

УДК 534.113

С. А. В о р о н о в, А. М. Г у с ь к о в,
А. И. Х в о с т о в**ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ
С ВИБРИРУЮЩЕЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ
ОПОРОЙ**

Приведена математическая модель поведения инструмента при глубоком сверлении с подвижной промежуточной опорой. Выведено нелинейное уравнение колебаний стебля инструмента, которое решено для системы с нестационарными граничными условиями, соответствующими промежуточной подвижной опоре. Проведен численный анализ устойчивости прямолинейной формы стебля и построены диаграммы устойчивости инструмента для различных диапазонов параметров. Показано, что в зависимости от параметров возбуждения промежуточной опоры возможно возникновение параметрического резонанса.

Сверление — это один из наиболее распространенных способов обработки отверстий. В настоящее время большинство проблем возникает при сверлении глубоких отверстий из-за недостаточной жесткости инструмента. Дополнительную сложность при сверлении представляет необходимость удаления стружки из зоны резания. При операции вибрационного сверления предварительно измельченная стружка удаляется вместе с охлаждающей жидкостью, подаваемой под давлением в зону резания. Стружка разламывается и размельчается сверлами с особой конструкцией режущих кромок (дополнительные канавки и т.д.), а также за счет вибрационного движения инструмента. В этом случае дополнительное колебательное движение инструмента накладывается на движение подачи сверла.

Разработке моделей процесса сверления посвящено много исследований, в которых разрабатывались разные расчетные схемы упругой системы станок–деталь–инструмент. Этому уделяется значительное внимание, поскольку принятие той или иной расчетной схемы, в конечном счете, определяет результаты исследования.

Моделирование процесса глубокого сверления отверстий в трудно обрабатываемых материалах является фундаментальной проблемой современной технологии. Трудность состоит также в том, что реальное движение режущих кромок сильно отличается от запрограммированного, кинематически заданного. Одна из главных причин такого отличия — это недостаточная жесткость инструмента и возникающие

вследствие этого поперечные колебательные движения гибкого стебля инструмента, в том числе имеющие автоколебательный характер.

Исследованию процесса сверления глубоких отверстий посвящено большое число публикаций [1, 2]. Обзор основных особенностей различных методов сверления глубоких отверстий приведен во многих работах, однако исследования динамики процесса глубокого сверления представлены недостаточно.

В работах [3, 4] показано, что при колебаниях режущая головка совершает прецессионное движение по эллиптической траектории, приводящее к образованию погрешностей формы, например, типа огранки при сверлении. Авторами изучена двухступенная модель сверла под действием сил резания с учетом эффектов запаздывания и возможного затирания режущих кромок по задней грани. Численное моделирование путем прямого интегрирования уравнений модели позволило найти режимы прецессионного движения с частотами, близкими к частотам, кратным частоте вращения. Полученные результаты хорошо согласуются с приведенными экспериментальными данными и наблюдаемыми вследствие возбуждаемых вибраций погрешностями формы отверстий.

Для ружейных сверл, у которых отношение длины к диаметру более 20, используются уравнения нелинейных изгибно-крутильных колебаний прямолинейных стержней [5].

Нелинейные уравнения пространственных изгибно-крутильных колебаний нерастяжимого стержня и растяжимого с учетом сдвиговых деформаций получены в работах [6, 7]. Эти уравнения были использованы для анализа колебаний консольного нерастяжимого стержня при внешнем параметрическом возбуждении основания [8] и при возможном взаимодействии высоко- и низкочастотных форм [9, 10]. Основное внимание в этих работах уделяется вопросам частотного анализа и построения амплитудно-частотных характеристик при гармоническом возбуждении.

Нелинейные колебания стебля инструмента под действием осевой силы резания исследованы в работе [11]. При этом сила резания моделируется как функция толщины срезаемого слоя с учетом запаздывания. Рассмотрены также нелинейные параметрические колебания при вибрационном сверлении, когда инструменту помимо подачи сообщается заданное гармоническое движение в осевом направлении.

Одним из методов получения вибраций режущих кромок является возбуждение осевых колебаний промежуточной опоры стебля инструмента, которые при определенных условиях могут привести к параметрическому возбуждению поперечных колебаний сверла [12]. Значительные поперечные колебания могут обеспечить требуемые параметры осевых вибраций режущих кромок, приводящих к дроблению

стружки. Этот технологический процесс недостаточно изучен и пока не нашел практического применения.

В настоящей статье приведена математическая модель колебаний инструмента с учетом податливости режущего инструмента, с помощью которой исследуется динамическая устойчивость поведения системы с подвижной промежуточной опорой. В качестве модели инструмента рассматривается нерастяжимый стержень с распределенной массой. Традиционно инструмент при сверлении рассматривается как стержень, заделанный по обоим концам. При такой постановке задачи возможно возникновение явления параметрического резонанса за счет движения промежуточной опоры, при котором теряется динамическая устойчивость стебля инструмента.

