

## ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ВОЛОКНОМ И МАТРИЦЕЙ

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: zarubin@bmstu.ru, gnk1914@mail.ru, inga\_fn2@mail.ru

*Построена математическая модель переноса тепловой энергии в композите, армированном волокнами, ориентированными в одном направлении. Учтена возможность возникновения промежуточного слоя между волокнами и матрицей. Эта модель позволила получить расчетные формулы для эффективных коэффициентов теплопроводности такого композита в направлении расположения волокон и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. С применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле построены двусторонние оценки возможного значения второго из этих коэффициентов. Представленные результаты могут быть использованы для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности волокнистых композитов.*

**Ключевые слова:** композит, волокно, промежуточный слой, эффективный коэффициент теплопроводности.

## ESTIMATES OF EFFECTIVE THERMAL-CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF THE COMPOSITE HAVING AN INTERMEDIATE LAYER BETWEEN THE FIBER AND MATRIX

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'yeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: zarubin@bmstu.ru, gnk1914@mail.ru, inga\_fn2@mail.ru

*A mathematical model of heat transfer in a composite reinforced with long anisotropic fibers oriented in one direction is built. A possibility of arising of an intermediate layer between the fibers and matrix is taken into consideration. Based on this model, formulas are derived for calculation of effective thermal-conductivity coefficients of this composite in the fiber direction and in the plane perpendicular to this direction. The dual variational formulation of the stationary heat conduction problem was applied for performing the double-ended estimates of a probable value of the second coefficient. The results can be used for predicting the effective thermal conductivity of fiber composites.*

**Keywords:** composite, fiber, intermediate layer, effective thermal conductivity coefficient.

Волокнистые композиты находят широкое применение в технике в качестве конструкционных материалов. Технологический процесс изготовления таких композитов включает в себя этап предварительной подготовки поверхности волокна, обеспечивающей в дальнейшем необходимую адгезию между армирующими элементами и матрицей [1, 2]. В результате на поверхности волокна возникает так называемый аппретирующий слой [3, 4], через который в последующем и происходит механическое и физико-химическое взаимодействие материалов волокна и матрицы [5, 6]. Свойства этого промежуточного

слоя существенно влияют на механические и эксплуатационные характеристики композита в целом, несмотря на сравнительно малое значение  $h/r_0$ , где  $h$  — толщина слоя, а  $r_0$  — радиус поперечного сечения волокна.

Для конструкций, выполненных из волокнистых композитов и испытывающих одновременно как механические, так и тепловые воздействия, помимо информации о механических характеристиках композита важно располагать данными и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности). Промежуточный слой между волокном и матрицей оказывает определенное влияние на тепловое взаимодействие между ними. Это влияние необходимо учитывать при оценке эффективного коэффициента теплопроводности композита.

**Математическая модель теплового взаимодействия волокна и матрицы.** Рассмотрим вариант волокнистого композита, все волокна в котором ориентированы в одном направлении. При существующем различии между коэффициентами теплопроводности волокна и матрицы такой композит будет анизотропным по отношению к свойству теплопроводности. При изотропной матрице с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$  и трансверсально изотропных волокнах композит также будет обладать свойством трансверсальной изотропии [7], т.е. значение  $\lambda_{\parallel}$  его эффективного коэффициента теплопроводности в направлении расположения волокон будет в общем случае отличаться от значения  $\lambda_{\perp}$  этого коэффициента в любом направлении, перпендикулярном волокнам.

В случае волокон, достаточно длинных по сравнению с их радиусом  $r_0$ , достоверной оценкой эффективного коэффициента теплопроводности композита будет определяемое по правилу смеси [8] значение

$$\lambda_{\parallel} = \lambda_m(1 - C_V) + (\lambda_{\parallel}^{\circ} r_0^2 + \lambda_{\parallel}^* (r_1^2 - r_0^2)) C_V / r_1^2, \quad (1)$$

где  $C_V$  — объемное содержание в композите волокон с учетом их покрытия аппретирующим слоем,  $\lambda_{\parallel}^{\circ}$  и  $\lambda_{\parallel}^*$  — коэффициенты теплопроводности соответственно волокна и этого слоя в направлении расположения волокон и  $r_1 = r_0 + h$ . Для сравнительно коротких волокон длиной менее  $10r_0$  значение  $\lambda_{\parallel}$  следует уточнить, аппроксимируя форму волокна удлиненным эллипсоидом вращения [9].

