УДК 539.371; 539.389.1

УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩЕЕ КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА

Б.М. Пахомов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: pahomovb@sm.bmstu.ru

Предложена схема деформирования, основанная на разделении общей жесткости материала на два механизма: один осуществляет связи между различными направлениями деформирования, другой определяет деформирование материала только в данном направлении. Получено условие начала пластического течения, включающее в себя первый инвариант тензора напряжений и коэффициент Пуассона. Удельная потенциальная энергия разделяется на две составляющие: собственную энергию и энергию связи. Доказана аддитивность энергии при таком разделении. В отличие от критериев типа критерия Шлейхера – Мизеса из предлагаемой схемы деформирования условие начала пластического течения вытекает без введения дополнительных зависимостей и при этом достаточно точно описывает наблюдаемые эффекты. Условие пластичности исследовано для некоторых видов напряженного состояния: всестороннего сжатия, одноосного растяжения, чистого сдвига и их совместного действия. Для некоторых случаев показано, что полученное условие пластичности хорошо согласуется с результатами экспериментов на металлах.

Ключевые слова: начало пластического течения, коэффициент Пуассона, теория собственных напряжений, разделение общей жесткости, первый инвариант тензора напряжений.

THE PLASTIC FLOW CONDITION INCLUDING THE POISSON'S RATIO

B.M. Pakhomov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pahomovb@sm.bmstu.ru

The scheme of deforming based on division of the general material rigidity into two components is proposed. The first component implements relations between different directions of deforming, while the second one determines the material deforming along the selected direction alone. A condition for beginning of plastic flow is obtained which includes the first invariant of the stress tensor and the Poisson's ratio. The specific potential energy is divided into two components: "own" energy and "bond" energy. The energy additivity for such division is proved. As opposed to criteria of the type of the Schleicher – Mises criterion, the condition of plastic-flow beginning follows from the proposed scheme of deforming without specifying any additional conditions and the observed effects can be described with sufficient accuracy. The condition of plasticity is investigated for certain types of stress states: uniform compression, one-axis tension, pure shear and their combined loading. For some types of loading, it is shown that test results for metals are in a good agreement with the proposed plasticity condition.

Keywords: beginning of plastic flow, Poisson's ratio, initial stress theory, rigidity division, first invariant of stress tensor.

Наиболее распространенным критерием начала пластического течения для металлов и сплавов является критерий Губера – Мизеса. Этот критерий имеет четкое энергетическое обоснование и достаточно хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными данными [1–6]. Однако при этом в экспериментах над металлами зафиксированы небольшие, но систематические отклонения от этого критерия [7–9]. Некоторые опыты показывают влияние на начало пластического течения первого инварианта тензора напряжений [10–12]. В этом случае в условие текучести обычно вводится первый инвариант, например, как в критерии Шлейхера – Мизеса, или каким-либо иным способом [13–16].

Из предлагаемой в работе схемы деформирования условие начала пластического течения вытекает без введения дополнительных зависимостей и при этом достаточно точно описывает наблюдаемые эффекты.

Запишем определяющие соотношения для линейно-упругого изотропного тела в форме, предложенной Коши [17]:

$$\sigma_{ij} = K_0 \varepsilon_{ij} + L \varepsilon \delta_{ij}, \tag{1}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — деформации; $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$; δ_{ij} — символ Кронекера; $i,\ j = x,\ y,\ z$. Здесь параметры K_0 и L связаны с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$K_0 = \frac{E}{1+\nu}, \quad L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{2}$$

$$E = \frac{K_0(K_0+3L)}{K_0+2L}, \quad \nu = \frac{L}{K_0+2L}. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$p_{ij} = K_0 \varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

$$Q = L\varepsilon \tag{5}$$

или через напряжения

$$p_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij}, \tag{6}$$

$$Q = \frac{\nu}{1+\nu}\, \sigma, \quad (\sigma = \sigma_{ii}). \tag{7}$$

Легко заметить, что в том случае, когда первый инвариант тензора деформации равен нулю, связь между ортогональными направлениями деформирования отсутствует. Здесь под направлениями деформирования условимся понимать растяжение–сжатие по осям $x,\ y,\ z$ и сдвиги в плоскостях $xy,\ yz,\ zx$. Примером напряженно-деформированного состояния, когда не работают связи между различными направлениями, может служить чистый сдвиг. Жесткость материала K_0 при этом будет одинакова во всех направлениях и равна удвоенному модулю сдвига $2G = E/(1+\nu)$. Будем называть эту жесткость собственным модулем, а величину L — модулем связи. При $\varepsilon = 0$ величины p_{ij} совпадают с напряжениями σ_{ij}. Будем называть p_{ij} собственными напряжениями. Соответственно, величину Q назовем напряжением связи.

