

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДВОЙНОГО БАЗИРОВАНИЯ

Рассмотрены новый способ создания натяга в соединениях с двойным базированием и устройства для его реализации. Приведены математические модели, описывающие упруго-деформированное состояние соединения и позволяющие оптимизировать его основные параметры, а также алгоритмы и конкретные результаты оптимизации в виде типоразмерного ряда сопрягаемых элементов.

Сравнительный анализ жесткости различных инструментальных соединений показывает, что наибольшую жесткость имеют соединения двойного базирования типа конус-торец. Известны три способа создания натяга в таких соединениях: последовательный, точная подгонка и упругое деформирование одного из базирующих элементов; каждый из этих способов имеет свои преимущества и недостатки.

Автором настоящей статьи разработан новый способ создания максимальной контактной жесткости соединения — способ независимого одновременного создания натяга в базирующих поверхностях путем подведения скользящих опор с необходимой жесткостью: между соединяемыми поверхностями (внутренней цилиндрической и наружной конической) устанавливается промежуточный упругий скользящий элемент с независимыми опорными базирующими поверхностями с направленной жесткостью, который позволяет при сборке с достаточной степенью точности автоматически создавать необходимые натяги в нужных плоскостях контакта с помощью осевых усилий затягивания конуса и упругих промежуточных элементов при оптимальных параметрах соединения.

Для реализации такого способа разработано устройство (рис. 1), условно названное “модуль универсал”. Жесткость системы двойного базирования типа модуля универсала состоит из жесткостей торцевого соединения и хвостовика, которые связаны между собой параллельно. Последняя определяется жесткостью двух опор, имеющих по два пояса контакта, соединенных согласно теории приведения жесткостей последовательно. Один пояс контакта — это сопряжение по цилиндрическим поверхностям, а другой — по коническим.

Для математического описания контактных упругих перемещений в цилиндрических сопряжениях воспользуемся следующими правилами и допущениями.

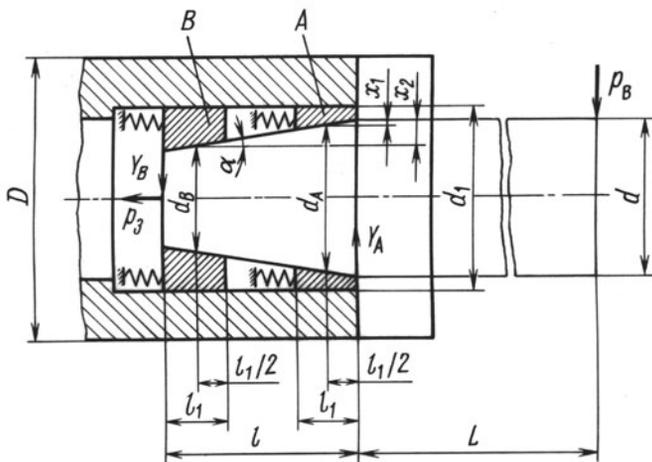


Рис. 1. Физическая модель с двойным базированием типа модуля универсала

1. Контактные перемещения и давления от натяга значительно больше, чем от внешней нагрузки.

2. При нагружении соединения суммарные давления с одной его стороны увеличиваются, а с другой уменьшаются.

3. Упругие контактные перемещения в точках, расположенных диаметрально противоположно, равны.

4. Давления и радиальные контактные перемещения от внешних нагрузок распределяются по окружности по косинусоидальному закону.

На основании известных зависимостей¹, определяющих контактную жесткость в цилиндрических соединениях с натягом, упругое перемещение в соединении можно представить в следующем виде:

$$\delta \approx \left(\frac{d\delta}{d\sigma_0} \right) \sigma_B \approx k\sigma_B = \frac{2kq}{\pi d};$$

здесь $\sigma_B = \frac{2q}{\pi d}$ — наибольшее давление от внешней нагрузки p_B ; q — нагрузка на единицу длины l соединения, $q = \frac{p_B}{l}$, кг/мм; $k = C_m\sigma_0^{m-1}$ — коэффициент контактной податливости, m — показатель степени для стальных закаленных деталей, шероховатость сопрягаемых поверхностей которых соответствует 8 и 9 классам; при повторных нагружениях $m \approx 0,5$, тогда

$$k = \frac{0,5C}{\sqrt{\sigma_0}}, \quad \frac{\text{МкМ}}{\text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}}, \quad (1)$$

¹Левина З. М., Решетов Д. Н. Контактная жесткость машин. — М.: Машиностроение, 1971. — 264 с.