Для оценки значения  $\lambda_{\perp}$  построим математическую модель процесса переноса тепловой энергии в композите применительно к представительному элементу его структуры в виде достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы. Поперечное сечение этой частицы включает в себя соответствующий волокну круг радиусом  $r_0$ , окруженный кольцевым промежуточным слоем с внешним радиусом  $r_1$ , в свою очередь, окруженный изотропным слоем матрицы с внешним радиусом  $r_m$ . Составная частица

в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала, коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\perp}$  которого подлежит определению как эффективная характеристика композита. Таким образом, модель структуры композита содержит четыре фазы: волокно, промежуточный слой, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. При этом для объемной концентрации волокон с учетом промежуточного слоя будет справедливо равенство  $C_V = r_1^2/r_m^2$ .

Центр поперечного сечения составной частицы поместим в начале полярной системы координат, обозначив через  $r$  и  $\varphi$  радиальную и угловую координаты. Примем, что на большом расстоянии  $r \gg r_m$  от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси, от которой происходит отсчет угловой координаты, т.е. при  $r \rightarrow \infty$  установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция  $T_{\infty}(r, \varphi) = Gr \cos \varphi$ , где  $G$  — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (2)$$

По мере приближения к составной шаровой частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (2) дополнительным слагаемым  $\Delta T(r, \varphi) = (B/r) \cos \varphi$ , где  $B$  — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (2), описывает функция

$$T(r, \varphi) = T_{\infty}(r, \varphi) + \Delta T(r, \varphi) = (Gr + B/r) \cos \varphi. \quad (3)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в волокне

$$T^{\circ}(r, \varphi) = (A^{\circ}r + B^{\circ}/r) \cos \varphi, \quad (4)$$

в промежуточном слое

$$T^*(r, \varphi) = (A^*r + B^*/r) \cos \varphi \quad (5)$$

и в слое материала матрицы

$$T_m(r, \varphi) = (A_m r + B_m/r) \cos \varphi. \quad (6)$$

В соотношении (4)  $B^{\circ} \equiv 0$  в силу ограниченности температуры в центре волокна. Таким образом, в равенства (3)–(6) входят шесть неизвестных коэффициентов  $B$ ,  $A^{\circ}$ ,  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $A_m$  и  $B_m$ , которые необходимо найти из граничных условий на цилиндрических поверхностях с радиусами  $r_0$ ,  $r_1$  и  $r_m$ , предполагая тепловой контакт на этих поверхностях идеальным.

При  $r = r_0$  из условий непрерывности распределения температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока следует

$$T^\circ(r_0, \varphi) = T^*(r_0, \varphi) \quad \text{и} \quad \lambda_\perp^\circ \partial T^\circ / \partial r \Big|_{r=r_0} = \lambda_\perp^* \partial T^* / \partial r \Big|_{r=r_0},$$

где  $\lambda_\perp^\circ$  и  $\lambda_\perp^*$  — коэффициенты теплопроводности соответственно волокна и промежуточного слоя в направлении, перпендикулярном расположению волокон. Отсюда с использованием равенств (4) и (5) при  $B^\circ = 0$  находим

$$A^\circ = A^* + B^*/r_0^2 \quad \text{и} \quad A^\circ = (\lambda_\perp^*/\lambda_\perp^\circ)(A^* - 2B^*/r_0^2). \quad (7)$$

Из аналогичных условий при  $r = r^*$  с учетом формул (5) и (6) следует

$$A^* + B^*/r_1^2 = A_m + B_m/r_1^2 \quad \text{и} \quad A^* - B^*/r_1^2 = (\lambda_m/\lambda_\perp^*)(A_m - B_m/r_1^2). \quad (8)$$