Таким образом, обобщенная жесткость материала оказывается разделенной на жесткость связи, которая обусловливает существование недиагональных элементов в матрицах модулей упругости и коэффициентов податливостей и жесткость материала, лишенного этих связей, ее будем называть собственной жесткостью материала.

В работах [18–20] проводилось спектральное разложение тензоров модулей упругости. При этом были определены собственные (истинные) модули упругости, собственные напряженные состояния. В предлагаемом подходе определение “собственные” имеет другой смысл и соответствует только разложению тензора модулей упругости (1).

Собственные напряжения определяются аналогично компонентам девиатора напряжений. Отличие заключается в том, что коэффициент при σ в формулах для компонент девиатора равен 1/3 , тогда как в (4) коэффициент при σ равен $\nu/(1+\nu)$. Следовательно, собственные напряжения должны совпадать с компонентами девиатора для материала с $\nu = 0{,}5$, т.е. для несжимаемого материала.

Будем считать основным законом упругости соотношения (1), а закон Гука — следствием основного закона. Также примем в качестве основных характеристик упругости собственный модуль K_0 и модуль связи L.

Данная схема деформирования определяет границы возможных значений коэффициента поперечного сжатия. Согласно (3), ν должно изменяться от нуля при K_0/L, стремящемся к бесконечности, до 0,5 при K_0/L, стремящемся к нулю. (Величины K_0 и L считаем положительными, т.е. не рассматриваем материалы с особыми свойствами, например, разбухающие материалы, которые увеличивают свой объем при всестороннем сжатии).

В работах [21–23] разработана во многом похожая схема деформирования материала, в которой тоже вводятся понятия внутренних напряжений. Однако эта схема не получила дальнейшего развития.

В работах [24, 25] обсуждается вопрос об использовании в качестве критериальных параметров при оценке прочности материалов так называемых приведенных напряжений $\overline{\sigma}_{11},\ \overline{\sigma}_{22},\ \overline{\sigma}_{33}$, которые определяются через главные напряжения $\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{11} &= (1+\nu)\left(\sigma_{11} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma\right);\\
\overline{\sigma}_{22} &= (1+\nu)\left(\sigma_{22} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma\right);\\
\overline{\sigma}_{33} &= (1+\nu)\left(\sigma_{33} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\sigma\right),
\end{aligned} \tag{8}
$$

т.е. приведенные напряжения с точностью до коэффициента $(1+\nu)$ равны собственным напряжениям в направлениях, где отсутствуют касательные напряжения.

Значение удельной потенциальной энергии U определяется работой обычных напряжений на соответствующих им деформациях, т.е. с учетом правила суммирования по повторяющимся индексам

$$
U = \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}. \tag{9}
$$

Согласно принятой схеме деформирования, удельную потенциальную энергию представим в виде

$$
U = U_p + U_Q, \tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
U_p &= \frac{1}{2}\,p_{ij}\,\varepsilon_{ij},\\
U_Q &= \frac{1}{2}\,Q\varepsilon.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Величину U_Q будем называть энергией связи, а U_p — энергией собственных жесткостей данного направления или просто собственной энергией. Легко показать, что для случая линейно-упругого тела, который мы пока рассматриваем, величины U_Q и U_p являются инвариантами напряженно-деформированного состояния. Действительно, согласно (1), U_Q и U_p пропорциональны соответственно первому и второму инвариантам тензора деформации.

Чтобы доказать формулу (10), представим напряженное состояние тела как результат последовательного приложения двух систем напряжений и вычислим конечное значение удельной потенциальной энергии. Все зависимости будем устанавливать в направлениях главных напряжений. Сначала приложим первую систему напряжений, соответствующую всестороннему растяжению или сжатию (все параметры со штрихом), p — гидростатические компоненты тензора. Согласно (1), (4), (5) и (11) будем иметь

$$
\sigma'_{11} = \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = p;
$$

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{33} = \frac{p}{K_0 + 3L};$$

$$p'_{11} = p'_{22} = p'_{33} = \frac{pK_0}{K_0 + 3L};$$

$$Q' = \frac{3pL}{K_0 + 3L};$$

$$U'_p = \frac{3}{2} p^2 \frac{K_0}{(K_0 + 3L)^2}; \quad U'_Q = \frac{9}{2} p^2 \frac{L}{(K_0 + 3L)^2};$$

