УДК 536.3.35:620.181.4

ОБОБЩЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В.Н. Елисеев, **Т.В. Боровкова**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: v.n.eliseev@gmail.com; tatjana-@mail.ru

Необходимым и важным этапом создания аэрокосмических конструкций является отработка их температурных режимов. Чаще всего на этапе проектных расчетов используют метод декомпозиции, сводящийся к представлению конструкции элементами простой геометрической формы. Также при планировании и анализе результатов тепловых и теплопрочностных испытаний конструкций в стационарных условиях нагрева необходимо определять температурное состояние конструктивных элементов разной геометрической формы, которые могут быть представлены телами простой формы — пластиной, цилиндром, сферой. В настоящей работе приведен обобщенный аналитический метод и алгоритм расчета температурного поля в телах простой геометрической формы на основе решения уравнения теплопроводности, модифицированного посредством использования понятия изотермической поверхности. Приведен пример, иллюстрирующий применение предлагаемого метода расчета температурного состояния нагреваемых объектов.

Ключевые слова: температурные режимы, испытания, алгоритм, декомпозиция, теплообмен, одномерные задачи теплопроводности, аналитические решения.

THE GENERALIZED ANALYTICAL APPROACH TO CALCULATING A STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN OBJECTS OF SIMPLE GEOMETRICAL SHAPES

V.N. Eliseev, **T.V. Borovkova**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: v.n.eliseev@gmail.com; tatjana-@mail.ru

Modeling temperature conditions is an essential and necessary step in spacecraft development. At the design stage, it is common to use the decomposition approach, which reduces the system to a combination of elements of simple geometric shapes. Analyzing the thermal states of construction elements of various geometrical shapes such as plates, cylinders, and spheres is also important in planning and evaluation of results of thermal testing and thermal testing for strength of constructions under steady-state heating conditions. A generalized analytical method and algorithm for calculating a temperature field in objects of simple geometric shapes are presented. The method is based on solving the heat conduction equation modified using the isothermal-surface concept. An example is given which illustrates the use of the proposed method for calculation of thermal states of heated objects.

Keywords: temperature conditions, testing, algorithm, decomposition, heat exchange, one-dimensional heat conduction problems, analytical solutions.

Метод декомпозиции, используемый на этапе проектных разработок аэрокосмических конструкций, предполагает представление конструкции конструктивными элементами простой геометрической формы — пластиной, цилиндром, конусом, сферой [1], и позволяет с достаточной степенью точности оценить тепловые и силовые нагрузки на конструкцию в условиях обтекания высокоскоростным потоком газа и действия различных внешних источников нагрева. Аналогичный подход представления конструктивных элементов телами простой геометрической формы может быть использован при планировании и анализе результатов тепловых испытаний конструкций. Для оценки температурного состояния могут быть использованы известные решения уравнения теплопроводности в системах координат, соответствующих форме тела, с заданием соответствующих граничных условий [2–5]. Для практики интерес может представлять и аналитический метод расчета температурного состояния объектов простой геометрической формы, основанный на едином алгоритме решения уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности, описывающее одномерное температурное поле в телах простой геометрической формы, может быть получено из общего уравнения переноса субстанции [6, 7]

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}(\tilde{C}\,\vec{v}) = \tilde{I}_V, \tag{1}$$

где $\tilde{C}$ — количество субстанции, заключенной в объеме слоя $s(r)dr$, толщиной dr и площадью поверхности уровня субстанции $s(r)$, ортогональной вектору переноса $\vec{r}$ субстанции, r — координата; $\vec{v}$ — вектор скорости переноса субстанции; τ — время; $\tilde{I}_V$ — количество субстанции, зарождающейся (исчезающей) в объеме $s(r)\,dr$ в единицу времени.

При решении тепловых задач в одномерной постановке в качестве переносимой субстанции удобно использовать поток энергии

$$\tilde{C} = C\,s(r)\,dr \tag{2}$$

и величину внутреннего тепловыделения в объеме $s(r)\,dr$

$$\tilde{I}_V = q_V\,s(r)\,dr, \tag{3}$$

где C — концентрация энергии, Дж/м^3; q_V — мощность объемных источников (стоков) теплоты, Вт/м^3.