Наконец, из подобных условий при  $r = r_m$  и соотношений (3) и (6) получим

$$A_m + B_m/r_m^2 = G + B/r_m^2 \quad \text{и} \quad A_m - 2B_m/r_m^2 = (\lambda_\perp/\lambda_m)(G - B/r_m^2). \quad (9)$$

Последовательным исключением неизвестных из равенств (6)–(9) находим

$$B/(Gr_m^2) = (\tilde{\lambda}_\perp(1 + DC_V) - 1 + DC_V) / (\tilde{\lambda}_\perp(1 + DC_V) + 1 - DC_V), \quad (10)$$

где  $\tilde{\lambda}_\perp = \lambda_\perp/\lambda_m$ ,  $d = P/S$ ,  $P = (1/\bar{\lambda}^*)/(K/r_0^2 - 1/r_1^2) - 1/(K/r_0^2 + 1/r_1^2)$ ,  $S = (1/\bar{\lambda}^*)/(K/r_0^2 - 1/r_1^2) + 1/(K/r_0^2 + 1/r_1^2)$ ,  $K = (\lambda^*/\bar{\lambda} + 1)/(\lambda^*/\lambda - 1)$ ,  $\bar{\lambda}^* = \lambda_\perp^*/\lambda_m$  и  $\bar{\lambda} = \lambda_\perp^\circ/\lambda_m$ . Замена составной частицы равновеликим цилиндром с внешним радиусом  $r_m$  и искомым коэффициентом теплопроводности  $\lambda_\perp$  приведет к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем ее однородном материале с тем же значением  $\lambda_\perp$ . Тогда в равенстве (3) следует положить  $\Delta T(r, \varphi) = 0$ , что равносильно условию  $B = 0$ , которое с учетом формулы (10) позволяет записать

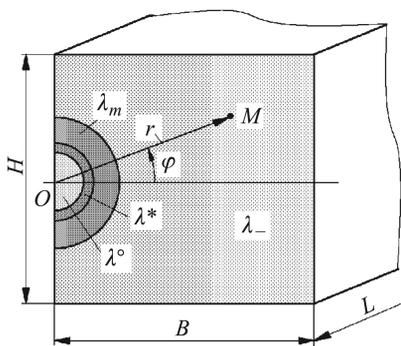
$$\tilde{\lambda}_\perp = (1 - DC_V)/(1 + DC_V). \quad (11)$$

При отсутствии промежуточного слоя (при  $\lambda^* = \lambda^\circ$ ) из формулы (11) следует

$$\tilde{\lambda}_\perp^\circ = (1 + \bar{\lambda} - (1 - \bar{\lambda})C_V)/(1 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V). \quad (12)$$

С этим равенством в частном случае неограниченной длины волокон совпадает формула, полученная в работе [10].

**Построение двусторонних оценок.** Для оценки возможной погрешности формулы (11) используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [11, 12], позволяющую получить двусторонние оценки значения  $\lambda_\perp$ . Область  $V$ , содержащую представительный элемент в виде половины составной



**Рис. 1. Модель структуры композита для построения двусторонних оценок**

параллелепипеда равна  $B$ , причем  $B \gg r_m$ . Остальные грани параллелепипеда считаем идеально теплоизолированными.

Однородный материал в части области  $V$  вне составной частицы имеет коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\perp}$ . Таким образом, в неоднородной цилиндрической области объемом  $V_0 = BHL$ , ограниченной поверхностью  $S$ , распределение температуры  $T(M)$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda(M)$  являются функциями координат точки  $M \in V$ , причем функция  $\lambda(M)$  кусочно-постоянная и принимает значения  $\lambda_{\perp}^{\circ}$  при  $r \leq r_0$ ,  $\lambda_{\perp}^*$  при  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $\lambda_m$  при  $r_1 \leq r \leq r_m$  и  $\lambda_{\perp}$  при  $r \geq r_m$ .