Основная задача — определение условий, при которых возникают неустойчивые поперечные колебания стебля инструмента. Эти условия будут использованы для обеспечения режима вибрационного сверления с дроблением стружки. Устойчивость исследуется с помощью линеаризованной системы уравнений.

Описание модели. Стебель инструмента представляется как гибкий нерастяжимый стержень кольцевого сечения, поперечные размеры которого много меньше длины (рис. 1). Предполагаем, что деформации — упругие, перемещения — малые и стержень имеет осевые смещения в плоскости минимальной жесткости.

Запишем уравнения движения стержня в декартовой системе координат (рис. 2). Уравнения равновесия стержня в векторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial s} + \bar{q} = 0; \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial s} + \bar{e}_1 \times \bar{Q} + \bar{\mu} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \bar{Q} и \bar{M} — векторы внутренних сил и моментов; \bar{e}_1 — единичный вектор, направленный вдоль оси стержня; \bar{q} и $\bar{\mu}$ — векторы внешней нагрузки.

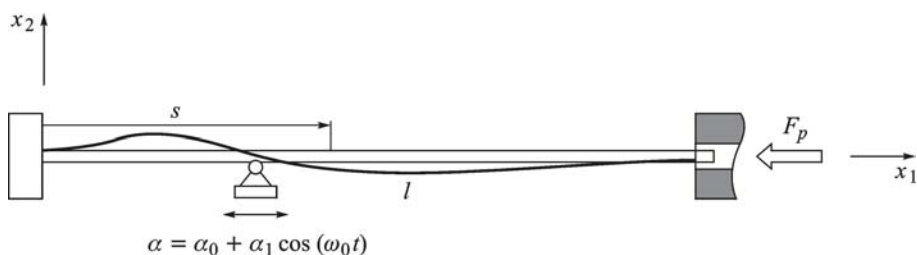


Рис. 1. Принципиальная схема системы

Уравнения движения плоского стержня в проекциях на декартовы оси имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dQ_{x_1}}{ds} + q_{x_1} = 0; \\ \frac{dQ_{x_2}}{ds} + q_{x_2} = 0; \\ \frac{dM_{x_3}}{ds} + Q_{x_2} \cos \vartheta_3 - Q_{x_1} \sin \vartheta_3 + \mu_{x_3} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

На стержень действуют следующие силы инерции:

$$q_{x_1} = -\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad q_{x_2} = -\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad \mu_3 = -\rho J_{33} \frac{d\omega_3}{dt},$$

где u и v — продольное и поперечное перемещения; ϑ_3 — угол поворота сечения; ω_3 — угловая скорость поворота сечения; ρ — плотность материала инструмента; F — площадь сечения; J_{33} — момент инерции сечения стержня.

Запишем соотношения упругости $\chi_3 - \chi_0 = \frac{M_3}{EJ_{33}}$, где χ_0 — начальная кривизна стержня ($\chi_0 = 0$ — так как инструмент считаем прямым стержнем), χ_3 — приращение кривизны стержня. Это соотношение справедливо только в связанных осях. Но так как рассматривается плоская задача, то угол ϑ_3 , приращение кривизны χ_3 и изгибающий момент M_3 в связанных и декартовых осях совпадают.

Из геометрии деформирования стержня (рис. 3) и условия нерастяжимости получаем следующие кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_3}{ds} &= \frac{1}{\rho} = \chi_3; & \sin \vartheta_3 &= \frac{B'A_1}{A'B'} = \frac{dv}{ds}; \\ \cos \vartheta_3 &= \frac{A'A_1}{A'B'} = \frac{ds + du}{ds} & \Rightarrow & \frac{du}{ds} = \cos \vartheta_3 - 1. \end{aligned}$$

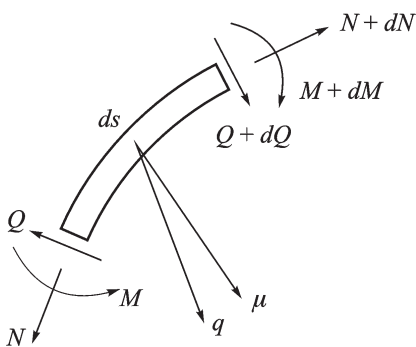


Рис. 2. Внутренние силы и моменты, действующие на элемент стержня в поперечном сечении

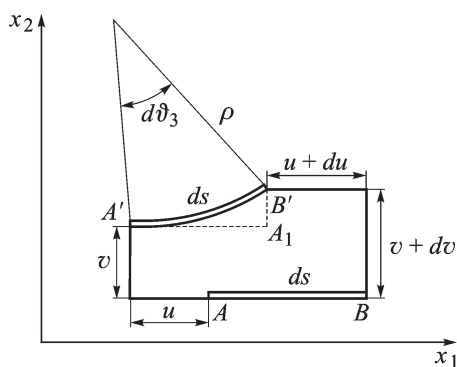


Рис. 3. Элемент стержня в деформированном состоянии

Для проведения дальнейших вычислений перейдем к безразмерным величинам, отнеся все линейные размеры к длине стержня l :

$$s = l\tilde{s}, \quad u = l\tilde{u}, \quad v = l\tilde{v}, \quad w = l\tilde{w}, \quad F = l^2\tilde{F}, \quad J_{ii} = l^4\tilde{J}_{33}.$$

В качестве масштаба времени выберем $\tilde{t} = p_0 t$, где $p_0^2 = \frac{EJ_{33}}{\rho Fl^4}$.