Подставив (2) и (3) в уравнение (1) и учитывая, что объем элементарного слоя $s(r)dr$ не зависит от времени, после преобразований получим

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[C\vec{v}\,s(r)\Big] = q_V, \tag{4}$$

где в этом случае $C = c_V\rho T$ — объемная плотность энергии, а

$$C\vec{v} = \vec{q_i} \tag{5}$$

— вектор плотности потока теплоты, связанный с i-м механизмом переноса, через единицу площади $s(r)$ в направлении r (в связи с рассмотрением одномерных задач символ вектора $\vec{}$ далее опущен).

Второе слагаемое в уравнении (4), характеризующее изменение энергии в единице объема $dV = s(r)dr$ за счет реализуемых процессов переноса, может быть представлено в виде

$$\frac{dQ}{dV} = \frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[s(r)\sum_{i}^{n} C_i\vec{v}_i\Big] = \frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[s(r)\sum_{i=1}^{n} q_i\Big]. \qquad (6)$$

Например, для пористых тел, охлаждаемых жидкостью, можно указать по крайней мере два механизма изменения энергии, обусловленного ее переносом путем теплопроводности

$$\frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[s(r)q_1\Big] = \frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[-\lambda_{э}s(r)\frac{dT}{dr}\Big], \qquad (7)$$

где q_1 — плотность кондуктивного потока теплоты, и конвективным переносом энергии фильтрующейся жидкостью

$$\frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\big[s(r)q_2\big] = \frac{1}{s(r)}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\dot{m}c_{pж}s(r)T\Big], \qquad (8)$$

где q_2 — плотность конвективного теплового потока жидкости с расходом $\dot{m}$ и массовой теплоемкостью $c_{pж}$;

$$\lambda_{э} = \lambda_{к}(1 - \Pi) + \lambda_{ж}\Pi$$

— коэффициент эффективной теплопроводности среды с пористостью Π, $\lambda_{к}, \lambda_{ж}$ — соответственно коэффициенты теплопроводности каркаса и фильтрующейся жидкости.

Используя выражения (4)–(8), получим уравнение теплопроводности, описывающее одномерное поле температур в пористых плоских, цилиндрических и сферических телах с учетом фильтрации жидкости

$$c_V\rho\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{1}{s(r)}\Big\{\lambda_{э}\frac{\partial}{\partial r}\Big[s(r)\frac{\partial T}{\partial r}\Big] - \dot{m}c_{p,ж}\frac{\partial}{\partial r}\Big[s(r)T\Big]\Big\} + \sum_{j=0}^{m} q_{v,j}, \qquad (9)$$

где $q_{V,j}$ — мощность внутренних источников (стоков) теплоты различной природы, индекс $j = 0$ будет соответствовать мощности выделения (поглощения) теплоты в единице объема в случае протекания в нем химических (ядерных) реакций или поглощения излучения в частично прозрачном материале, $j = 1$ — потере (или поглощению) энергии конечным объемом тела dV через участок его внешней поверхности $d\varphi(r)$ за счет конвекции:

$$q_{V,1} = \alpha(T - T_{с})\frac{d\varphi(r)}{dV}, \qquad (10)$$

где α — коэффициент конвективного теплообмена; $T_{\text{с}}$ — температура окружающей среды.

Поглощение (потери) энергии объемом dV через участок его внешней поверхности $d\varphi(r)$ за счет теплообмена излучением учитывается слагаемым с индексом $j = 2$:

$$q_{V,2} = q_{\text{рез}} \frac{d\varphi(r)}{dV} = \pm(Aq_{\text{пад}} - q_{\text{соб}}) \frac{d\varphi(r)}{dV}, \tag{11}$$

где $q_{\text{рез}}$ — плотность потока результирующего излучения; $q_{\text{пад}}$ и $q_{\text{соб}}$ — плотность потоков падающего на тело и собственного излучения; A — поглощательная способность поверхности тела.

Формулы (10) и (11) используют обычно при расчете температурного поля в стержневых элементах конструкции.

