

УДК 536.2

А. В. Аттетков, Н. С. Беляков

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ТЕПЛОАКТИВНЫМ ТЕРМИЧЕСКИ ТОНКИМ СТЕРЖНЕВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

*Методом интегрального преобразования Лапласа найдено аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности для неограниченного твердого изотропного тела, содержащего термически тонкий теплоактивный стержневой элемент.*

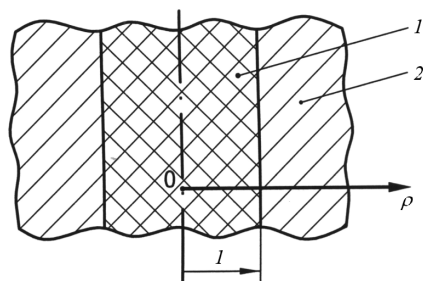
В теории теплопроводности важное место занимает математическая модель процесса формирования температурного поля в неограниченном твердом изотропном теле с цилиндрическим каналом, поверхность которого подвержена воздействию неподвижного или движущегося источника теплоты [1–6]. Одна из модификаций этой модели, представляющая практический интерес, предполагает наличие в твердом изотропном теле стержневого элемента, теплоактивность которого ассоциируется с применением термоэлектрических явлений при регулировании температурного состояния или термостатировании изучаемого твердого тела [7–10]. Трудности, возникающие при решении подобных задач аналитическими методами, хорошо известны [1–4], поэтому естественны попытки замены их упрощенными аналогами, которые при определенных условиях позволяют с достаточной степенью точности описывать изучаемый процесс. Один из возможных путей — это реализация идеи “сосредоточенная емкость” [10–12].

Цель проведенных исследований — нахождение и последующий анализ аналитического решения задачи нестационарной теплопроводности для неограниченного твердого изотропного тела, содержащего термически тонкий теплоактивный (нагревательный) стержневой элемент цилиндрической формы и заданного радиуса  $r_0$  с удельной (на единицу объема) мощностью тепловыделения  $q(r, t)$ .

В предположении идеальности теплового контакта в изучаемой системе (рис. 1) одномерная математическая модель процесса формирования температурного поля в ней, записанная в цилиндрической системе координат, может быть представлена в следующем виде:

**Рис. 1. Используемая расчетная схема:**

1 — стержневой элемент, 2 — твердое тело



$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \text{Fo}} = \chi \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho} \right) + \Lambda f(\rho, \text{Fo}) \right\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \text{Fo}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Theta_2}{\partial \rho} \right), \quad \rho > 1, \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\Theta_1(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} = 0 = \Theta_2(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0}; \tag{1}$$

$$\Theta_1(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\rho=1-0} = \Theta_2(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\rho=1+0};$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1-0} = \Lambda \frac{\partial \Theta_2(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1+0};$$

$$\Theta_2(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}>0} \in L^2[1, +\infty),$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном  $\text{Fo} > 0$  функция  $\Theta_2(\rho, \text{Fo})$  интегрируема с квадратом по пространственному переменному  $\rho \in [1, +\infty)$ ;  $\rho = \frac{r}{r_0}$ ;  $\text{Fo} = \frac{a_2 t}{r_0^2}$ ;  $\Theta_k = \frac{T_k - T_0}{T_0}$ ,  $k \in \{1, 2\}$ ;

$\chi = \frac{a_1}{a_2}$ ;  $\Lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ;  $f = \frac{q r_0^2}{\lambda_2 T_0}$ ,  $t$  — время;  $r$  — пространственное переменное;  $T$  — температура;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $a$  — коэффициент температуропроводности; индексы “1” и “2” относятся к стержневому элементу и твердому телу соответственно; индекс “0” — к начальным значениям величин.

