

И. Е. Люминарский, С. Е. Люминарский

## МЕТОД РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ, ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Предложен новый метод расчета упругих систем с односторонними связями, основанный на введении в систему восстанавливающих сил. Эти силы прикладываются к системе в точках под связями, в которых не выполняются условия одностороннего контакта. Восстанавливающие силы прикладываются одновременно ко всем ложным связям. На примере расчета силового взаимодействия упругих звеньев волновой зубчатой передачи приводится сравнительный анализ эффективности предложенного метода и метода попыток.*

**Ключевые слова:** упругая система, односторонняя связь, волновая зубчатая передача, реакция, зазор, сила.

Все имеющиеся методы расчета упругих систем, ограниченных односторонними связями (ОС), можно разбить на две группы; методы, применяемые для расчета статических задач, относятся к первой группе; методы расчета динамических задач — ко второй. При динамическом анализе систем с ОС используются методы решения интегральных дифференциальных уравнений гиперболического типа с ограничениями в виде неравенств.

Методы расчета линейных и нелинейных систем с ОС при статическом нагружении рассмотрены в работах [1–7] и др. К этим методам можно отнести шаговый метод последовательных нагружений [1, 4, 6], метод попыток [1, 3], метод введения восстанавливающих сил [7], метод продолжения решения по параметру и методы нелинейного программирования, основанные на минимизации функционала энергии [2, 5]. Многие из перечисленных методов используются в различных вычислительных системах. Например, в программном комплексе ANSYS для расчета линейных систем, ограниченных ОС, используются методы квадратичного программирования. Необходимо отметить, что использование готовых программ квадратичного программирования, имеющихся в различных программных комплексах, для статического расчета линейных систем с ОС не всегда эффективно [7].

Шаговый метод последовательных нагружений обеспечивает гарантированную сходимость процесса поиска зоны контакта (закрытых ОС) за конечное число расчетных шагов. В этом методе на каждом шаге нагружения реакции  $R_i$  и зазоры  $\Delta_i$  в односторонних связях

должны удовлетворять условиям одностороннего контакта:  $R_i \geq 0$ ;  $\Delta_i \geq 0$ ;  $R_i \Delta_i = 0$ . Основным недостатком этого метода является необходимость начинать расчет из положения с известной зоной контакта и проследивать всю “историю” нагружения.

Методы, позволяющие находить решение в случае, когда в системе имеются связи, не удовлетворяющие условиям одностороннего контакта (ложные связи), разработаны недостаточно. В методе попыток приближенно задается зона контакта, которая уточняется по определенному алгоритму. При удачном выборе зоны контакта можно значительно сократить машинное время счета. В большей степени этот эффект проявляется, когда необходимо выполнить большое число вычислений при небольших изменениях параметров системы, т.е. при незначительных изменениях зоны контакта. Такие расчеты проводятся, например при оптимизации конструкции. Главный недостаток метода попыток — это возможность заикливания решения [5].

В работе [7] предложен метод, обеспечивающий гарантированную сходимость процесса поиска истинной зоны контакта из состояния, в котором имеются ложные связи. Этот метод основан на поочередном приложении к ложным связям восстанавливающих сил. В данной статье рассмотрена разновидность этого метода, в котором восстанавливающие силы приложены одновременно ко всем ложным связям.

В предлагаемом методе расчет начинается с приближенного задания состояния ОС. Для этого задаются два множества  $\bar{\Gamma}$  и  $\bar{\bar{\Gamma}}$ , где  $\bar{\Gamma}$  — множество ОС, в которых зазоры равны нулю (зазоры закрыты);  $\bar{\bar{\Gamma}}$  — множество односторонних связей, в которых реакции равны нулю (зазоры открыты). Для закрытых связей (множество  $\bar{\Gamma}$ ) составляются канонические уравнения метода сил, определяющие реакции в этих связях, по которым находят зазоры в открытых связях (множество  $\bar{\bar{\Gamma}}$ ).

