного слоя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 4. – С. 52–61.
5. Т р е т ь я к о в Е. М. Контактные нагрузки при внедрении плоского пуансона в пластичную полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 5. – С. 62–70.

6. Т р е т ь я к о в Е. М. Предельные контактные нагрузки при вдавливании плоского пуансона в пластичную полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 1. – С. 54–63.
7. Т р е т ь я к о в Е. М. Об определении предельных контактных нагрузок при наличии на поверхности детали упрочненного слоя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – № 4. – С. 49–60.
8. Т р е т ь я к о в Е. М. Предельные напряжения и контактная прочность твердых тел с поверхностным упрочненным слоем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 2. – С. 54–62.
9. Т р е т ь я к о в Е. М., С о р о к к о А. А. Экспериментальное исследование несущей способности поверхностного упрочненного слоя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 5. – С. 134–140.
10. Т р е т ь я к о в Е. М. Предельные напряжения и контактная прочность пластически однородных твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 6. – С. 34–41.

Статья поступила в редакцию 7.12.2010

Евгений Михайлович Третьяков родился в 1934 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1958 г. Д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник Института машиноведения РАН им. А.А. Благонравова. Автор 80 научных работ в области теории процессов пластического формоизменения и прочности машин.

Ye.M.Tretyakov (b. 1934), graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1958. D. Sc. (Eng), senior researcher of the Blagonravov Moscow Machine Institute of the Russian Academy of Sciences. Author of 80 publications in theory of plastic forming and strength of machines.