Для приведения кинематических уравнений и уравнений движения к безразмерному виду были введены следующие безразмерные величины: $\tilde{\omega} = \omega/p_0$ — безразмерная угловая скорость; $\tilde{M} = \frac{Ml}{EJ_{33}}$ — безразмерный момент; $\tilde{Q} = \frac{Ql^2}{EJ_{22}}$ — безразмерная поперечная внешняя сила.

Окончательно уравнения движения стержня с учетом сил инерции приведем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_{x1}}{\partial s} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial Q_{x2}}{\partial s} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial M_3}{\partial s} = \frac{J_{33}}{F} \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial t^2} - Q_{x2} \cos \vartheta_3 + Q_{x1} \sin \vartheta_3; \\ \frac{du}{ds} = \cos \vartheta_3 - 1; \\ \frac{dv}{ds} = \sin \vartheta_3; \\ \frac{d\vartheta_3}{ds} = M_3, \end{array} \right. \quad (3)$$

где Q_{x1} и Q_{x2} — проекции внутренних сил на направления x_1 и x_2 соответственно.

В уравнениях (3) и далее используются только безразмерные переменные, поэтому знак “~” над переменными опущен.

Дальнейшие преобразования в символьном виде проводились с использованием пакетов Maple и Matlab. Последовательно подставляя уравнения системы (3) можно получить дифференциальное уравнение изгибных колебаний плоского стержня в частных производных. Поскольку система решается методом Галеркина, имеющим квадратичную сходимость, то в этих уравнениях оставляем члены не выше третьего порядка малости.

Воспользуемся кинематическими соотношениями, получим нелинейные выражения для производной продольного перемещения $\frac{\partial u}{\partial s}$ и

угла ϑ_3 через поперечные перемещения v и разложим их в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{1 - \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2} - 1 \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \dots;$$

$$v_3 = \arcsin \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) \approx \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^3 + \dots$$

Отдельно проинтегрировав первое и четвертое уравнения системы (3), получим зависимости продольных перемещений и осевой силы, действующей на инструмент, от его прогибов:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{s}} (v')^2 ds;$$

$$Q_{x1} = \int_0^{\bar{s}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds + Q_{x10} =$$

$$= Q_{x1l} - \int_{\bar{s}}^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds = Q_{x1l} + \frac{1}{2} \int_{\bar{s}}^l \left(\int_0^{\bar{s}} \frac{\partial^2 (v')^2}{\partial t^2} ds \right) d\bar{s}, \quad (4)$$

где $Q_{x1l} = -F_p$ — сила резания.

Далее вводим обозначение для производной по осевой координате стержня $\frac{\partial}{\partial s} = (\quad)'$.

Подставляя в третье уравнение системы (3) выражение для осевой силы (4) и исключив v , M_3 и Q_{x2} , получаем нелинейное уравнение движения плоского стержня. В этом выражении сохраняем члены не выше третьего порядка и вводим внешнее трение, тогда окончательно получаем

$$\frac{J_{33}}{F} \left[(1 + (v')^2) \frac{\partial^2 v''}{\partial t^2} + 2v' \left(v'' \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + \frac{\partial v'}{\partial t} \frac{\partial v''}{\partial t} \right) + v'' \left(\frac{\partial v'}{\partial t} \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[v' \int_{\bar{s}}^l d\bar{s} \int_0^{\bar{s}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v')^2 ds \right]' - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b \frac{\partial v}{\partial t} + Q_{x1l} v'' - v^{IV} =$$

$$= (v')^2 v^{IV} + 4v' v'' v''' + (v'')^3 - Q_{x1l} \frac{3}{2} (v')^2 v'', \quad (5)$$

где b — коэффициент вязкого трения.