Примем в качестве допустимого для минимизируемого функционала [12]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M), \quad (13)$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона, линейное по ширине параллелепипеда распределение температуры с постоянной составляющей градиента  $G$ . В этом случае из формулы (13) получим

$$J_1[T] = \frac{G^2}{2} \left( \lambda_{\perp} BHL - \frac{\pi r_m^2}{2} L \lambda_{\perp} + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2} L \lambda_m + \pi \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} L \lambda_{\perp}^* + \pi \frac{r_0^2}{2} L \lambda_{\perp}^{\circ} \right). \quad (14)$$

Для максимизируемого функционала [12]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P) \mathbf{q}(P) \cdot \mathbf{n}(P) dS(P), \quad P \in S, \quad (15)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ , в качестве допустимого распределения вектора  $\mathbf{q}$  плотности теплового по-

частицы радиусом  $r_m$ , выберем в форме прямоугольного параллелепипеда длиной  $L \gg r_m$  и высотой  $H \gg r_m$ , поперечное сечение которого плоскостью, перпендикулярной волокну, показано на рис. 1. Одна из боковых граней параллелепипеда соответствует в полярных координатах значению  $\varphi = \pi/2$  и имеет температуру, принимаемую за нуль отсчета, а точки противоположной грани, на которой задана температура  $T_0 = GH$ , имеют координаты  $r \cos \varphi = B$ , т.е. ширина

тока примем постоянное значение  $q = -\lambda G$  единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной боковым граням параллелепипеда. Тогда формула (15) примет вид

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda G)^2}{2} \left( \frac{BH - \pi r_m^2/2}{\lambda_{\perp}} L + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2\lambda_m} L + \pi \frac{r_1^2 - r_0^2}{2\lambda_{\perp}^*} L + \pi \frac{r_0^2 L}{2\lambda_{\perp}^{\circ}} \right) + \lambda_{\perp} G^2 BHL. \quad (16)$$

Принятые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения  $J_1[T]$  и  $I_1[q]$  не будут совпадать, причем  $J_1[T] > I_1[q]$ . В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение  $J_0 = (\lambda_{\perp}/2)G^2 BHL$  минимизируемого функционала (13) для однородной области с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{\perp}$ . Тогда при  $(r_1/r_m)^2 = C_V$  с учетом формулы (14) из условия  $J_1[T] \geq J_0$  получим верхнюю оценку:

$$\tilde{\lambda}_+ = 1 - C_V + (\bar{\lambda}^*(1 - r_0^2/r_1^2) + \bar{\lambda}r_0^2/r_1^2)C_V \geq \tilde{\lambda}_{\perp},$$

а при использовании формулы (16) из условия  $I_1[q] \leq J_0$  найдем нижнюю оценку:

$$\tilde{\lambda}_- = 1/(1 - C_V + ((1 - r_0^2/r_1^2)/\bar{\lambda}^* + (r_0/r_1)^2/\bar{\lambda})C_V) \leq \tilde{\lambda}_{\perp}$$

для безразмерного отношения  $\tilde{\lambda}_{\perp} = \lambda_{\perp}/\lambda_m$ . Отметим, что равенство для верхней оценки совпадает по структуре с формулой (1) и идентично этой формуле в случае изотропии волокон и промежуточного слоя.

**Результаты расчетов.** Для примера расчета примем  $\lambda_{\perp}^* = (\lambda_{\perp}^{\circ} + \lambda_m)/2$  и  $r_0/r_1 = 0,9$ . На рис. 2 при различных значениях  $\bar{\lambda}$  приведены графики зависимостей от  $C_V$  верхней  $\tilde{\lambda}_+$  (штрихпунктирные линии 2) и нижней  $\tilde{\lambda}_-$  (штриховые линии 2) оценок, сплошными кривыми (3) представлены графики зависимостей  $\tilde{\lambda}_{\perp}$ , построенные по формуле (11), а пунктирные линии (4) соответствуют зависимостям  $\lambda_{\perp}^{\circ}$ , определяемым формулой (12). Ясно, что при  $\bar{\lambda} = 1$  графики всех зависимостей будут соответствовать на этих рисунках горизонтальной линии с ординатой, равной единице.