Для замыкания системы (1) ее необходимо дополнить физически очевидным условием симметрии

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \rho \frac{\partial \Theta_1(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} = 0,$$

фактически означающим, что температура  $\Theta_1(\rho, \text{Fo})$  на оси стержневого элемента (при  $\rho \rightarrow +0$ ) должна быть конечной при каждом фиксированном  $\text{Fo} > 0$ .

Пусть далее

$$\langle \Theta(\text{Fo}) \rangle = 2 \int_0^1 \Theta_1(\rho, \text{Fo}) \rho d\rho$$

— среднеинтегральная по стержневому элементу температура, а также допустима реализация идеи “сосредоточенная емкость” [10–12]:

$$\Theta_1(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\rho=1-0} = \langle \Theta(\text{Fo}) \rangle = \Theta_2(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\rho=1+0}, \quad \text{Fo} \geq 0.$$

В этом случае исходная математическая модель (1) преобразуется к ее упрощенному аналогу — искомой математической модели “сосредоточенная емкость”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right), \quad \rho > 1, \quad \text{Fo} > 0; \\ \Theta(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo}=0} &= 0; \\ \frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} &= -Q(\text{Fo}) + \varepsilon \frac{\partial \Theta(\rho, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} \Big|_{\rho=1}; \\ \Theta(\rho, \text{Fo}) \Big|_{\text{Fo} > 0} &\in L^2[1, +\infty), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Theta(\rho, \text{Fo}) = \begin{cases} \Theta_2(\rho, \text{Fo}), & \rho > 1; \\ \langle \Theta(\text{Fo}) \rangle, & \rho = 1; \end{cases}$$

$$\Theta(\text{Fo}) = \int_0^1 f(\rho, \text{Fo}) \rho d\rho$$

— интегральная величина, характеризующая реализуемый режим теплового воздействия на поверхности  $\rho = 1$  твердого тела,  $\varepsilon = \frac{1}{2\chi\Lambda}$

— определяющий безразмерный параметр. Заметим, что в используемых безразмерных переменных параметр  $\varepsilon$  зависит лишь от соотношения теплофизических характеристик материалов термически тонкого стержневого элемента и твердого тела. По смыслу решаемой задачи этот параметр положителен. Отметим также интересный по физической интерпретации случай  $\chi\Lambda = 1$ , приводящий к значению параметра  $\varepsilon = 0,5$ .

Математическая модель (2) представляет собой смешанную задачу нестационарной теплопроводности, в которой наличие термически тонкого теплоактивного стержневого элемента учтено граничным

условием при  $\rho = 1$ , явно содержащим производную от температуры по времени. При  $\varepsilon = 0$  и  $Q(\text{Fo}) = Q_0 = \text{const}$  решение этой задачи получено в работах [1, 3] путем применения интегральных преобразований Лапласа по переменному Fo и Вебера по переменному  $\rho$  соответственно.

Рассматриваемая задача (2) имеет единственное решение [13], для нахождения которого воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по переменному Fo [1–4]. Пусть далее функции  $\Theta(\rho, \text{Fo})$  и  $Q(\text{Fo})$  являются оригиналами интегрального преобразования Лапласа:

$$L[\cdot] \equiv \int_0^{\infty} \exp(-s\text{Fo}) \cdot d\text{Fo} \quad (3)$$

— оператор прямого интегрального преобразования Лапласа по переменному Fo с параметром  $s \in \mathbb{C}$  и

$$U(\rho, s) = L[\Theta(\rho, \text{Fo})]; \quad (4)$$

$$\Pi(s) = L[Q(\text{Fo})].$$

Тогда, согласно выражениям (2) и (4), изображение  $U(\rho, s)$  интегрального преобразования Лапласа (3) функции  $\Theta(\rho, \text{Fo})$  должно удовлетворять уравнению

$$sU(\rho, s) = \frac{d^2U(\rho, s)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU(\rho, s)}{d\rho}, \quad \rho > 1; \quad (5)$$

граничному условию

$$\frac{dU(\rho, s)}{d\rho} = -\Pi(s) + \varepsilon sU(\rho, s), \quad \rho = 1, \quad (6)$$

и при каждом фиксированном значении параметра  $s$  принадлежит классу функций  $L^2[1, +\infty)$ , интегрируемых с квадратом по пространственному переменному  $\rho \in [1, +\infty)$ .