Таким образом, уравнение (5) описывает нелинейные поперечные колебания стержня с нерастяжимой осью. Поскольку основная задача

настоящей работы — исследование устойчивости системы, то можно ограничиться линейным приближением:

$$L(s, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{J_{33}}{F} \frac{\partial^2 v''}{\partial t^2} - Q_{x1l} v'' + v^{IV} = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем в расчетах будем считать, что стембель инструмента имеет кольцевое сечение диаметром d и толщиной стенки δ . Расчетное сечение стебля инструмента имеет следующие характеристики:

$$F = \pi d \delta, \quad J_{33} = \frac{\pi d^3 \delta}{8}, \quad \frac{J_{33}}{F} = \frac{1}{8} d^2.$$

Дискретизация уравнений модели. В настоящей статье в качестве расчетной схемы рассматривается модель, в которой положение промежуточной опоры является заданной функцией времени. Следовательно, задача имеет нестационарные граничные условия. Таким образом, решение поставленной задачи представляет собой исследование дифференциального уравнения в частных производных (5) с нестационарными граничными условиями. Решение этой краевой задачи возможно приближенно в численном виде. Основная идея решения — это построение ортогональной системы координатных функций для стержня с промежуточной подвижной опорой. Для этого сначала рассмотрим вспомогательную систему — стержень “заделка-заделка”.

Координатные функции вспомогательной системы (рис. 4, а) должны удовлетворять граничным условиям и условию ортогональности:

$$\varphi_j(s) : \quad \varphi_j(0) = 0, \quad \varphi_j(1) = 0, \quad \varphi_j'(0) = 0, \quad \varphi_j'(1) = 0;$$

$$(\varphi_k(s), \varphi_l(s)) = \int_0^1 \varphi_k(s) \varphi_l(s) ds = 0. \quad (7)$$

В качестве функций $\varphi_j(s)$ можно выбрать формы собственных колебаний стержня, заделанного по обоим концам:

$$\varphi_j(s) = K_3(\lambda_k) K_4(\lambda_k s) - K_4(\lambda_k) K_3(\lambda_k s), \quad (8)$$

где $K_3(s)$, $K_4(s)$ — функции Крылова.

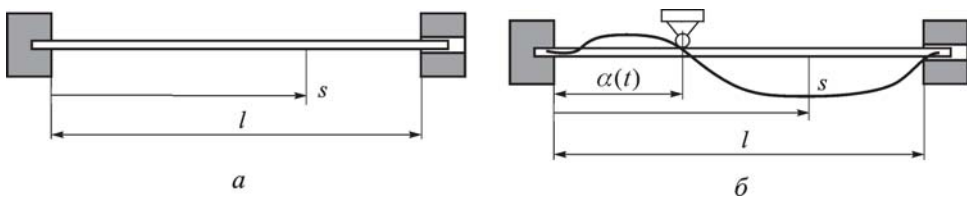


Рис. 4. Вспомогательная (а) и основная (б) системы

Значения коэффициентов λ_k для стержня, заделанного по обоим концам, следующие:

$$\lambda_1 = 4,730; \quad \lambda_2 = 7,853; \quad \lambda_k = \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k > 2).$$

Для основной системы (рис. 4, б) строим систему взаимно ортогональных координатных функций следующим образом. Первую координатную функцию берем в виде

$$\psi_1(\alpha(t), s) = \varphi_2(s) \varphi_1(\alpha(t)) - \varphi_2(\alpha(t)) \varphi_1(s), \quad (9)$$

вторую координатную функцию — как

$$\psi_2(\alpha(t), s) = \varphi_3(s) \varphi_1(\alpha(t)) - \varphi_3(\alpha(t)) \varphi_1(s) - b_2^1 \psi_1(\alpha(t), s), \quad (10)$$

где $b_2^1(\alpha(t))$ находим из условия ортогональности первой и второй форм колебаний по формуле

$$(\psi_2(\alpha(t), s), \psi_1(\alpha(t), s)) = 0;$$

третья координатная функция имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_3(\alpha(t), s) = & \varphi_4(s) \varphi_1(\alpha(t)) - \\ & - \varphi_4(\alpha(t)) \varphi_1(s) - b_3^1 \psi_1(\alpha(t), s) - b_3^2 \psi_2(\alpha(t), s), \end{aligned} \quad (11)$$

где функции $b_3^1(\alpha(t))$ и $b_3^2(\alpha(t))$ находятся из условий

$$(\psi_3(\alpha(t), s), \psi_1(\alpha(t), s)) = 0;$$

$$(\psi_3(\alpha(t), s), \psi_2(\alpha(t), s)) = 0.$$

Аналогично находим координатные функции более высокого порядка. Несмотря на громоздкость, все выражения будут получены в явном виде. При таком выборе координатных функций условие $\psi_j(\alpha(t), \alpha(t)) = 0$ выполняется тождественно. Тогда нестационарные краевые условия на промежуточной опоре тождественно выполняются.