где $\sigma_0 = \frac{p_3}{F}$ — давление затягивания, Па, p_3 — сила затягивания, Н, F — площадь, на которую действует сила затягивания базисующих элементов (определяется далее), м²; C — коэффициент, зависящий от качества обработки поверхностного слоя и физических свойств материала сопрягаемых деталей; для стальных и чугуновых деталей с шероховатостью по ГОСТ 2789-73 усредненные значения коэффициента $C = 0,4 \dots 0,5; 0,35; 0,25; 0,15$ и $0,07$ соответствуют следующим классам шероховатости: 7; 8; 9; 10 и 11.

Используя механическую модель (см. рис. 1) нового соединения и зависимости для определения контактной жесткости цилиндрических соединений, разработали математические описания контактных податливостей сопряжений хвостовика. Опорку рассматривали как абсолютно жесткое тело. Уравнения, определяющие контактные перемещения δ_k в опорах A и B , имеют вид

$$\delta_k = \delta_0 + \theta_0 L = \delta_A \left(1 + \frac{L}{l} \right) + \delta_B \frac{L}{l},$$

где $\delta_0 = \delta_A$ — перемещение в начале стыка; $\theta_0 = \frac{\delta_A + \delta_B}{l}$ — угол наклона в начале стыка; δ_{A1} , δ_{A2} и δ_{B1} , δ_{B2} — упругие перемещения в цилиндрической и конической поверхностях опоры A и B .

Как было сказано ранее, жесткость опор A и B определяется суммой жесткостей цилиндрического и конического сопряжений, следовательно,

$$\delta_A = \delta_{A1} + \delta_{A2} \quad \text{и} \quad \delta_B = \delta_{B1} + \delta_{B2}.$$

Принимая во внимание относительно малые угол α и ширину l_1 поясов контакта хвостовика по конической поверхности при расчете контактных перемещений в этих сопряжениях, используем те же зависимости, что и для цилиндрических сопряжений, учитывая угол α наклона, который после преобразований нивелируется, и уравнения становятся аналогичными. Следовательно, перемещения по отдельным поверхностям в опорах A и B можно записать в следующем виде:

$$\delta_{A_{1,2}} = \frac{2k_{A_{1,2}} Y_A}{F_{A_{1,2}}}, \quad \delta_{B_{1,2}} = \frac{2k_{B_{1,2}} Y_B}{F_{B_{1,2}}}, \quad \text{мкм};$$

$$k_{A_{1,2}} = \frac{Cm}{\sqrt{p_{3A}/F_{A_{1,2}}}}, \quad k_{B_{1,2}} = \frac{Cm}{\sqrt{p_{3B}/F_{B_{1,2}}}}, \quad \frac{\text{мкм}}{\text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}},$$

где $k_{A_{1,2}}$ и $k_{B_{1,2}}$ — коэффициенты контактной податливости в цилиндрическом и коническом сопряжениях опор A и B соответственно; $F_{A_{1,2}}$ и $F_{B_{1,2}}$ — площади цилиндрической и конической поверхностей

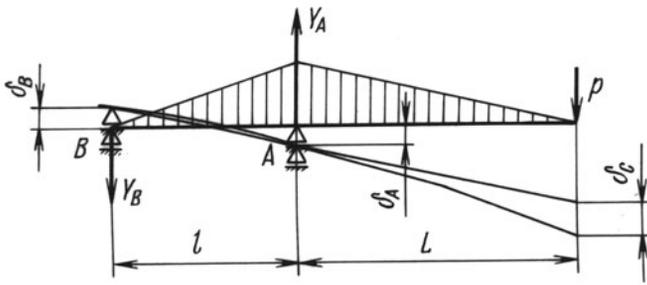


Рис. 2. Схема нагружения соединения

опор A и B соответственно: $F_{A_1(B_1)} = \pi d_1 l_1$; $F_{A_2} = \pi d_A l_1 = \pi(d_0 - l_1 \operatorname{tg} \alpha) l_1$; $F_{B_2} = \pi d_B l_1 = \pi[d_0 - (2l - l_1) \operatorname{tg} \alpha] l_1$; $d_A = d_0 - 2x_1 = d_0 - l_1 \operatorname{tg} \alpha$, где $x_1 = \frac{l_1}{2} \operatorname{tg} \alpha$; $d_B = d_0 - 2x_2 = d_0 - (2l - l_1) \operatorname{tg} \alpha$, где $x_2 = \left(l - \frac{l_1}{2}\right) \operatorname{tg} \alpha$; p_{3A}, p_{3B} — затяжные усилия в опорах A и B .