При указанных исходных для всех принятых значений  $\bar{\lambda}$  каждая сплошная кривая лежит в полосе между соответствующими штрихпунктирной и штриховой линиями, причем эта полоса расширяется при увеличении  $C_V$  и по мере отклонения параметра  $\bar{\lambda}$  от единицы. Из сопоставления графиков на рис. 2, а и б следует, что возможная погрешность расчетов по формуле (11) в данном случае довольно мала, т.е. полученные оценки значения эффективного коэффициента теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном волокнам, можно считать достоверными. Для частного случая  $\lambda_{\perp}^* = \lambda_{\perp}^{\circ}$  расчет

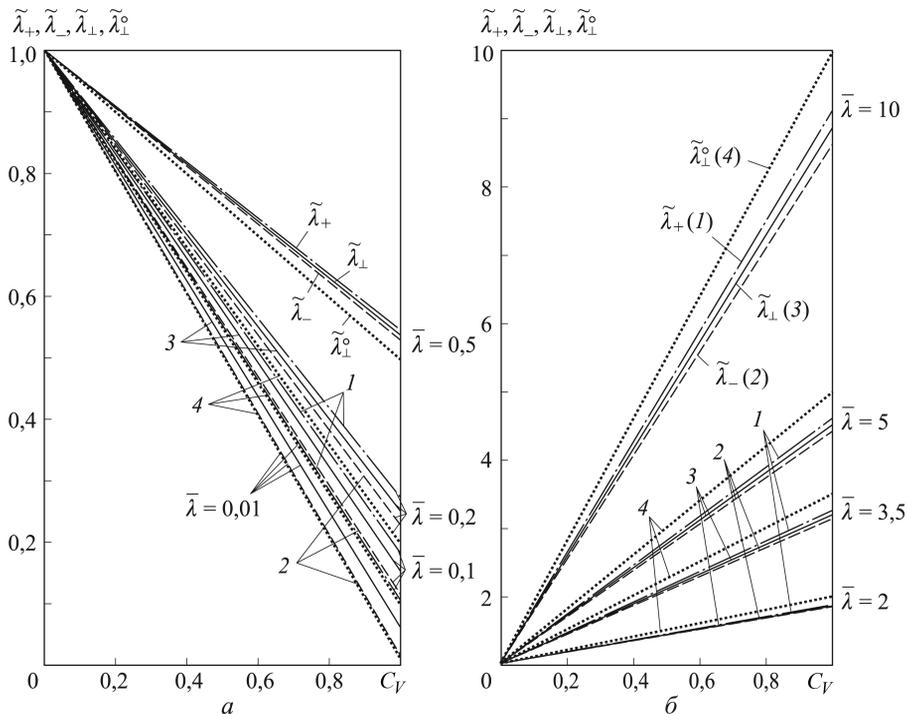


Рис. 2. Графики зависимостей при  $\bar{\lambda} < 1$  верхней  $\tilde{\lambda}_+$  (штрихпунктирные линии) и нижней  $\tilde{\lambda}_-$  (штриховые линии) оценок эффективного коэффициента теплопроводности  $\tilde{\lambda}_\perp$  (сплошные кривые) от объемной концентрации  $C_V$  волокон и аналогичных зависимостей  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ$  (пунктирные линии) от  $C_V$  при  $r_0/r_1 = 0,9$ ,  $\bar{\lambda}^* = (1 + \bar{\lambda})/2$  и различных значениях  $\bar{\lambda} < 1$  (a) и  $\bar{\lambda} > 1$  (б)

при  $C_V > 0$  по формуле (12) для значений  $\bar{\lambda} < 1$  приводит к неравенству  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ < \tilde{\lambda}_\perp$ , а для значений  $\bar{\lambda} > 1$  — к неравенству  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ > \tilde{\lambda}_\perp$ .