$$U' = \frac{3}{2} \frac{p^2}{K_0 + 3L}.$$

Затем приложим вторую систему напряжений (параметры с двумя штрихами), которая соответствует условию $\varepsilon'' = 0$, или, что то же самое, $\sigma'' = 0$, как если бы первая система отсутствовала. Работа второй системы напряжений на своих деформациях есть энергия U''_p, так как $Q'' = L\varepsilon''$ равно нулю и, следовательно, $U''_Q = 0$. Но еще необходимо учесть работу напряжений первой системы на деформациях второй системы. Обозначим эту работу U_{pQ}. Деформации второй системы будут равны

$$\varepsilon''_{11} = \frac{\sigma''_{11}}{K_0}; \quad \varepsilon''_{22} = \frac{\sigma''_{22}}{K_0}; \quad \varepsilon''_{33} = \frac{\sigma''_{33}}{K_0}.$$

Для U''_p получаем выражения

$$U''_p = \frac{1}{2} \left(p''_{11}\varepsilon''_{11} + p''_{22}\varepsilon''_{22} + p''_{33}\varepsilon''_{33} \right),$$

$$U''_p = \frac{1}{2K_0} \left({\sigma''_{11}}^2 + {\sigma''_{22}}^2 + {\sigma''_{33}}^2 \right).$$

Напряжения p'_{ij} и Q' на деформациях ε''_{ij} совершат работу

$$U_{pQ} = p'_{11}\varepsilon''_{11} + p'_{22}\varepsilon''_{22} + p'_{33}\varepsilon''_{33} + Q' \left(\varepsilon''_{11} + \varepsilon''_{22} + \varepsilon''_{33} \right).$$

Принимая во внимание, что σ'' и ε'' равны нулю, получаем $U_{pQ} = 0$. Тогда $U = U'_p + U''_p + U'_Q$, что и доказывает формулу (10).

Введем понятия интенсивности собственных напряжений

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}}, \tag{12}$$

интенсивности деформации $\overline{\varepsilon}_i$ в форме

$$\overline{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}. \tag{13}$$

Интенсивность собственных напряжений p_i и интенсивность деформации $\overline{\varepsilon}_i$ связаны между собой соотношением

$$p_i = K_0 \overline{\varepsilon}_i. \tag{14}$$

Отсюда собственная энергия равняется
$$U_p = p_i \, \overline{\varepsilon}_i.$$
Тогда с учетом (14) собственную энергию можно определить как
$$U_p = \frac{p_i^2}{K_0}. \tag{15}$$
Использовав (6), запишем выражение для интенсивности собственных напряжений через обычные напряжения
$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2}\ (1+\nu)} \Big[\left(1+2\nu^2\right)\left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2\right) - \\ -2\nu\left(2-\nu\right)\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\,\sigma_{xx}\right) + \\ +2(1+\nu)^2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$
Величина p_i — инвариант напряженно-деформированного состояния. Поэтому (16) запишем через главные обычные напряжения
$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2}\ (1+\nu)} \ \Big[\left(1+2\nu^2\right)\ \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2\ \right) - \\ -2\nu\ \left(2-\nu\right)\left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\ \sigma_{11}\right)\Big]^{1/2}. \tag{17}$$
То, что интенсивность собственных напряжений p_i является инвариантом напряженного состояния, легко показать, преобразовав (17) к виду
$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2}\ (1+\nu)} \left[\left(1+2\nu^2\right) I_{1\sigma}^2 + \ 2\ (1+\nu)^2\ I_{2\sigma}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$
где $I_{1\sigma} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$;
$$I_{2\sigma} = -\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2,$$
т.е. $I_{1\sigma}$ — первый, а $I_{2\sigma}$ — второй инварианты тензора напряжений.

Условие начала пластического течения. Поскольку в начальной стадии нагружения для металлов справедлив закон Гука, возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями. На практике чаще всего пользуются двумя условиями: условием наибольшего касательного напряжения (Треска – Сен-Венана)
$$\max\left\{|\sigma_{11} - \sigma_{22}|\,,\ |\sigma_{22} - \sigma_{33}|\,,\ |\sigma_{33} - \sigma_{11}|\right\} = \sigma_{\text{т}} \tag{19}$$
и “энергетическим” условием (Хубера – Мизеса)
$$\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 = 2\sigma_{\text{т}}^2, \tag{20}$$
где $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести при одноосном растяжении. Многочисленные эксперименты показали, что условие (20) лучше выполняется для поликристаллических тел в состоянии текучести, чем условие (19).