Реакции Y_A и Y_B опор определяются по уравнениям моментов (рис. 2):

$$\sum M_A = 0; \quad PL - Y_B l = 0, \quad Y_B = \frac{PL}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad P(L + l) - Y_A l = 0, \quad Y_A = \frac{P(L + l)}{l}.$$

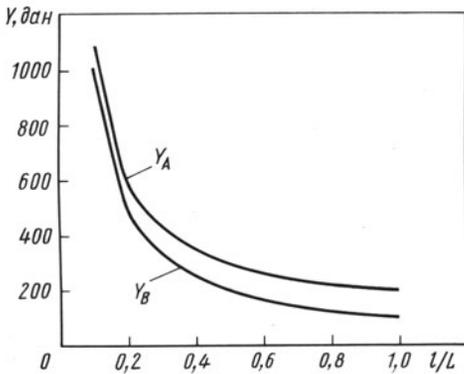


Рис. 3. Графики зависимостей реакций опор Y от соотношения длин l/L

Зависимость реакций Y опор оправки от расстояния l между ними для $p = 100$ дан и $L = 100$ мм приведена на рис. 3 и в таблице.

Приведенные математические зависимости позволяют оптимизировать длину хвостовика соединения и определить соотношения затяжных усилий на торце и в опорах хвостовика при максимальных общей или суммарной жесткостях.

Реакция опор A и B , дан	Расстояние l между опорами A и B , мм									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Y_A	1100	600	433,3	350	300	266,7	242,9	225	211,1	200
Y_B	1000	500	333,3	250	200	166,7	142,9	125	111,1	100

Одна из основных особенностей двойного базирования заключается в том, что согласно теории приведения жесткостей суммарная жесткость $j_{\Sigma} = j_T + j_{XB}$, а суммарные перемещения —

$$\delta_{\Sigma} = \frac{\delta_T \delta_{XB}}{\delta_T + \delta_{XB}}, \quad (2)$$

где j_T , δ_T и j_{XB} , δ_{XB} — жесткость и перемещение на торце и в хвостовой части соответственно.

Из уравнения (2) видно, что общая величина перемещений зависит от распределения ее составляющих δ_T и δ_{XB} :

если $\delta_T \gg \delta_{XB}$, то $\delta_{\Sigma} = \min$,

если $\delta_T \approx \delta_{XB}$, то $\delta_{\Sigma} = \max$.

Следовательно, для повышения общей жесткости соединений двойного базирования необходимо перераспределение затягивающей силы на ту соединительную базирующую поверхность, которая потенциально способна нести бóльшую жесткость, т.е. на торцевую поверхность. Несмотря на то, что жесткость хвостовой части соединения значительно меньше, чем жесткость торцевой части, о чем говорит коэффициент η_{XB} повышения жесткости, составляющий 0,15...0,25, длина хвостовика имеет важное значение для распределения контактной и собственной жесткостей для достижения ее общего максимального значения. Длина l хвостовика влияет не только на контактную, но и собственную жесткость, поэтому задача оптимизации заключается в определении такого значения l , при котором сумма контактного δ_k и собственного δ_c перемещений была бы минимальной, $\delta_k + \delta_c = \delta_{\min}$, т.е. оптимизировать длину l хвостовика целесообразно по критерию минимальной податливости.