В предлагаемом методе все ОС делятся на два множества  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Множеству  $\Gamma_1$  принадлежат ОС, удовлетворяющие условиям одностороннего контакта ( $\Delta_i \geq 0$ ;  $R_i \geq 0$ ;  $\Delta_i R_i = 0$ ), а множеству  $\Gamma_2$  принадлежат ОС, не удовлетворяющие условиям одностороннего контакта. Односторонние связи, принадлежащие множествам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , в дальнейшем будут называться правильными и ложными соответственно.

Множество правильных связей делится на два подмножества  $\bar{\Gamma}_1$  и  $\bar{\bar{\Gamma}}_1$ . Подмножеству  $\bar{\Gamma}_1$  принадлежат правильные связи, в которых зазор  $\Delta_i = 0$  (зазор закрыт); подмножеству  $\bar{\bar{\Gamma}}_1$  принадлежат правильные связи, в которых реакция  $R_i = 0$  (зазор открыт).

Множество ложных связей также делится на два подмножества  $\bar{\Gamma}_2$  и  $\bar{\bar{\Gamma}}_2$ . Подмножеству  $\bar{\Gamma}_2$  принадлежат ложные связи, в которых сила  $R_i = P_i + F_i$  меньше нуля (где  $P_i$  — сила реакции в ложной связи, полученная на первом приближении,  $P_i \leq 0$ ;  $F_i$  — восстанавливающая сила, приложенная к системе под  $i$ -й связью,  $F_i \geq 0$ ). Подмножеству  $\bar{\bar{\Gamma}}_2$  принадлежат ложные связи, в которых  $R_i > 0$ , а  $\Delta_i < 0$ .

В рассматриваемом методе предлагается все ложные связи считать открытыми. Для этих связей не составляются канонические уравнения метода сил. Отрицательные реакции в ложных связях, полученные при первом приближении, считаются внешними силами  $P_i$ .

Поиск истинной рабочей системы осуществляется путем избавления системы от ложных связей с помощью введения в систему восстанавливающих сил, которые прикладываются к ложным ОС и упругой системе в точках их возможного контакта. Нагружение системы восстанавливающими силами ведется по шагам с использованием процедуры линейного нормирования [4]. Каждая восстанавливающая сила, приложенная к ложной связи, увеличивается от нуля до значения, при котором эта связь перейдет в подмножество правильных связей. Расчет заканчивается в тот момент, когда последняя ложная связь перейдет в категорию правильных связей. Такое состояние будет истинным, поскольку к этому моменту во всех связях будут выполняться условия одностороннего контакта.

Рассмотрим алгоритм расчета линейных упругих систем с линейными односторонними связями предложенным методом более подробно.

1. Произвольно задаются множества закрытых  $\bar{\Gamma}$  и открытых  $\bar{\bar{\Gamma}}$  связей.

2. Из канонических уравнений метода сил, записанных для закрытых связей, определяется вектор реакций  $\bar{\mathbf{R}}$  в этих связях.

3. Определяется вектор зазоров  $\bar{\Delta}$  в открытых ОС.

4. Все связи делятся на множества правильных  $\Gamma_1$  и ложных  $\Gamma_2$  связей. Множество  $\Gamma_1$  делится на подмножества закрытых  $\bar{\Gamma}_1$  и открытых  $\bar{\bar{\Gamma}}_1$  связей. Множество  $\Gamma_2$  делится на подмножества  $\bar{\Gamma}_2$  и  $\bar{\bar{\Gamma}}_2$ . Все ложные связи считаются открытыми. Отрицательные реакции в ложных связях, полученные на первом приближении, считаются внешними силами.

5. К всем ложным связям прикладываются восстанавливающие силы  $F_m$ . Начальные значения  $F_m = 0$ ,  $m = 1, \dots, L_2$ , где  $L_2$  — число ложных связей.

6. В закрытых ОС определяется вектор приращений реакций  $\delta\bar{\mathbf{R}}$  от действия единичных восстанавливающих сил. К системе и ОС прикладываются одновременно все восстанавливающие силы, значения которых равны единице. Канонические уравнения составляются только для закрытых ОС, т.е. связей из подмножества  $\bar{\Gamma}_1$ .

7. Определяется вектор приращений зазоров  $\delta\bar{\Delta}$  в открытых ОС от действия единичных восстанавливающих сил.