Сравнение на рис. 2 графиков зависимостей  $\tilde{\lambda}_\perp$  и  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ$  показывает, что при значении  $\lambda_\perp^* = (\lambda_\perp^\circ + \lambda_m)/2$ , расположенном между значениями коэффициентов теплопроводности для волокна и матрицы, влияние промежуточного слоя на эффективный коэффициент теплопроводности композита достаточно мало. Для современных композитов с полимерной матрицей и высокомодульными волокнами [1] характерно неравенство  $\bar{\lambda} > 1$ . Например, для композита с арамидными волокнами (кевлар-49) и эпоксидной матрицей  $\bar{\lambda} \approx 30$  [2]. Это обстоятельство при  $\lambda_\perp^* < \lambda_m$  приводит к более существенному влиянию промежуточного слоя на значение  $\lambda_\perp$  для композита в целом. На рис. 3 с использованием прежних обозначений приведены результаты расчетов при  $r_0/r_1 = 0,9$ ,  $\lambda_\perp^* = \lambda_m/2$  и различных значениях  $\bar{\lambda} > 1$ . Видно, что различие между результатами расчетов по формулам (11) и (12) растет по мере возрастания  $C_V$  и  $\bar{\lambda}$ . По-прежнему, каждая сплошная кривая для зависимости  $\tilde{\lambda}_\perp$  от  $C_V$  при фиксированном значении параметра  $\bar{\lambda}$  лежит в полосе между соответствующими штрихпунктирной и

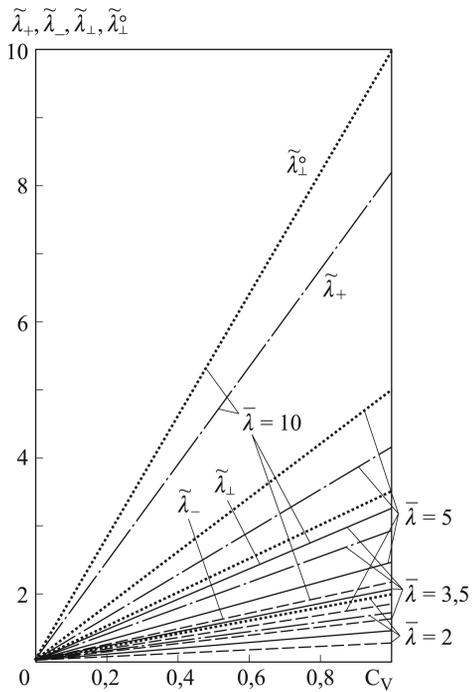
штриховой линиями, но теперь с увеличением  $C_V$  и  $\bar{\lambda}$  расширение этой полосы происходит более интенсивно, что указывает на возможный рост погрешности расчетов по формуле (11). Но поскольку значение  $\tilde{\lambda}_+$  является достоверной верхней оценкой возможного значения  $\tilde{\lambda}_\perp$ , различие между значениями  $\tilde{\lambda}_\perp$  и  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ$  уже при  $\bar{\lambda} \geq 5$  требует учитывать влияние промежуточного слоя между волокном и матрицей.

**Заключение.** Наличие в волокнистом композите промежуточного слоя между волокном и матрицей, предназначенного для улучшения между ними механического взаимодействия, влияет на процесс переноса тепловой энергии в таком композите. Построенная математическая модель теплового взаимодействия волокна и матрицы, учитывающая наличие промежуточного слоя, позволила получить расчетные зависимости для эффективных коэффициентов теплопроводности композита как transversально изотропного материала, армированного волокнами, ориентированными в одном направлении. Сопоставлением результатов расчетов с двусторонними оценками этих коэффициентов, установленными с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле, выявлена достаточная для практики степень достоверности полученных зависимостей. Показано, что влияние промежуточного слоя между волокном и матрицей существенно возрастает с ростом объемной концентрации волокна при выполнении условия  $\lambda_\perp^* < \lambda_m < \lambda_\perp^\circ$ .