В курсе сопротивления материалов условие Хубера – Мизеса выводится обычно путем рассмотрения потенциальной энергии изменения формы. Оно может быть представлено в виде

$$U_{\text{ф}} = U_{\Phi}^{*}, \tag{21}$$

где $U_{\text{ф}}$ — энергия изменения формы; U_{Φ}^{*} — критическое значение энергии формоизменения (характеристика материала). Такой результат основан на обычном в теории упругости разделении общей жесткости материала на два механизма деформирования, один из которых определяет изменение формы, а другой — изменение объема. При этом на основании большого числа экспериментальных данных [26], показывающих, что объем у металлических материалов изменяется практически упруго, делается вывод о том, что ответственность за все виды нелинейного поведения материала лежит на механизме изменения формы. На этой основе построены практически все теории пластичности и ползучести металлов. Отсюда следует разделение тензоров напряжений и деформаций на девиаторные и шаровые составляющие и установление связи между соответствующими компонентами девиаторов и шаровых тензоров. Причем связь между шаровыми тензорами считается линейной, а между девиаторами, в общем случае, нелинейной.

Предлагаемая нами схема деформирования означает разделение общей жесткости материала на два других механизма: один осуществляет связи между различными направлениями деформирования, другой определяет деформирование материала только в данном направлении, т.е. материала, лишенного этих связей. Будем считать, что связи между различными направлениями работают упруго, а причины всех нелинейных эффектов заключены во втором механизме. Исходя из этих соображений, предположим, что пластические деформации возникают тогда, когда критического значения достигает собственная энергия U_p:

$$U_p = U_p^{*}, \tag{22}$$

где U_p^{*} — критическое значение собственной энергии. Из (15) следует, что условие начала пластичности (22) можно представить в виде

$$p_i = p_i^{*}, \tag{23}$$

где p_i^{*} — некоторое критическое значение — характеристика материала. Используя (17), запишем это условие через главные напряжения

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)}\left[\left(1+2\nu^2\right)\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2\right)-\right.$$
$$\left.-2\nu\ \left(2-\nu\right)\left(\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}\right]^{1/2}=p_i^{*}. \tag{24}$$

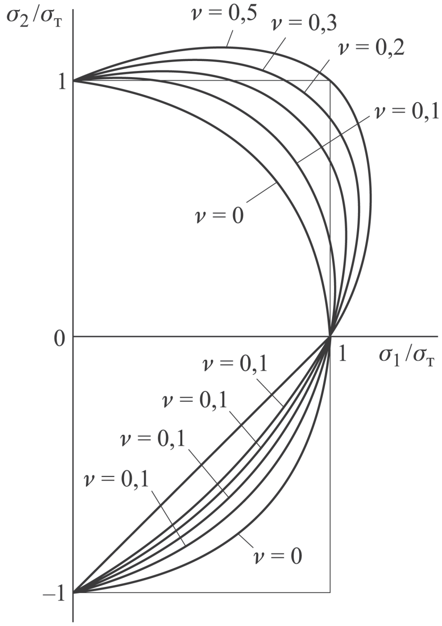

Рис. 1. Условия начала пластического течения в главных напряжениях при $\sigma_{33} = 0$

Если применить (24) для случая чистого сдвига, то получим, что p_i^* должно равняться пределу текучести при сдвиге — $\tau_т$. Для всех других видов напряженного состояния в условии начала пластичности будет присутствовать коэффициент Пуассона. Уравнение (24) в координатах σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} определяет поверхность второго порядка, а именно: сфероид с центром в начале координат, у которого длины двух главных диаметров $2d_1$ и $2d_2$ равны между собой и меньше длины третьего диаметра $2d_3$, причем третий диаметр одинаково наклонен по отношению к осям σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}. Значения полудлин главных диаметров d_1, d_2, d_3 определяются формулами

$$d_1 = d_2 = \sqrt{2}\tau_т,$$
$$d_3 = \frac{\sqrt{2}(1+\nu)}{(1-2\nu)}\tau_т. \qquad (25)$$

На рис. 1 графически изображены условия начала пластичности (19), (20), (24) в координатах σ_{11}, σ_{22} (при $\sigma_{33} = 0$). Прямые линии соответствуют условию Треска – Сен-Венана (19). При $\nu = 0{,}5$ условие (24) совпадает с условием Хубера – Мизеса (20). При $0{,}5 \geq \nu \geq 0{,}3$ рассчитанные по (24) кривые располагаются вблизи кривой Хубера – Мизеса и внутри ее в квадрате I и вне ее в квадрате IV. Общеизвестным является факт, что аналогичным образом относительно кривой Хубера – Мизеса располагаются точки, полученные из экспериментов, проведенных на металлах при сложном напряженном состоянии.