Контактное перемещение хвостовой части определяется из уравнения

$$\delta_k = \delta_A \left(1 + \frac{L}{l} \right) + \delta_B \frac{L}{l}. \quad (3)$$

Собственное перемещение определяем согласно схеме нагружения (см. рис. 2), используя правило Верещагина и допустив, что потенциальная энергия при растяжении-сжатии и сдвиге от нагружения оправки внешними силами существенно меньше энергии при изгибе. Применительно к эпюре изгибающих моментов с наибольшей величиной в передней опоре получим $M_{II} = PL$;

$$\delta_c = \frac{PL^2}{3E} \left(\frac{l}{I_1} + \frac{L}{I_2} \right), \quad (4)$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции межопорной части и консоли оправки; E — модуль упругости.

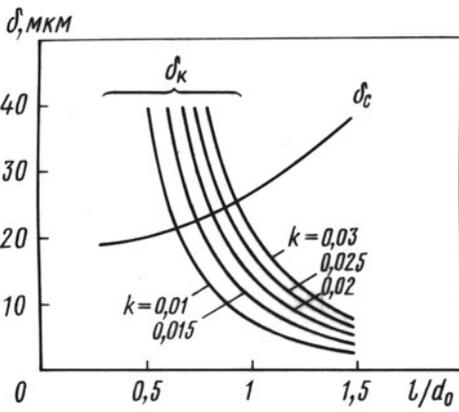


Рис. 4. Графики зависимости податливости δ от соотношения межопорной длины l к диаметру оправки d_0

соблюдается или в точке их пересечения при $\delta_c = \delta_k$, или в ее окрестностях.

Разработанный алгоритм (рис. 5) позволяет быстро и с достаточной точностью найти оптимальное соотношение l/d для каждого значения контактной податливости δ и ее коэффициента k , $l_{\text{опт}} = 1,2 \dots 1,5d$. Исходные данные для оптимизации: $D = 32, 40, 50, 63, 80, 100$ мм; $P = 100$ дан; $L = 100$ мм; $d_0 = 0,57D$; $d_1 = 1,15d_0$; $\alpha = 8^\circ 17'$; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $k = 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3, \frac{\text{МКМ}}{\text{Н} \cdot \text{мм}^{-2}}$.

Жесткость j торцевого соединения (см. рис. 1) можно определить по известным зависимостям¹ плоских кольцевых стыков: $j_t = \frac{M}{\varphi}$ или $j_t = \frac{P}{\varphi L}$, где $M = PL, \text{Н} \cdot \text{м}$; φ — угол поворота в стыке, $\varphi = \frac{k(1 - \chi)M \cdot 10^{-3}}{I}$, мкм/мм, k — коэффициент контактной податливости определяется по формуле (1); χ — величина, учитывающая податливость затяжных элементов, для винтов¹ $\chi = 0,1 \dots 0,2$, I — момент инерции кольцевого стыка,

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4), \quad \text{мм}^4.$$

Рассматривая зависимости по определению жесткости кольцевого стыка, можно для постоянного наружного диаметра D аналитически определить внутренний диаметр d , зависящий от типоразмера инструментальной системы, при котором жесткость соединения будет максимальной, т.е. оптимизировать соотношение d/D для всех систем по критерию максимальной жесткости. Согласно приведенным зависимо-

Проанализировав уравнения (3) и (4), выявили, что при изменении длины l меняются значения контактных и собственных податливостей. Причем при увеличении l контактная податливость уменьшается, а собственная увеличивается, что наглядно видно из графиков на рис. 4 ($D = 63$ мм и $L = 100$ мм). Это можно объяснить уменьшением реакций Y_A и Y_B опор при увеличении межопорной длины l . Из приведенных графиков следует, что условие $\delta_k + \delta_c = \delta_{\text{min}}$