*Работа выполнена по гранту НШ-1432.2014.8 программы государственной поддержки ведущих научных школ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.



**Рис. 3.** Графики зависимостей при  $\bar{\lambda} < 1$  верхней  $\tilde{\lambda}_+$  (штрихпунктирные линии) и нижней  $\tilde{\lambda}_-$  (штриховые линии) оценок эффективного коэффициента теплопроводности  $\tilde{\lambda}_\perp$  (сплошные кривые) от объемной концентрации  $C_V$  волокон и аналогичных зависимостей  $\tilde{\lambda}_\perp^\circ$  (пунктирные линии) от  $C_V$  при  $r_0/r_1 = 0,9$ ,  $\bar{\lambda}^* = 1/2$  и различных значениях  $\bar{\lambda} > 1$

2. *Справочник по композиционным материалам* / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2-х т. М.: Машиностроение, 1988. Т. 1. 448 с., Т. 2. 584 с.
3. *Поверхности раздела в полимерных композитах* / под ред. Э. Плюдемана; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 294 с.
4. *Поверхности раздела в металлических композитах* / под ред. А. Меткалфа; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 440 с.
5. *Разрушение тонких пленок и волокон* / Б. Цой, Э.М. Карташов, В.В. Шевелев, А.А. Валишин. М.: Химия, 1997. 344 с.
6. *Физика композиционных материалов* / Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов и др. / под общ. ред. Н.Н. Трофимова. В 2-х т. М.: Мир, 2005. Т. 1. 456 с., Т. 2. 344 с.
7. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
8. *Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Смесеые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
9. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. № 6. С. 276–282.
10. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Теплопроводность композита, армированного волокнами // Изв. вузов. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75–81.
11. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

## REFERENCES

- [1] Komkov M.A., Tarasov V.A. Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruksiy raket i sredstv porazheniya [Winding technology for composite structures of missiles and weapons]. Moscow, MGТУ im. M. E. Bauman Publ., 2011. 432 p.
- [2] Lubin G. Handbook of composites. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p. (Russ. ed.: Liubin D. Spravochnik po kompozitsionnym materialam. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988. 488 p. (vol. 1), 584 p. (vol. 2)).
- [3] Broutman L.J., Krock R.H. Plueddemann E.P., eds. Composite materials. Vol. 6. Interfaces in polymer matrix composites. Academic Press, 1974. 294 p. (Russ. ed.: Brautman L., Krok R., Plyudeman E. Kompozitsionnye materialy. Tom 6. Poverkhnosti razdela v polimernykh kompozitakh. Moscow, Mir Publ., 1978, 294 p.).
- [4] Metcalfe A.G. Interfaces in metal matrix composites. Academic Press, 1974. 421 p. (Russ. ed.: Metkalf A. Poverkhnosti razdela v metallicheskih kompozitakh. Moscow, Mir Publ., 1978. 440 p.).
- [5] Tsoy B., Kartashov E.M., Shevelev V.V., Valishin A.A. Razrushenie tonkikh plenok i volokon [The destruction of thin films and fibers]. Moscow, Khimiya Publ., 1977. 344 p.
- [6] Trofimov N.N., Kanovich M.Z., Kartashov E.M., Natrusov V.I., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G., Sokolov V.I., Simonov-Emelyanov I.D., eds. Fizika kompozitsionnykh materialov [Physics of composite materials]. In 2 volumes. Moscow, Mir Publ., 2005. 456 p. (vol. 1), 344 p. (vol. 2).
- [7] Shermeger T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [8] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The mixture models of the mechanics of composites. Part 1. Thermomechanics and thermoelasticity of a multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49.

- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The effective thermal conductivity of composite with inclusions a prolate ellipsoid of revolution. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Therm. process. in engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282.
- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Thermal conductivity of composite reinforced with fibers. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinotr.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2013, no. 5, pp. 75–81.
- [11] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.

Статья поступила в редакцию 17.04.2013

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savelieva — assoc. professor of the “Applied mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conductivity.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.