8. Для всех правильных ОС определяются нормирующие коэффициенты  $\mu_j^P$ ,  $j = 1, \dots, L_1$ . Коэффициент  $\mu_j^P$  показывает, во сколько раз

необходимо увеличить все восстанавливающие силы, чтобы  $i$ -я правильная связь перешла из подмножества закрытых связей  $\bar{\Gamma}_1$  в подмножество открытых связей  $\bar{\Gamma}_1$  или наоборот.

9. Для всех ложных связей из множества  $\bar{\Gamma}_2$  определяются нормирующие коэффициенты  $\bar{\mu}_j^l, j = 1, \dots, \bar{L}_2$ . Коэффициент  $\bar{\mu}_j^l$  показывает, во сколько раз необходимо увеличить все восстанавливающие силы, чтобы  $j$ -я ложная связь стала правильной. Для определения  $\bar{\mu}_j^l$  вычисляются два коэффициента: первый — из условия равенства нулю силы  $R_i = P_i + F_i$ , второй — из условия равенства нулю зазора  $\Delta_j$ . Из двух вычисленных коэффициентов выбирается максимальный, равный нормирующему коэффициенту  $\bar{\mu}_j^l$ .

10. Для всех ложных связей из множества  $\bar{\Gamma}_2$  определяются нормирующие коэффициенты  $\bar{\mu}_j^l, j = 1, \dots, \bar{L}_2$ . Коэффициент  $\bar{\mu}_j^l$  показывает, во сколько раз необходимо увеличить все восстанавливающие силы, чтобы зазор в  $j$ -й ложной связи стал равным нулю; в этом случае  $j$ -я ложная связь станет правильной.

11. Определяется нормирующий коэффициент шага нагружения  $\mu$ . Он равен минимальному значению всех нормирующих коэффициентов:  $\mu = \min \left( \mu_1^P, \dots, \mu_{L_1}^P, \bar{\mu}_1^l, \dots, \bar{\mu}_{\bar{L}_2}^l, \bar{\mu}_1^l, \dots, \bar{\mu}_{\bar{L}_2}^l \right)$ .

12. Определяются векторы реакций в закрытых связях и векторы зазоров в открытых связях к концу шага нагружения:  $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}} + \mu \cdot \delta \bar{\mathbf{R}}, \bar{\Delta} = \bar{\Delta} + \mu \cdot \delta \bar{\Delta}$ .

13. Определяются восстанавливающие силы к концу шага нагружения  $F_m = F_m + \mu, m = 1, \dots, L_2$ .

14. Связь с номером  $k$ , в которой нормирующий коэффициент имеет минимальное значение, переводится в другое подмножество. Если эта связь принадлежала подмножеству правильных открытых связей  $\bar{\Gamma}_1$ , то она переводится в подмножество правильных закрытых связей  $\bar{\Gamma}_1$  или наоборот. Если  $k$ -я связь принадлежала подмножеству ложных связей  $\bar{\Gamma}_2$ , то она переводится в подмножество правильных закрытых связей  $\bar{\Gamma}_1$ . Если  $k$ -я связь принадлежала подмножеству ложных связей  $\bar{\Gamma}_2$ , то она переводится в подмножество правильных закрытых связей  $\bar{\Gamma}_1$  или подмножество правильных открытых связей  $\bar{\Gamma}_1$ .

15. Ложные связи из подмножества  $\bar{\Gamma}_2$ , в которых сила  $R_i = P_i + F_i$  стала больше нуля, переводятся в подмножество  $\bar{\Gamma}_2$ .

16. Если число ложных связей равно нулю, то расчет заканчивается. В противном случае, делается следующий шаг нагружения, который начинается с пункта 6.

Предлагаемый метод обеспечивает гарантированную сходимость процесса определения зоны контакта, для этого необходимо устранить все ложные связи. Доказательством того, что в процессе решения будут удалены все ложные связи, являются следующие утверждения.

1. Применение процедуры линейного нормирования не позволяет появиться новой ложной связи.

2. Применяемый способ компенсации отрицательных сил в ложных связях позволяет уменьшить суммарные силы в этих связях до нуля. Таким образом, исчезают все ложные связи с отрицательными реакциями.