Воспользуемся методом Галеркина. С помощью этого метода можно исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в дальнейшем будет численно интегрироваться по времени. Применяя метод Галеркина общее решение ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(t, s) &= \sum f_j(t) \psi_j(\alpha(t), s); \\ \delta v(t, s) &= \sum \delta f_j(t) \psi_j(\alpha(t), s). \end{aligned} \quad (12)$$

В настоящей работе ограничимся рассмотрением разложения только по первой координатной функции:

$$v = f(t) \cdot \psi_1(\alpha, s). \quad (13)$$

Таким образом, получаем нелинейное дифференциальное уравнение с периодически изменяющимися коэффициентами относительно неизвестной временной функций $f(t)$:

$$J_1 \ddot{f} + J_2 \dot{f} + J_3 f = \left[\frac{J_{33}}{F} J_4 - J_8 \right] f (f^2 + f \dot{f}) + \\ + \left[\frac{J_{33}}{F} J_5 - J_9 \right] f^2 \dot{f} + J_6 f^3 + \left(J_7 + \frac{1}{2} J_4 f^2 \right) f Q_{x1l} - J_{10} f^3, \quad (14)$$

где

$$J_1(\alpha) = \int_0^1 \left(\psi - \frac{J_{33}}{F} \psi'' \right) \psi ds;$$

$$J_2(\alpha) = 2\dot{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{J_{33}}{F} \frac{\partial \psi''}{\partial \alpha} \right) \psi ds + b \int_0^1 \psi^2 ds;$$

$$J_3(\alpha) = \int_0^1 \left[\dot{\alpha}^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{J_{33}}{F} \frac{\partial^2 \psi''}{\partial \alpha^2} \right) + \psi^{IV} \right] \psi ds + \dot{\alpha} b \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \psi ds;$$

$$J_4(\alpha) = 3 \int_0^1 \psi (\psi')^2 \psi'' ds; \quad J_5(\alpha) = 2\dot{\alpha} \int_0^1 \left(2\psi' \frac{\partial \psi''}{\partial \alpha} + 3 \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \psi'' \right) \psi \psi' ds;$$

$$J_6(\alpha) = \frac{J_{33}}{F} \dot{\alpha}^2 \int_0^1 \left((\psi')^2 \frac{\partial^2 \psi''}{\partial \alpha^2} + 2\psi' \psi'' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \alpha^2} + \right. \\ \left. + 2\psi' \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi''}{\partial \alpha} + \psi'' \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \psi ds - \\ - \int_0^1 \left[(\psi')^2 \psi^{IV} + 4\psi' \psi'' \psi''' + (\psi'')^3 \right] \psi ds;$$

$$J_7(\alpha) = \int_0^1 \psi'' \psi ds; \quad J_8(\alpha) = \int_0^1 (\psi')^2 \left[\int_S^1 ds \int_0^S (\psi')^2 ds \right] ds;$$

$$J_9(\alpha) = 4\dot{\alpha} \int_0^1 (\psi')^2 \left[\int_S^1 ds \int_0^S \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} ds \right] ds;$$

$$J_{10}(\alpha) = \dot{\alpha}^2 \int_0^1 (\psi')^2 \left[\int_S^1 ds \int_0^S \left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \alpha^2} \right] ds \right] ds.$$

Отметим, что приведенные коэффициенты J_i явно не зависят от времени и в случае задания периодического внешнего возбуждения $\alpha(t)$ также будут периодическими. Также как особенность модели отметим наличие внутреннего трения, пропорционального скорости движения промежуточной опоры $\dot{\alpha}(t)$.

В уравнении (14) сохраняем только линейные слагаемые:

$$J_1 \ddot{f} + J_2 \dot{f} + (J_3 - J_7 Q_{x1l}) f = 0. \quad (15)$$

Подставляя координатную функцию $\psi_1(\alpha, s)$ в выражения для коэффициентов J_i и интегрируя их по переменной s , получаем:

$$J_1(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = a_1 \varphi_1^2 + a_2 \varphi_2^2 + \frac{d^2}{8} (a_3 \varphi_1^2 + 2a_4 \varphi_1 \varphi_2 + a_5 \varphi_2^2);$$

$$\begin{aligned} J_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2') = \\ = 2\dot{\alpha} \left(a_1 \varphi_1 \varphi_1' + a_2 \varphi_2 \varphi_2' + \frac{d^2}{8} (a_3 \varphi_1 \varphi_1' + a_4 (\varphi_2 \varphi_1' + \varphi_1 \varphi_2') + a_5 \varphi_2 \varphi_2') \right) + \\ + b (a_1 \varphi_1^2 + a_2 \varphi_2^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3(\varphi_i, \varphi_i', \varphi_i'') = \\ = \dot{\alpha}^2 \left(a_1 \varphi_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2 \varphi_2'' + \frac{d^2}{8} (a_3 \varphi_1 \varphi_1'' + a_4 (\varphi_2 \varphi_1'' + \varphi_1 \varphi_2'') + a_5 \varphi_2 \varphi_2'') \right) + \\ + a_1 \lambda_2^4 \varphi_1^2 + a_2 \lambda_1^4 \varphi_2^2 + b \dot{\alpha} (a_1 \varphi_1 \varphi_1' + a_2 \varphi_2 \varphi_2'); \end{aligned}$$