Из (24) легко вывести соотношение для параметра θ, равного отношению предела текучести при одноосном растяжении $\sigma_т$ к пределу текучести при сдвиге $\tau_т$

$$\theta = \frac{\sqrt{2}(1+\nu)}{\sqrt{1+2\nu^2}}. \qquad (26)$$

Согласно условию Треска – Сен-Венана (19), θ равняется $\sqrt{2}$. Условие (20) дает для θ значение $\sqrt{3}$. Выражение (26) устанавливает границы изменения θ в зависимости от коэффициента Пуассона ν. При изменении ν от 0 до 0,5 параметр θ меняется в пределах $\sqrt{2}\ldots\sqrt{3}$, при $\nu = 0{,}3\ldots0{,}35$ $\theta = 1{,}691\ldots1{,}711$.

Используя (18), запишем условие начала пластичности через первый и второй инварианты тензора напряжений

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+\nu)}\left[\left(1+2\nu^2\right) I_{1\sigma}^2 + 2(1+\nu)^2 I_{2\sigma}\right]^{1/2} = \tau_{\text{т}}, \tag{27}$$

откуда следует, что среднее гидростатическое давление $\sigma_{\text{ср}} = \dfrac{1}{3} I_{1\sigma}$ должно оказывать влияние на момент наступления пластического течения. Более того, пластическое деформирование, согласно (27), произойдет под действием только гидростатического давления при $\sigma_{\text{ср}}$, большем некоторого критического значения $\sigma_{\text{ср}}^*$, равного

$$\sigma_{\text{ср}}^* = \frac{\sqrt{2}(1+\nu)}{\sqrt{3}(1-2\nu)}\tau_{\text{т}}, \tag{28}$$

или через предел текучести при растяжении $\sigma_{\text{т}}$

$$\sigma_{\text{ср}}^* = \frac{\sqrt{1+2\nu^2}}{\sqrt{3}\,(1-2\nu)}\sigma_{\text{т}}. \tag{29}$$

При $\nu = 0{,}3\ldots0{,}45$ $\sigma_{\text{ср}}^*$ изменяется в пределах (2,65...11,84)$\tau_{\text{т}}$, или через предел текучести при растяжении (1,57...6,88)$\sigma_{\text{т}}$. Минимальное значение величина $\sigma_{\text{ср}}^*/\tau_{\text{т}}$ принимает при $\nu = 0$:

$$\left(\frac{\sigma_{\text{ср}}^*}{\tau_{\text{т}}}\right)_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{30}$$

При стремлении ν к 0,5 величина $\sigma_{\text{ср}}^*/\tau_{\text{т}}$ стремится к бесконечности.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи напряженного состояния. Пусть в материале реализуется совместное кручение (касательные напряжения равны τ) и всестороннее давление $-\sigma_{\text{ср}}$. Пластическое течение наступит в момент, когда τ достигнет (при постоянном давлении) величины

$$\tau^* = \sqrt{\tau_{\text{т}}^2 - \frac{3\,(1-2\nu)^2}{2(1+\nu)^2}\,\sigma_{\text{ср}}^2}. \tag{31}$$

Если давление $|\sigma_{\text{ср}}| \geq \sigma_{\text{ср}}^*$, то пластическое деформирование будет происходить сразу же при появлении касательных напряжений. Графики зависимости $\tau^*/\tau_{\text{т}}$ от $\sigma_{\text{ср}}/\sigma_{\text{т}}$ для разных значений коэффициента Пуассона приведены на рис. 2. Эти графики представляют собой эллипсы (на рисунке показана только одна четвертая часть эллипсов, расположенных в квадранте I) с главными осями, параллельными координатным осям и с центром в начале координат. Длины меньших

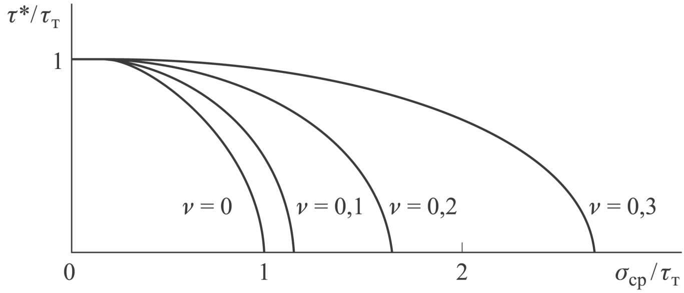

Рис. 2. Условие начала пластического течения при совместном действии кручения и всестороннего давления

диаметров всех эллипсов равны двум, а длина большого диаметра минимальна у эллипса, соответствующего $\nu = 0$, и стремится к бесконечности при приближении ν к 0,5.