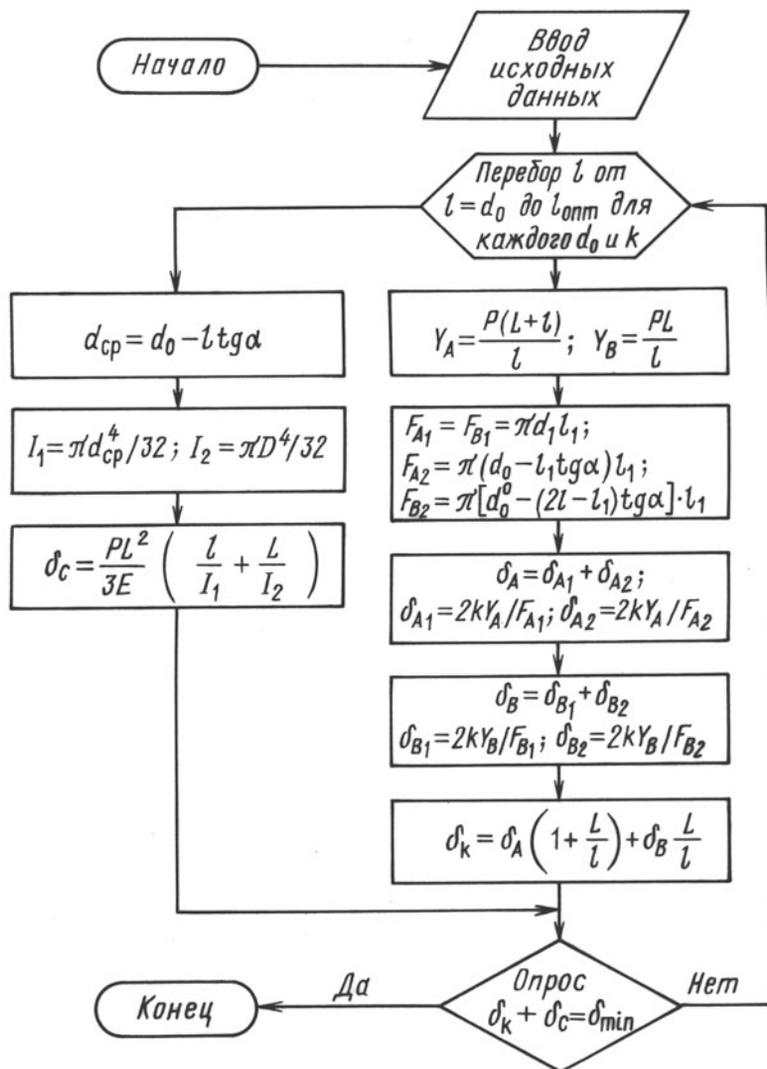


Рис. 5. Алгоритм оптимизации межопорной длины l

стям с увеличением внутреннего диаметра d кольцевого стыка возрастает давление σ_0 , следовательно, уменьшается коэффициент контактной податливости k . Одновременно уменьшается и момент инерции I площади стыка F .

В результате совместного решения приведенных уравнений, был оптимизирован диаметр d ; $d_0 = 0,57D$. Исходные данные для оптимизации: $D = 32, 40, 50, 63, 80$ и 100 мм; $p_3 = 200 \dots 1200$ дан; $m = 0,5$; $C = 0,25$; $\chi = 0,2$; $p = 100$ дан; $L = 100$ мм.

Графические зависимости $\varphi = f(d/D)$, где φ — в условных единицах, отнесенных к сплошному стыку, и $\delta = f(M)$ для системы $D = 63$ мм, где $\delta = \varphi L$ — податливость стыка, мкм, приведены на рис. 6, а и б, а блок-схема (алгоритм) оптимизации на — рис. 7.

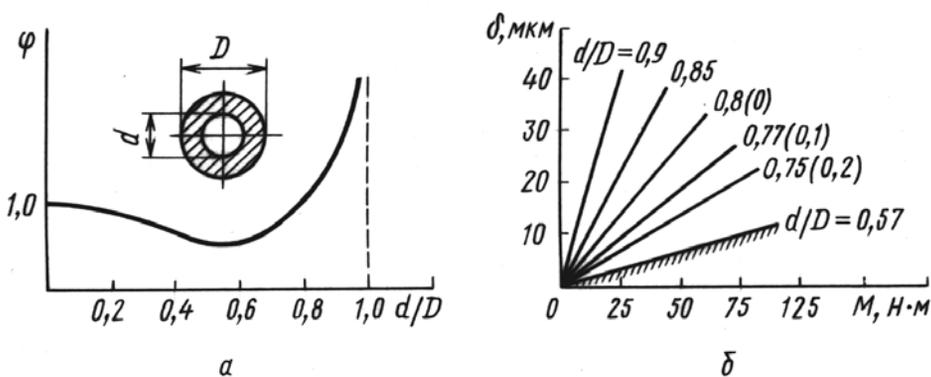


Рис. 6. Графики зависимостей угла поворота φ от размеров кольцевого стыка d/D (а) и податливости стыка δ от нагрузки M (б)