Для установившегося процесса теплообмена уравнение (9) принимает вид

$$\lambda_{\text{э}} \frac{d^2T}{dr^2} + \left[\lambda_{\text{э}} \frac{s'(r)}{s(r)} - \dot{m}c_{p,\text{ж}}\right] \frac{dT}{dr} - \dot{m}c_{p,\text{ж}} \frac{s'(r)}{s(r)} T + \sum_{j=0}^{m} q_{V,j} = 0. \tag{12}$$

Если умножить обе части уравнения (12) на $l^2/(\lambda_{\text{э}} T_m)$, то оно может быть записано в безразмерной форме:

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^2} + b_\xi \frac{d\Theta^*}{d\xi} + C_\xi \Theta^* + F(\xi) = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} b_\xi = l\frac{s'(r)}{s(r)} - \text{Кп}; \quad C_\xi = -\,\text{Кп}\frac{s'(r)}{s(r)} l; \\ F(\xi) = \frac{l^2}{\lambda_{\text{э}} T_m} \sum_{j=0}^{m} q_{V,j}; \end{gathered} \tag{14}$$

$\Theta^* = T/T_m$, $0 < T_m < \infty$ — некоторая характерная температура процесса; l — характерный размер тела (например, толщина пластины или диаметр цилиндра); $\xi = r/l$; $s'(r) = ds(r)/dr$; $\text{Кп} = \dot{m}c_{p,\text{ж}} l/\lambda_{\text{э}}$ — критерий охлаждения пористых тел.

Вид коэффициентов b_ξ, C_ξ и свободного члена $F(\xi)$ зависит от постановки конкретной задачи. Например, при конвективном теплообмене стержня с окружающей средой $(j = 1)$ и отсутствии других внутренних источников энергии выражение для b_ξ в уравнении (13) задается в форме (14), а C_ξ и $F(\xi)$ имеют вид

$$C_\xi = -\left[\text{Bi}\frac{d\varphi(r)}{dV} + \text{Кп}\frac{s'(r)}{s(r)}\right] l;$$

$$F(\xi) = \text{Bi}\Theta_{\text{c}}^* l \frac{d\varphi(r}{dV},$$

где $\mathrm{Bi} = \alpha l/\lambda_{э}$ — критерий Био; $\Theta^*_{с} = T_{с}/T_m$, T_m — температура окружающей среды.

В другом частном случае для пластины, цилиндра и сферы (соответственно $\nu = 0,\ 1$ и 2) с внутренними источниками теплоты $(j = 0)$, поскольку $\mathrm{Bi} = \mathrm{Кп} = C_\xi = 0$, $b_\xi = \nu/\xi$, $F(\xi) = \mathrm{Po}(\xi)$, уравнение (13) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi}\frac{d\Theta^*}{d\xi} + \mathrm{Po}(\xi) = 0,$$

где ν — коэффициент формы тела; $\mathrm{Po}(\xi) = q_{V0}(\xi)l^2/(\lambda T_m)$ — критерий Померанцева.

Используя общий вид уравнения теплопроводности в форме (13), температурное поле в стационарном случае теплообмена для тел простейшей формы может быть определено из решения краевой задачи

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^2} + b_\xi\frac{d\Theta^*}{d\xi} + c(\xi)\Theta^* + F(\xi) = 0; \tag{15}$$

$$\gamma_1\Theta^{*'}(\xi_1) + \beta_1\Theta^*(\xi_1) = f_1(\mathrm{Fo}); \tag{16}$$

$$\gamma_2\Theta^{*'}(\xi_2) + \beta_2\Theta^*(\xi_2) = f_2(\mathrm{Fo}), \tag{17}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ — безразмерные коэффициенты, с помощью которых могут быть реализованы граничные условия 1-го, 2-го и 3-го рода, а также любая их комбинация. Эти коэффициенты и функции $f_1(\mathrm{Fo})$, $f_2(\mathrm{Fo})$ определяют простым сопоставлением граничных условий (16) и (17) с граничными условиями конкретной краевой задачи, записанной в безразмерной форме. Указанная процедура проиллюстрирована ниже на примерах.

Решение задачи (15)–(17) может быть получено в общей форме. С этой целью представим решение однородного дифференциального уравнения $(F(\xi) = 0)$

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^2} + b_\xi\frac{d\Theta^*}{d\xi} + c(\xi)\Theta^* = 0 \tag{18}$$

в виде

$$\Theta^* = C_1\psi(\xi) + C_2\varphi(\xi), \tag{19}$$

где $\psi(\xi), \varphi(\xi)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (18). Вид этих функций для некоторых частных случаев, встречающихся в задачах теплопроводности, приведен в таблице [1].