Для совместного действия одноосного растяжения с напряжением σ_0 и всестороннего сжатия (давление $\sigma_{ср}$) получаем следующую формулу:

$$\sigma_0 = \frac{(1-2\nu)^2\sigma_{ср} \pm \sqrt{2}(1+\nu)\sqrt{(1+2\nu^2)\,\tau_т^2 - (1-2\nu)^2\sigma_{ср}^2}}{1+2\nu^2}. \qquad (32)$$

На рис. 3 зависимость (32) представлена графически в координатах $\sigma_{ср}/\tau_т - \sigma_0/\tau_т$. Эта зависимость для фиксированного значения коэффициента Пуассона изображается эллипсом с центром в начале координат, оси которого не параллельны осям координат. Все эллипсы касаются друг друга в точке, где $\sigma_{ср}/\tau_т = 1/\sqrt{3}$ и $\sigma_0/\tau_т = \sqrt{3}$. Угол наклона $\alpha_{эл}$ большего диаметра к оси абсцисс максимален у наименьшего из эллипсов, соответствующего значению $\nu = 0$. Этот угол равен

$$\alpha_{эл}\,(\nu = 0) = \operatorname{arctg}\left(1 + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}\right). \qquad (33)$$

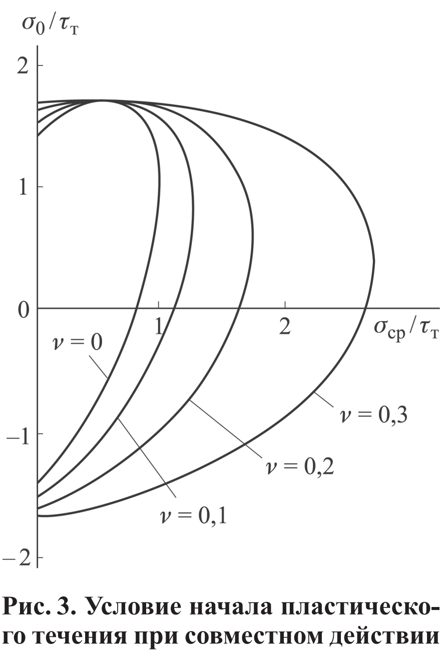

Рис. 3. Условие начала пластического течения при совместном действии одноосного растяжения и всестороннего сжатия

При стремлении ν к 0,5 длина меньшего диаметра эллипсов стремится к значению $2\sqrt{3}$, а длина большего — к бесконечности; угол $\alpha_{эл}$ при этом стремится к нулю.

Графики зависимости (33) оказываются несимметричными относительно оси абсцисс.