$$J_7(\varphi_1, \varphi_2) = -a_3 \varphi_1^2 - a_5 \varphi_2^2 - 2a_4 \varphi_1 \varphi_2,$$

$$\text{где } a_1 = \int_0^1 \varphi_2^2(s) ds = 103320,15; a_2 = \int_0^1 \varphi_1^2(s) ds = 207,673;$$

$$\begin{aligned} a_3 = \int_0^1 \varphi_2''(s) \varphi_2(s) ds = -4757657,56; a_4 = \int_0^1 \varphi_2''(s) \varphi_1(s) ds = \\ = \int_0^1 \varphi_1''(s) \varphi_2(s) ds = -4,931; a_5 = \int_0^1 \varphi_1''(s) \varphi_1(s) ds = 2554,88. \end{aligned}$$

Возбуждение промежуточной опоры задаем в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega_0 t),$$

где α_0 — начальное положение промежуточной опоры; α_1 — амплитуда внешнего возбуждения промежуточной опоры; ω_0 — частота внешнего возбуждения.

Далее переходим к новому масштабу времени:

$$2\pi\tau = \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(2\pi\tau).$$

Приводя уравнение (15) к форме Коши, получаем

$$\dot{\bar{Y}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{J_7 Q_{x1l} - J_3}{J_1} & -\frac{J_2}{J_1} \end{bmatrix} \bar{Y}, \quad (16)$$

где $\bar{Y} = (f, \dot{f})^T$, $\bar{p} = (\alpha_0, \alpha_1, \omega_0, d, Q_{x1l}, b)$ – векторы параметров, характеризующих поведение системы.

Анализ системы без возбуждения промежуточной опоры. Рассмотрим поведение инструмента без внешнего возбуждения промежуточной опоры. Пусть $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_0 = \text{const}$. В этом случае дифференциальное уравнение (15) становится уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{f} + p^2 f = 0, \quad (17)$$

где $p = \sqrt{\frac{J_3(\alpha_0) - J_7(\alpha_0) Q_{x1l}}{J_1(\alpha_0)}}$ – приближенная собственная частота колебаний невозбужденной системы для первой координатной функции.

Точные значения спектра собственных частот для стержня с промежуточной опорой, заделанного по обоим концам, при $Q_{x1l} = 0$ можно найти как корни частотного уравнения:

$$K_3(\lambda\alpha_0) [K_4(\lambda) K_3[\lambda(l - \alpha_0)] - K_3(\lambda) K_4[\lambda(l - \alpha_0)]] - \\ - K_4(\lambda\alpha_0) [K_3(\lambda) K_3[\lambda(l - \alpha_0)] - K_2(\lambda) K_4[\lambda(l - \alpha_0)]] = 0,$$

тогда частоты колебаний определяются как $p_i = \lambda_i^2$.

Из рис. 5, а видно, что при $\alpha_0 = 0,5$ точное и приближенное значения собственной частоты колебаний совпадают. Максимальное расхождение между ними достигается, когда промежуточная опора приближается к концам стержня, и составляет 23 %.

Сила резания, при которой происходит потеря статической устойчивости стебля инструмента, определяется по формуле

$$Q_{crit} = \frac{J_3}{J_7}. \quad (18)$$

Зависимость собственной частоты колебаний по первой координатной функции от положения промежуточной опоры и значения осевой силы показана на рис. 5, б и 6.

Численный анализ устойчивости инструмента с подвижной промежуточной опорой. Численный анализ устойчивости решения (16) проводим методом Флоке [12]. Интегрируя систему уравнений (16) по времени, построим матрицу монодромии M .

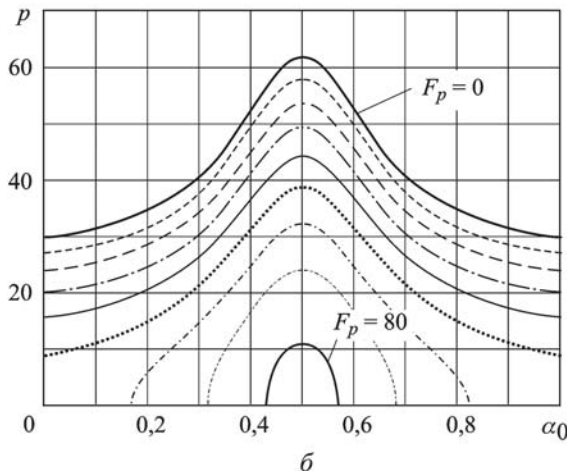
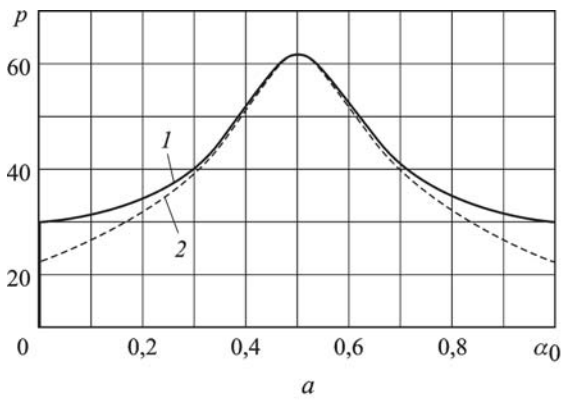