Для получения общего решения неоднородного уравнения (15) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, в соответствии с которым, используя (19), запишем

$$\Theta^{*'} = C_1\psi'(\xi) + C_2\varphi'(\xi) + C_1'\psi(\xi) + C_2'\varphi(\xi), \tag{20}$$

Параметры математической модели тел простой геометрической формы

Форма тела и коэффициенты в уравнении (15)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
Пластина: $b_\xi = c_\xi = 0$	$\Theta^{*''} = 0$	ξ	1
Пористая пластина, охлаждаемая жидкостью: $c_\xi = 0$, $b_\xi = \text{Кп} = -\dfrac{\dot{m}c_{р ж}l}{\lambda_{к}(1-\Pi)}$	$\Theta^{*''} - \text{Кп}\Theta^{*'} = 0$	$\exp(\text{Кп}\xi)$	1
Полый или сплошной цилиндр: $c_\xi = 0$, $b_\xi = \dfrac{1}{\xi}$	$\Theta^{*''} + \dfrac{1}{\xi}\Theta^{*'} = 0$	$\ln\xi$	1
Сплошной или полый шар: $c_\xi = 0$, $b_\xi = \dfrac{2}{\xi}$	$\Theta^{*''} + \dfrac{2}{\xi}\Theta^{*'} = 0$	$\dfrac{1}{\xi}$	1
Ребро (стержень) постоянного сечения: $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = 0$, $m = \sqrt{\alpha\Pi/(\lambda S_0)}$ (Π, S_0 — периметр и площадь поперечного сечения стержня)	$\Theta^{*''} - (ml)^2\Theta^{*'} = 0$	$\exp(-ml\xi)$	$\exp(ml\xi)$
Ребро треугольного и трапецевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = 1$, $m = \sqrt{\alpha/\lambda\delta}$	$\xi\Theta^{*''} + \Theta^{*'} - (ml)^2\Theta^{*} = 0$	$I_0(2ml\sqrt{\xi})$	$K_0(2ml\sqrt{\xi})$
Круглое ребро постоянной толщины 2δ: $c_\xi = -(ml)^2$, $b_\xi = \dfrac{1}{\xi}$, $m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}$	$\Theta^{*''} + \dfrac{1}{\xi}\Theta^{*'} - (ml)^2\Theta^{*} = 0$	$I_0(ml\xi)$	$K_0(ml\xi)$

П р и м е ч а н и е. I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка [8–10] где

$$C_1'\psi(\xi) + C_2'\varphi(\xi) = 0 \tag{21}$$

и

$$\Theta^{*''} = C_2\psi''(\xi) + C_2\varphi''(\xi) + C_1'\psi'(\xi) + C_2'\varphi'(\xi). \tag{22}$$

Подставляя (20) и (22) с учетом (21) в уравнение (15), найдем

$$\Big[C_1\psi''(\xi) + C_2\varphi''(\xi) + C_1'\psi'(\xi) + C_2'\varphi'(\xi)\Big] +$$
$$+ b_\xi\Big[C_1\psi'(\xi) + {}_2\varphi'(\xi)\Big] + c(\xi)\Big[C_1\psi(\xi) + C_2\varphi(\xi)\Big] + F(\xi) = 0. \tag{23}$$

Из (23) следует, что

$$\big[C_1'\psi'(\xi) + C_2'\varphi'(\xi)\big] + F(\xi) = 0, \tag{24}$$

так как сумма остальных слагаемых в (23) равна нулю, поскольку она удовлетворяет решению однородного уравнения (18).

Совместное решение (21) и (24) позволяет найти новые значения констант интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = C_3 - H_1(\xi); \tag{25}$$
$$C_2 = C_4 + H_2(\xi), \tag{26}$$

где

$$H_1(\xi) = \int F(\xi)\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}; \tag{27}$$
$$H_2(\xi) = \int F(\xi)\frac{\psi(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)\psi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi'(\xi)}. \tag{28}$$

Подстановка C_1 и C_2 в виде (25) и (26) в уравнение (19) приводит к общему решению неоднородного уравнения (15)

$$\Theta^* = C_3\psi(\xi) + C_4\varphi(\xi) - \psi(\xi)H_1(\xi) + \varphi(\xi)H_2(\xi). \tag{29}$$

Использование решения (29) совместно с граничными условиями (16) и (17) позволяет определить константы интегрирования C_3 и C_4 в виде

$$C_3 = \frac{b_2b_3 - b_4}{b_1b_3 - 1}; \tag{30}$$
$$C_4 = \frac{b_1b_4 - b_2}{b_1b_3 - 1}, \tag{31}$$