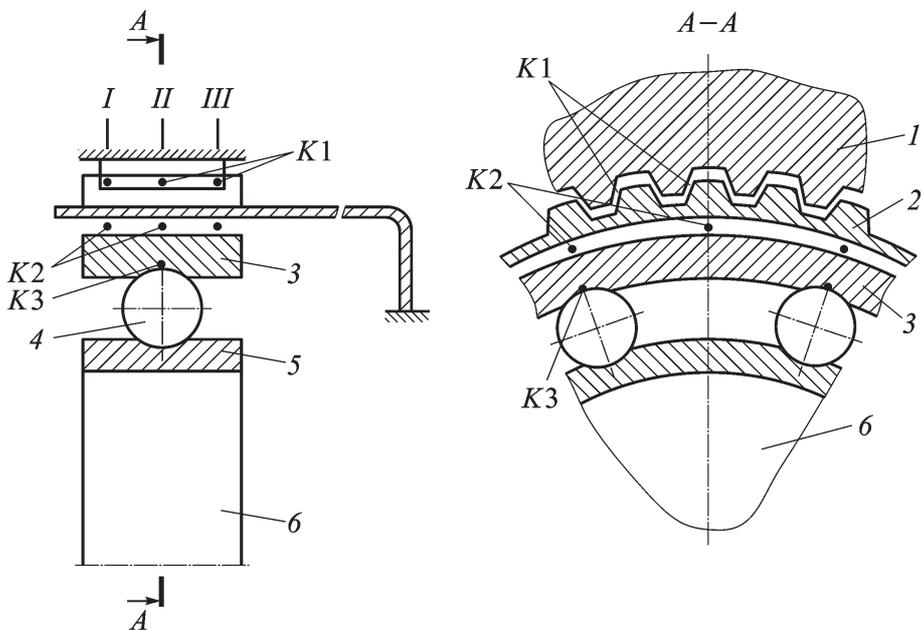
3. Применяемый способ увеличения восстанавливающих сил позволяет во всех ложных связях с отрицательными зазорами увеличить эти зазоры до нуля, в этот момент ложная связь становится правильной, а реакция в этой связи будет равна восстанавливающей силе.

Для исследования скорости сходимости предложенного метода были проведены расчеты силового взаимодействия элементов волновой зубчатой передачи [8]. Волновая зубчатая передача представляется в виде линейной упругой системы с ОС (рис. 1, 2). Общее число ОС равно 1224.

Сходимость решения оценивается коэффициентом

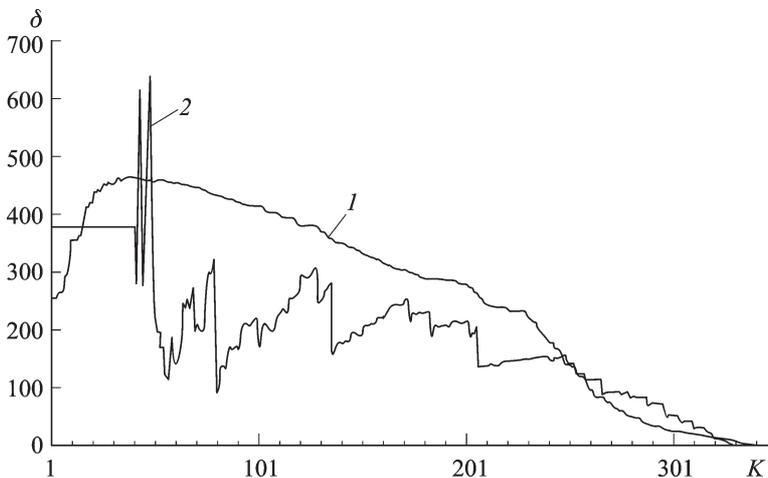
$$\delta = \sum_{i=1}^{L^*} \frac{|\Delta_i^T - \Delta_i^k|}{|\Delta_i^T|},$$

где  $\Delta_i^T$  — точное значение зазора в  $i$ -й ОС;  $\Delta_i^k$  — значение зазора в  $i$ -й ОС на  $k$ -м шаге нагружения;  $L^*$  — число ОС, в которых  $\Delta_i^T \neq 0$ .