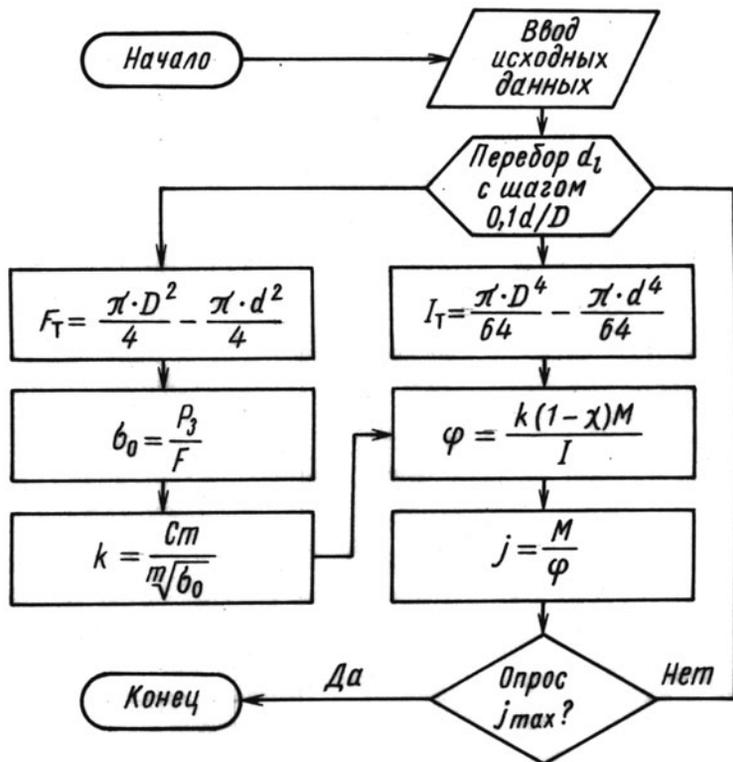


Рис. 7. Алгоритм оптимизации размеров кольцевого стыка $d_0 = f(D)$

В результате математического моделирования были оптимизированы главные параметры соединения d и l , на основе чего получен оптимальный размерный ряд соединительных элементов: $D = 32; 40; 50; 64; 80$ и 100 мм, $d = 20; 24; 30; 38; 48$ и 60 мм и $l = 25; 40; 50; 60$ и 75 мм соответственно.

Выводы. 1. Одним из эффективных инструментальных соединений является соединение двойного базирования “модуль универсал”,

благодаря которому обеспечивается высокая жесткость соединений созданием натяга в нужных плоскостях или местах контакта.

2. Относительно низкая стоимость соединения из-за незначительного влияния точности изготовления угла конуса на усилие затягивания и, следовательно, на жесткость соединения в целом и из-за замены точной внутренней конусной базирующей поверхности на цилиндрическую.

3. Исключаются и устраняются повреждения базирующих контактирующих поверхностей от перенаклепа.

4. Относительное скольжение базирующих поверхностей во время создания в них натяга позволяет при минимальных осевых усилиях получить большую контактную жесткость;

5. Возможность замены на другие стандартные отечественные и зарубежные инструментальные системы.

6. Определены оптимальные соотношения параметров соединений: для кольцевых стыков — отношение внутреннего диаметра к наружному $d/D = 0,57$; для конических хвостовиков — отношение длины к диаметру у основной плоскости $l/d = 1,2 \dots 1,5$.

Статья поступила в редакцию 15.12.2004

Константин Адамович Украженко родился в 1952 г., окончил в 1973 г. Могилевский машиностроительный институт. Канд. техн. наук, заслуженный изобретатель РФ, технический директор НПФ “Динамика” (г. Ярославль). Автор более 125 научных работ в области станкоинструментальной промышленности, робототехники и специального технологического оборудования для производства микроэлектронных приборов.

K.A. Ukrazhenko (b. 1952) graduated from the Mogilyov Mechanical Engineering Institute in 1973. Ph. D. (Eng.), Honoured Inventor of the Russian Federation, technical director of the Scientific and Industrial Firm “Dinamika” (city Yaroslavl). Author of over 125 publications in the field of machine-tool industry, robotics and special technological equipment for microelectronic device production.