где

$$b_1 = \left[\frac{\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_2}; \tag{32}$$

$$b_2 = \left[\frac{f_2(\,\mathrm{Fo}) + [\gamma_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)]H_1(\xi)}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} - H_2(\xi)\right]_{\xi=\xi_2}; \qquad (33)$$

$$b_3 = \left[\frac{\gamma_1\varphi'(\xi) + \beta_1\varphi(\xi)}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_1}; \qquad (34)$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(\,\mathrm{Fo}) - [\gamma_1\varphi'(\xi) + \beta_1\varphi(\xi)]H_2(\xi)}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)} + H_1(\xi)\right]_{\xi=\xi_1}. \qquad (35)$$

В случае отсутствия внутренних источников (стоков) теплоты ($F(\xi) = 0$), решение (29) принимает более простой вид:

$$\Theta^* = C_3\psi(\xi) + C_4\varphi(\xi), \qquad (36)$$

константы C_3 и C_4 определяются формулами (30) и (31), b_1 и b_3 находятся из (32) и (34), а b_2 и b_4 определяются из более простых выражений

$$b_2 = \left[\frac{f_2(\,\mathrm{Fo})}{\gamma_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_2}; \qquad (37)$$

$$b_4 = \left[\frac{f_1(\,\mathrm{Fo})}{\gamma_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)}\right]_{\xi=\xi_1}. \qquad (38)$$

Если тепловой поток или температура на поверхности тела (граничные условия (16) и (17)) не изменяются во времени, то функции $f_1(\,\mathrm{Fo})$ и $f_2(\,\mathrm{Fo})$ в формулах (33), (35) и (37), (38) становятся константами.

Таким образом, процедура определения одномерного стационарного температурного поля в телах простой геометрической формы на основе полученного обобщенного решения формулируется следующим образом:

1) формулируется математическая модель конкретной краевой задачи теплопроводности;

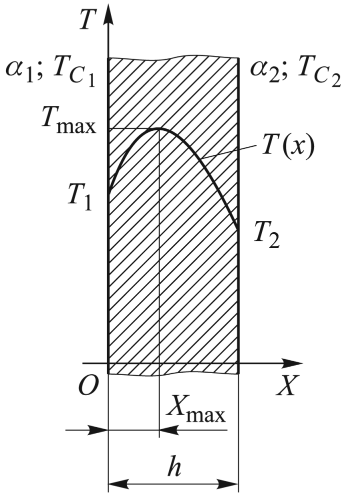
2) математическая модель представляется в безразмерной форме;

3) сопоставляя модель задачи в безразмерной форме с общей математической моделью (15)–(17), записываются значения следующих величин: $a_{\xi\xi}$, b_ξ, c_ξ, $F(\xi)$, γ_1, γ_2, β_1, β_2, $f_1(\,\mathrm{Fo})$ и $f_2(\,\mathrm{Fo})$;

4) используя формулы (27), (28), (30)–(35), вычисляются константы интегрирования C_3 и C_4. Для определения функций $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ может быть использована таблица или справочники по решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Подставляя константы C_3, C_4, а также функции $\psi(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$ в формулу (29) или (36) получаем решение поставленной задачи.

Пример. Бесконечно протяженная пластина с равномерно распределенными в ее объеме внутренними источниками теплоты с обеих



К расчету температурного поля в пластине с равномерно распределенными источниками теплоты

сторон находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой (рисунок). Заданы температуры $T_{\text{c}1}$ и $T_{\text{c}2}$ среды и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 с обеих сторон пластины; объемная плотность внутренних источников теплоты q_V, теплопроводность материала λ и толщина пластины h. Необходимо определить температурное поле в пластине $T = T(x)$, координату температурного максимума $x_{\max}$ и значение максимальной температуры, а также плотность тепловых потоков q_1 и q_2 через внешние поверхности пластины.