Рис. 5. Зависимость первой собственной частоты системы от положения промежуточной опоры (а) (1 – $p_{\text{приб}}$, 2 – $p_{\text{точн}}$) для различных значений осевой силы F_p (б)

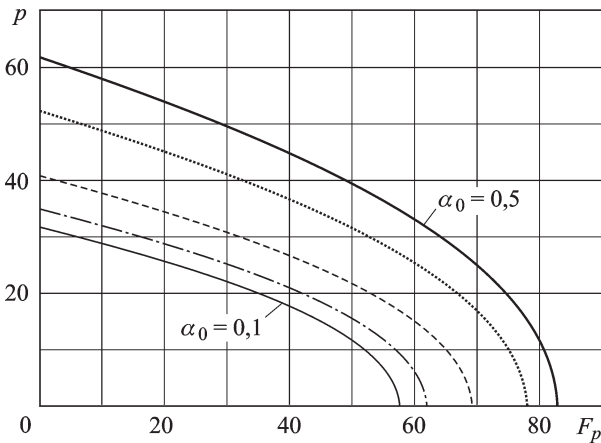


Рис. 6. Зависимость первой собственной частоты системы от осевой силы для различных положений промежуточной опоры

Об устойчивости поведения системы можно судить по максимальному собственному значению матрицы монодромии $\rho_m = \max_{j=1, n} (|\mu_j|)$.

В случае, если $|\rho_m| < 1$, то прямое положение стебля асимптотически устойчиво.

Разработан пакет программ, с помощью которого в зависимости от различных параметров можно построить диаграмму устойчивости.

На рис. 7 построены диаграммы устойчивости в зависимости от амплитуды α_1 и частоты возбуждения ω_0 промежуточной опоры. На диаграммах точками показаны значения параметров α_1 и ω_0 , в которых решение является неустойчивым. Из графика (см. рис. 7, а) видно, что в определенном диапазоне параметров около удвоенной первой собственной частоты ($\rho_1 = 41,5$) стебель инструмента теряет устойчивость динамическим образом. Таким образом, можно говорить, что в системе возбуждается параметрический резонанс.

На рис. 7, б изображена диаграмма устойчивости при большом значении осевой силы. Отметим, что при действии силы, близкой к критической (18), в системе развиваются резонансные колебания, имеющие

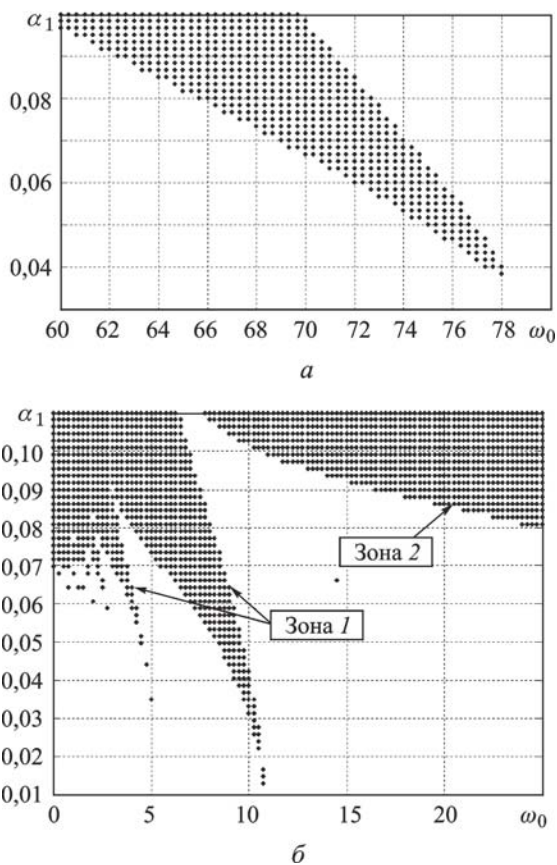


Рис. 7. Диаграмма устойчивости при $d/l = 0,01$; $\alpha_0 = 0,4$ (а) и $0,5$ (б); $F_p = 30$ (а) и 80 (б); $b = 0,6$ (а) и 0 (б)

щие параметрическую природу (зона 1), а в зоне 2 наблюдается потеря статической устойчивости стебля инструмента из-за изменения положения промежуточной опоры. Также в системе ярко выражены резонансные явления, характерные для параметрических колебаний, на частотах, чуть меньших собственной частоты. Это связано с наличием внутреннего трения в системе, которое растет пропорционально скорости движения промежуточной опоры $\dot{\alpha}(t)$.