В механике деформируемого твердого тела коэффициент Пуассона является одной из важнейших характеристик. Нам представляется вполне логичным, что его значение должно учитываться в определяющих соотношениях, описывающих как линейное, так и нелинейное поведение материала. Предложенный подход учитывает влияние коэффициента Пуассона на условие начала пластического течения. Расчеты показывают, что условие пластичности (24) хорошо согласуется с экспериментальными данными [6–13, 15, 16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Иностранная литература, 1954. 647 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. *Гольденблат И.И.*, *Копнов В.А.* Критерии пластичности и прочности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 188 с.
4. *Качанов Л.М.* К вопросу об экспериментальном построении поверхностей текучести // Изв. АН СССР МТТ. 1971. № 4. С. 177–179.
5. *Новожилов В.В.* О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности // АН ССР ПММ. Т. 16. 1952. С. 617–619.
6. *Жуков А.М.* Механические свойства сплава МА-2 при двухосном растяжении // Изв. АН СССР, ОТН. 1957. № 9. С. 65–66.
7. *Ягн Ю.И.*, *Митрохин Н.М.* О систематическом отклонении от законов пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. № 4. С. 796–799; 126–135.
8. *Жуков А.М.* Сложное нагружение и теория пластичности изотропных материалов // Изв. АН СССР. ОТН. № 8. 1955. С. 81–92.
9. *Коларов Д.*, *Балтов А.*, *Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
10. *Лоде В.* Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов. Теория пластичности. М.: Иностранная литература, 1948. С. 336–374.
11. *Бриджмен П.В.* Новейшие работы в области высоких давлений. М.: Иностранная литература, 1948. 299 с.
12. *Огибалов П.М.*, *Кийко И.А.* Очерки по механике высоких параметров. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1966. 272 с.
13. *Кадашевич Ю.И.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера и влияние среднего нормального напряжения на границу текучести // Тр. Ленингр. технол. ин-та целлюлозно-бум. промышлен., 1965. Вып. 18. С. 234–235.
14. *Комков К.Ф.* Обобщение критерия пластичности по предельному значению удельной энергии формоизменения // Балашиха: Изд-во ВТУ при Спецстрое России. Научно-техн. сб. ВТУ. Вып. 19, 2010. С. 137–148.
15. *Коврижных А.М.* Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса–Шлейхера // ПМТФ, 2004. Т. 45. № 6. С. 144–153.
16. *Толоконников О.Л.* Условие пластичности с учетом гидропластического напряжения // Механика деформируемого твердого тела. Тула. 1983. С. 130–135.
17. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. М.: Гостехиздат, 1957. 536 с.
18. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
19. *Остросаблин Н.И.* О структуре тензора модулей упругости и классификация анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
20. *Димитриенко Ю.И.* Тензорный анализ / Механика сплошной среды: учеб. пособ. в 4 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. Т. 1. 2011. 463 с.

21. *Кузьменко В.А.* Новые схемы деформирования твердых тел. Киев: Наук. думка, 1973. 200 с.
22. *Кузьменко В.А.* О выделении из тензора деформаций составляющих, обусловленных эффектом поперечных деформаций // Проблемы прочности. 1969. № 3. С. 97–98.
23. *Кузьменко В.А.* Развитие представлений о процессе деформирования материалов (1–3 вып.). Киев: Укр. НИИТИ, 1968. 212 с.
24. *Фридман Я.Б.* Единая теория прочности материалов. М.: Оборонгиз, 1943. 95 с.
25. *Давиденков Н.Н.* За и против единой теории прочности // Вестник инженеров и техников. 1947. № 4. С. 121–129; 1949. № 4. С. 123–127.
26. *Бриджмен П.* Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Иностранная литература, 1955. 444 с.

REFERENCES

[1] Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. Vol. one. 2nd Edition. N.Y., Toronto and London. 1950. (Russ. ed.: Nadai A. Plastichnost’ i razrushenie tverdykh tel. Moscow, Inostrannaya Lit. Publ., 1954. 647 p.)

[2] Il’yushin A.A. Plastichnost’. [Plasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948. 376 p.

[3] Gol’denblat I.I., Kopnov V.A. Kriterii plastichnosti i prochnosti konstruk [Plasticity and strength criteria for constructional materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 188 p.

[4] Kachanov L.M. To the study of the experimental design of the loading surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR. MTT* [Bull. Acad. Sci. USSR, Mech. Solids], 1971, no. 4. pp. 177–179 (in Russ.).

[5] Novozhilov V.V. On the physical meaning of stress invariants used in the theory of plasticity. *Izv. Akad. Nauk SSSR. PMM* [Bull. Acad. Sci. USSR, Appl. Math. Mech.], 1952, vol. 16, no. 5, pp. 617–619 (in Russ.).

[6] Zhukov A.M. The mechanical properties of the alloy MA-2 in biaxial tension. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, Mekh. i mashinostr.* [Bull. Acad. Sci. USSR, Tech. Sci. Sec., Mech. and Mechanical Eng.], 1957, no. 9, pp. 65–66 (in Russ.).

[7] Yagn Yu.I., Mitrokhin N.M. Concerning the systematic deviation from the plasticity theory. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1960, vol. 135, no. 4, pp. 796–799; 126–135 (in Russ.).

[8] Zhukov A.M. Combined loading and the theory of plasticity of isotropic materials. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, Mekh. i mashinostr.* [Bull. Acad. Sci. USSR, Tech. Sci. Sec., Mech. and Mechanical Eng.], 1955, no. 8, pp. 81–92 (in Russ.).

[9] Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. Mekhanika plasticheskikh sred [Mechanics of plastic media]. Moscow, Mir Publ., 1979. 302 p.