Сформулируем математическую модель задачи:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0; \tag{39}$$

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\alpha_1(T_1 - T_{\text{c}1}); \tag{40}$$

$$-\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=h} = \alpha_2(T_2 - T_{\text{c}2}) \tag{41}$$

и ее аналог в безразмерном виде:

$$\frac{d^2\Theta^*}{d\xi^2} + \text{Po} = 0; \tag{42}$$

$$\Theta^{*\prime}(\xi_1 - \text{Bi}_1\Theta_1^*) = -\text{Bi}_1\Theta_{\text{c}1}^*; \tag{43}$$

$$\Theta^{*\prime}(\xi_2 + \text{Bi}_2\Theta_2^*) = \text{Bi}_2\Theta_{\text{c}2}^*, \tag{44}$$

где $\text{Po} = \dfrac{q_V h^2}{\lambda T_m}$; $\text{Bi}_1 = \alpha_1 h/\lambda$; $\text{Bi}_2 = \alpha_2 h/\lambda$; $\Theta_{\text{c}1}^* = T_{\text{c}1}/T_m$; $\Theta_{\text{c}2}^* = T_{\text{c}2}/T_m$; $\xi = x/h$.

Сравнив уравнения (42)–(44) с уравнениями (15)–(17) обобщенной модели, получим

$$\begin{gathered} b_\xi = c(\xi) = 0;\quad F(\xi) = \text{Po} = \text{const}; \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 1;\quad \beta_1 = -\text{Bi}_1;\quad \beta_2 = \text{Bi}_2; \\ f_1(\text{Fo}) = -\text{Bi}_1\Theta_{\text{c}1}^*;\quad f_2(\text{Fo}) = \text{Bi}_2\Theta_{\text{c}2}^*. \end{gathered} \tag{45}$$

Далее, используя выражения (45), формулы таблицы и формулы (27), (28), (30)–(35), получим

$$
\begin{aligned}
&\psi(\xi)=\xi;\quad \varphi(\xi)=1;\\
&H_1(\xi)=\mathrm{Po}\,\xi;\quad H_2(\xi)=\mathrm{Po}\frac{\xi^2}{2};
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
b_1=\frac{1+\mathrm{Bi}_2}{\mathrm{Bi}_2};\quad b_2=\Theta^*_{\text{c}2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)\mathrm{Po};
$$

$$
b_3=-\mathrm{Bi}_1;\quad b_4=-\mathrm{Bi}_1\Theta^*_{\text{c}1};
$$

$$
C_3=\frac{(\Theta^*_{\text{c}2}-\Theta^*_{\text{c}1})+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)\mathrm{Po}}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2; \tag{47}
$$

$$
C_4=\Theta^*_{\text{c}1}+\frac{(\Theta^*_{\text{c}2}-\Theta^*_{\text{c}1})+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)\mathrm{Po}}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2. \tag{48}
$$

Подставив выражения (47) и (48) для констант C_3 и C_4 в формулу (29) с учетом (46), находим

$$
\Theta^*=\Theta^*_{\text{c}1}+\frac{(\theta^*_{\text{c}2}-\Theta^*_{\text{c}1})+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)\mathrm{Po}}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2(1+\mathrm{Bi}_1\xi)-\mathrm{Po}\frac{\xi^2}{2}
$$

и умножая левую и правую части этого выражения на T_m, получим

$$
T=T_{\text{c}1}+\frac{(T_{\text{c}2}-T_{\text{c}1})+\dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\left(1+\mathrm{Bi}_1\frac{x}{h}\right)-\frac{q_V}{2\lambda}x^2. \tag{49}
$$

Формулы для температур граничных поверхностей пластины T_1 и T_2 следуют из (49) при $x=0$ и $x=h$:

$$
T_1=T_{\text{c}1}+\frac{(T_{\text{c}2}-T_{\text{c}1})+\dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2; \tag{50}
$$

$$
T_2=T_{\text{c}1}+\frac{(T_{\text{c}2}-T_{\text{c}1})+\dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2(1+\mathrm{Bi}_1)-\frac{q_V h^2}{2\lambda}. \tag{51}
$$

При определенном сочетании параметров в правой части формулы (49) зависимость $T(x)$ может иметь экстремум; дифференцируя формулу (49) по x и приравняв производную нулю, получаем выражение для координаты максимума температуры:

$$
x_{\max}=\frac{(T_{\text{c}2}-T_{\text{c}1})+\dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2+\mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\,\mathrm{Bi}_1\frac{\lambda}{q_V h}, \tag{52}
$$

подстановка которого в выражение (49) позволяет найти $T=T_{\max}$.