Закритическое поведение стебля инструмента можно исследовать, численно интегрируя нелинейное уравнение колебаний (14), а также найти амплитудно-частотные характеристики системы в зависимости от значений параметров возбуждения.

Выводы. Разработана математическая модель процесса ружейного сверления, позволяющая исследовать нелинейные параметрические колебания стебля инструмента при заданном осевом возбуждении промежуточной опоры. С помощью линеаризованной системы уравнений исследована устойчивость поперечных колебаний стебля инструмента. Численно найдены такие параметры движения промежуточной опоры, при которых возможно параметрическое возбуждение поперечных колебаний инструмента. Найденные режимы могут быть использованы для обеспечения требуемых осевых вибраций режущих кромок, необходимых для дробления стружки.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 07-08-00253-а, 07-08-00592-а и гранта CRDF НОЦ-018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подураев В. Н. Резание с вибрациями. – М.: Машиностроение, 1970. – 352 с.
2. Троицкий Н. Д. Глубокое сверление. – Л.: Машиностроение, 1971.
3. Bayly P. V., Lamar M. T., Calvert S. G. Low-frequency regenerative vibration and the formation of lobed holes in drilling // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2002. – Vol. 124. – P. 275–285.
4. Bayly P. V., Metzler S. A., Schaut A. J., Young K. A. Theory of Torsional Chatter in Twist Drills: Model, Stability Analysis and Composition to Test. // ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2001. – Vol. 123. – P. 552–561.
5. Воронов С. А., Гуськов А. М. Возбуждение поперечных автоколебаний стебля инструмента при глубоком сверлении // Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин: Сб. стат. под ред. В.А. Светлицкого, О.С. Нарайкина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – С. 90–113.
6. Crespo da Silva M. R. M., Glynn C. C. Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I: Equations of motion // J. Struc. Mech. – 1978. – Vol. 6. – P. 437–448.
7. Crespo da Silva M. R. M. Nonlinear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams. I: Formulation // Int. J. Solid. Struc. – 1988. – Vol. 24. – P. 1225–1234.
8. Ararat H. N., Nayfeh A. H., Chin C. -M. Nonlinear nonplanar dynamics of parametrically excited cantilever beams // Proceedings of DETC97, ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, California, 1997.

9. Crespo da Silva M. R. M., Zaretsky C. L. Nonlinear flexural-flexural-torsional interactions in beams including the effect of torsional dynamics. I: Primary resonance // *Nonlinear Dynamics*. – 1994. – Vol. 5. – P. 3–23.
10. Arafat H. N., Nayfeh. Transfer of energy from high to low-frequency modes in the bending-torsion oscillation of cantilever beams // *Proceedings of DETC99, ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, 1999*.
11. Гуськов А. М. Нелинейная динамика вибрационного сверления. Роль уравнений образования новых поверхностей // *Тр. симпози. CSDT-2000*. – М., 2000. – С. 93–101.
12. Gouskov A. M., Panovko G. Y., Voronov S. A., Sinha S. C. Parametric maintenance and control of vibration while deep hole drilling // *Annals of CJRP. Journal of Manufacturing Systems*. – Vol. 36. – No. 5, 2007. – P. 413–418.
13. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 480 с.

Статья поступила в редакцию 24.03.2008

Сергей Александрович Воронов родился в 1953 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Прикладная механика” (ПК-5) МГТУ им. Н.Э. Баумана, иностранный член ASME. Автор более 50 научных работ в области прикладной механики, динамики технологических систем, аналитической динамики и нелинейной механики, численных методов прикладной механики.



S.A. Voronov (b. 1953) — Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University, foreign member of ASME. Author of more than 50 publications in the field of applied mechanics, dynamics of technological systems, analytical dynamics and nonlinear mechanics, numerical methods of applied mechanics.

Александр Михайлович Гуськов родился в 1948 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” (ПК-5) МГТУ им. Н.Э. Баумана, академик Академии нелинейных наук, иностранный член ASME. Автор более 100 научных работ в области прикладной механики, динамики технологических систем, теории устойчивости движения и нелинейной механики, численных методов прикладной механики.



A.M. Gus'kov (b. 1948) — D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University, academician of Academy of nonlinear sciences, foreign member of ASME. Author of more than 100 publications in the field of applied mechanics, dynamics of technological systems, theory of motion stability and nonlinear mechanics, numerical methods of applied mechanics.

Александр Игоревич Хвостов родился в 1984 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2006 г. Аспирант кафедры “Прикладная механика” (ПК-5) МГТУ им. Н.Э. Баумана.



A.I. Khvostov (b. 1984) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2006. Post-graduate of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of numerical methods of applied mechanics.