[10] Lode V. The influence of the average principal stress on the fluidity of metals. Theory of plasticity. Collection of papers. (Russ. ed.: Teoriia plastichnosti: cb. statei. Moscow, Izdatel’stvo inostrannoi Lit. Publ., 1948, pp. 336–374.)

[11] Bridgman P.W. Recent Work in the Field of High Pressures. Rev. Modern Phys., 1946, vol. 18, p. 1–93; Jour. Inst. Petrol., vol. 32, 1946, p. 254 A. (Russ. ed.: Bridzhmen P.B. Noveyshie raboty v oblasti vysokikh davleniy. Moscow, Inostrannaya Lit. Publ., 1948. 229 p.)

[12] Ogibalov P.M., Kiyko I.A. Ocherki po mekhanike vysokikh parametrov [Essays on the mechanics of high parameters]. Moscow, MGU Publ., 1966. 272 p.

[13] Kadashevich Yu.I. Plasticity theory, which takes into account the Bauschinger effect and the influence of the average normal stress on the limit of liquidity. *Tr. Leningradskogo tekhnol. inst. tsellyulozno-bum. promyshlen.* [Proc. Leningrsky Inst. Technology Paper and Paperboard Ind.], 1965, vol. 18, pp. 234–2355 (in Russ.).

[14] Komkov K.F. Correlation of the plasticity criterion in accordance with value limit of the specific distortion-strain energy. *Nauchno-tekhn. sb. VTU pri Spetsstroe Rossii* [Sci. Tech. Proc. of Russ. Mil. Techn. Un.], 2010, vol. 19, pp. 137–148, Balashiha (in Russ.).

[15] Kovrizhnykh A.M. Equation of the state of plane stress under conditions Mises-Schleicher plasticity. *PMTF* [J. Appl. Mech. and Techn. Physics], 2004, vol. l45, no. 6, pp. 144–153.

[16] Tolokonnikov O.L. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Tula, 1983, pp. 130–135.

[17] Timoshenko S.P. History of The Strength of Materials. McGraw-Hill Book Company. 1953. 480 p. (Russ. ed.: Istoriia nauki o soprotivlenii materialov s kratkimi svedeniiami iz istorii teorii uprugosti i teorii sooruzhenii. Moscow, Gostekhizda Publ., 1957. 536 p.).

[18] Rykhlevskiy Ya. Concerning Hook’s law. *PMM* [J. Appl. Math. Mech], 1984, vol. 48, no. 3, pp. 420–435 (in Russ.).

[19] Ostrosablin N.I. Conserning elastic modulus tensor and classification of anisotropic materials. *PMTF* [J. Appl. Mech. and Techn. Physics], 1986, no. 4, pp. 127–135 (in Russ.).

[20] Dimitrienko Yu.I. Tenzornyy analiz / Mekhanika sploshnoy sredy: ucheb. posob. v 4 t [Tensorial analysis / Continuum mechanics.]. In 4 volumes. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., vol. 1, 2011. 463 p.

[21] Kuz’menko V.A. Novye skhemy deformirovaniya tverdykh tel. [New schemes of deformation of solids]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1973. 200 p.

[22] Kuz’menko V.A. On the separation of the strain tensor components resulting from transverse deformation. *Problemy prochnosti* [Strength Problem], 1969, no. 3, pp. 97–98 (in Russ.).

[23] Kuz’menko V.A. Razvitie predstavleniy o protsesse deformirovaniya materialov (1–3 vyp.) [The evolution of concepts about the process of materials deformation]. Kiev: Ukr. NIITI Publ., 1968. 212 p.

[24] Fridman Ya.B. Edinaya teoriya prochnosti materialov [The unified theory of strength of materials]. Moscow, Oborongiz Publ., 1943. 95 p.

[25] Davidenkov N.N. In favor and against a single theory of strength. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* [Bull. Engineers and Technicians], 1947, no. 4, pp. 121–129; 1949, no. 4, pp. 123–127 (in Russ.).

[26] Bridgman P. W. “Studies in Large Plastic Flow and Fracture”, Metallurgy and Metallurgical Engineering Series, McGraw-Hill, New York, 1952. (Russ. ed.: Bridzhmen P.B. Issledovaniya bol’shikh plasticheskikh deformatsiy i razryva. Moscow, Inostrannaya Lit. Publ., 1955. 444 p.)

Статья поступила в редакцию 7.02.2013

Борис Максимович Пахомов — канд. техн. наук, доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области механики нелинейного деформирования материалов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

B.M. Pakhomov — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Spacecrafts and Space Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of mechanics of nonlinear deforming of materials.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.