Плотности потоков теплоты через граничные поверхности пластины при $x = 0$ и $x = h$ с учетом формулы (49) равны

$$q_1 = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{(T_{c2} - T_{c1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\,\mathrm{Bi}_1\frac{\lambda}{h};$$

$$q_2 = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=h} = -\frac{(T_{c2} - T_{c1}) + \dfrac{q_V h^2}{\lambda}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)}{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2}\,\mathrm{Bi}_2\,\mathrm{Bi}_1\frac{\lambda}{h} + q_V h,$$

а сумма плотностей потоков теплоты, отводимой от левой и правой поверхностей пластины, равна

$$|q_1| + q_2 = q_V h$$

— плотности поглощенной в ней энергии от действия внутренних источников теплоты.

Полученные зависимости для расчета стационарного температурного поля пластины с равномерно распределенными источниками теплоты могут быть легко трансформированы в аналогичные зависимости для ряда других частных задач. Например, при теплоизоляции одной из поверхностей следует положить $\mathrm{Bi}_1 = 0$ (или $\mathrm{Bi}_2 = 0$); в случае реализации граничных условий первого рода положить $\mathrm{Bi}_1 \to \infty$ (или $\mathrm{Bi}_2 \to \infty$).

Вывод. Предложен единый алгоритм расчета установившегося температурного поля в телах простой геометрической формы (пластина, цилиндр, сфера) при задании граничных условий 1-го, 2-го или 3-го рода (или их комбинации) на граничных поверхностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэродинамика* ракет. В 2 т. Т. 2. Методы аэродинамического расчета / под ред. М. Хемша и Дж. Нильсена. М.: Мир, 1989. 512 с.
2. *Карслоу Г.*, *Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1969. 599 с.
4. *Самарский А.А.*, *Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 785 с.
5. *Беляев Н.М.*, *Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. М.: Высш. шк., 1982. 671 с.
6. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. Справочник. М.: Энергия, 1972. 560 с.
7. *Романко П.Г.*, *Фролов В.Ф.* Массообменные процессы химической технологии. М.: Химия, 1990. 388 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
9. *Справочник* по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Энергия, 1979. 832 с.
10. *Исаченко В.П.*, *Осипова В.А.*, *Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергия, 1969. 488 с.

REFERENCES

[1] Hemsh M.J., Nielsen J.N., eds. Tactical missile aerodynamics. AIAA, Inc., N.Y., 1986. (Russ. ed.: Khemsh M., Nil'sen Dzh, eds. Aerodinamika raket. Vol. 2. Metody aerodinamicheskogo rascheta. Moscow, Mir Publ., 1989. 512 p.).

[2] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Second edition. OXFORD. At the Clarendon Press. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).

[3] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 599 p.

[4] Camarskiy A.A., Vabishchevich P.N. Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat-transfer]. Moscow, URSS Publ., 2003. 785 p.

[5] Belyaev N.M., Ryadno A.A. Metody teorii teploprovodnosti: v 2-kh chastyakh [Methods of the heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982. 671 p.

[6] Lykov A.V. Teplomassoobmen. Spravochnik [Heat and mass transfer. Handbook]. Moscow, Energiya Publ., 1972. 560 p.

[7] Romankov P.G., Frolov V.F. Massoobmennye protsessy khimicheskoy tekhnologii [Mass transfer processes of chemical technology]. Moscow, Khimiya Publ., 1990. 388 p.

[8] Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967. (Russ. ed.: Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Per. s nem. 4-e izd., ispr. [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 576 p.).

[9] Abrabowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. N.B. of STAND. APPL. MATH. Series–55. Iss. June, 1964. (Russ. ed.: Abramovitsa M., Stigan I.A. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam. 1979. Moscow, Energiya Publ., 1979. 832 p.).

[10] Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. Teploperedacha [Heat Transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1975. 488 p.

Статья поступила в редакцию 08.08.2013

Виктор Николаевич Елисеев — д-р техн. наук, профессор кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области теплообмена в конструкциях летательных аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.N. Yeliseev — Dr. Sci. (Eng.), professor of "Spacecrafts and Launch Vehicles" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in the field of heat exchange in structures of flying vehicles.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Татьяна Владимировна Боровкова — канд. техн. наук, доцент кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области теплообмена в конструкциях летательных аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

T.V. Borovkova — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of "Spacecrafts and Launch Vehicles" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of heat exchange in structures of flying vehicles.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.