**Рис. 1. Расчетная схема волновой передачи чашевидного типа:**

1(2) — жесткое (гибкое) колесо; 3(5) — наружное (внутреннее) кольцо гибкого подшипника; 4 — тело качения; 6 — кулачок; I, II, III — расчетные сечения; K1, K2, K3 — точки возможного контакта (ОС)



**Рис. 2.** Сходимость решения в зависимости от номера шага решения  $K$ :  
 1 – предложенный метод; 2 – метод попыток [3]

**Выводы.** 1. Предложен метод статического расчета упругих систем с ОС.

2. Разработанный метод значительно эффективнее шагового метода последовательных нагружений, в случае когда необходимо проводить большое число расчетов, в которых зона контакта упругой системы с ОС меняется незначительно.

3. В отличие от метода попыток предложенный метод всегда сходится, так как обеспечивает монотонное убывание ложных связей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович И. М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, 1975. – 145 с.
2. Перельмутер А. В. Использование методов квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями: Исследование по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. – Вып. XIX.
3. Клеников С. С., Иванов Ю. С. Построение рациональных алгоритмов поиска опорных систем нагруженных односторонних связей // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – № 10. – С. 14–18.
4. Алфутов Н. А., Клеников С. С. Расчет сил взаимодействия упругих элементов волновых передач шаговым методом // Вестник машиностроения. – 1978. – № 7. – С. 26–29.
5. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчеты модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Изд-во “Сталь”, 2002, – 600 с.
6. Фирсанов В. В. Метод расчета напряженно-деформированного состояния упругих систем с односторонними связями // Механика твердого тела. – 2003. – № 1. – С. 150–163.
7. Люминарский И. Е. Расчет упругих систем с односторонними связями. – М.: МГИУ, 2006. – 308 с.
8. Клеников С. С., Люминарский И. Е., Семиин И. И. Расчетная модель волновых передач с учетом несимметрии нагружения элементов по волнам зацепления // Вестник машиностроения. – 1993. – № 1. – С. 17–19.

Статья поступила в редакцию 21.05.2008

Игорь Евгеньевич Люминарский родился в 1960 г. Окончил в 1983 г. Завод-втуз при ЗИЛе. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теоретическая механика и теория механизмов” ГОУ МГИУ. Автор более 20 научных работ, в том числе одной монографии, в области динамики и прочности зубчатых механизмов.

I.Ye. Lyuminarskii (b. 1960) — Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “heoretical Mechanics and Theory of Mechanisms” department of the Moscow State Industrial University. Author of more than 20 publications including a monograph in the field of dynamics and strength of gearing mechanisms.

Станислав Евгеньевич Люминарский родился в 1960 г. Окончил в 1983 г. Завод-втуз при ЗИЛе. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теоретическая механика и теория механизмов” ГОУ МГИУ. Автор более 10 научных работ в области расчета систем поддрессирования транспортных машин.

S.Ye. Lyuminarskii (b. 1960) — Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Theoretical Mechanics and Theory of Mechanisms” department of the Moscow State Industrial University. Author of more than 10 publications in the field of design of systems of cushioning of transport vehicles.

---

## КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА

УДК 620.179.14

О. В. Санков, В. Н. Легкий

### ИССЛЕДОВАНИЕ ФЕРРОЗОНДОВЫХ ДАТЧИКОВ МАГНИТНЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СИСТЕМ БЛИЖНЕЙ ЛОКАЦИИ

*Рассмотрена возможность создания малогабаритных феррозондовых датчиков для бортовых систем обнаружения магнитных объектов. Описаны феррозонды с различной конструкцией сердечников. Приведены результаты исследований чувствительности и диаграммы направленности предложенных феррозондов.*

**Ключевые слова:** система обнаружения, магнитный объект, магнитный датчик.

Системы ближней локации (СБЛ), устанавливаемые на вертолетах и других летательных аппаратах, предназначены для обнаружения заданных наземных или надводных объектов. Технические металло-содержащие объекты поиска (ОП) характеризуются некоторым пространственным распределением намагниченности.

Эффективность работы магнитного датчика определяется степенью неравномерности пространственного распределения намагниченности в окрестностях расположения ОП. Измерение параметров магнитного поля в низкочастотном диапазоне (единицы и десятки герц)