Решение  $U(\rho, s)$  уравнения (5) из класса  $L^2[1, +\infty)$  имеет следующий вид:

$$U(\rho, s) = C(s)K_0(\rho\sqrt{s}), \quad (7)$$

где  $C(s) = K_0^{-1}(\sqrt{s})U(1, s)$ ,  $U(1, s)$  — изображение интегрального преобразования Лапласа (3) функции  $\Theta(1, \text{Fo})$ , задающей температурный профиль поверхности  $\rho = 1$  твердого тела;  $K_\nu(\cdot)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $\nu$  [1, 2, 14]. С учетом тождества [14]  $K'_0(\cdot) = -K_1(\cdot)$ , согласно выражениям (6) и (7), получаем

$$U(\rho, s) = \Pi(s)\Phi(\rho, s), \quad \rho \geq 1; \quad (8)$$

$$\Phi(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{\sqrt{s}[\varepsilon\sqrt{s}K_0(\sqrt{s}) + K_1(\sqrt{s})]}. \quad (9)$$

Для завершения процедуры решения задачи (2) осталось реализовать переход от изображения  $U(\rho, s)$ , определяемого равенствами (8) и (9), к соответствующему оригиналу  $\Theta(\rho, Fo)$  с использованием формулы обращения интегрального преобразования Лапласа [1–4]:

$$\Theta(\rho, Fo) = L^{-1}[U(\rho, s)] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(sFo)U(\rho, s) ds,$$

где  $L^{-1}[\cdot]$  — оператор обращения интегрального преобразования Лапласа, поскольку непосредственное его обращение с использованием таблиц “изображение–оригинал” [2, 15] в рассматриваемом случае не представляется возможным. Для преодоления возникших трудностей воспользуемся следующим приемом. Полагая

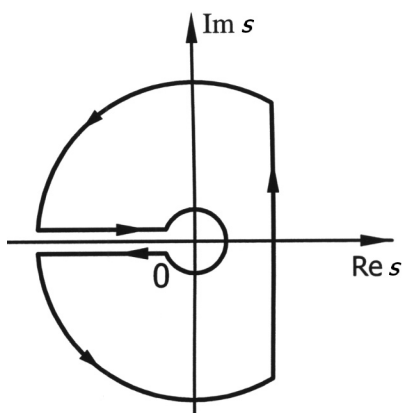
$$\varphi(\rho, Fo) = L^{-1}[\Phi(\rho, s)], \quad Q(Fo) = L^{-1}[\Pi(s)], \quad (10)$$

согласно теореме о свертках [2], находим

$$\Theta(\rho, Fo) = \int_0^{Fo} Q(Fo - \tau)\varphi(\rho, \tau)d\tau, \quad \rho \geq 1, \quad Fo \geq 0. \quad (11)$$

Таким образом, если вид зависимости  $Q = Q(Fo)$  конкретизирован, то для определения температурного поля в твердом теле необходимо лишь найти оригинал  $\varphi(\rho, Fo)$  соответствующего изображения  $\Phi(\rho, s)$ .

Поскольку, согласно уравнению (9), изображение этого оригинала имеет единственную особую точку в начале координат комплексной плоскости, являющуюся точкой ветвления, то, воспользовавшись стандартной техникой вычисления интегралов Меллина [1, 2] и ориентированным контуром, приведенным на рис. 2, а также известными представлениями [14] модифицированных функций Бесселя  $K_\nu(\cdot)$  через функции Бесселя  $J_\nu(\cdot)$  и  $Y_\nu(\cdot)$  индекса  $\nu$  первого и второго рода соответственно, приходим к следующему результату:



**Рис. 2. Ориентированный контур в комплексной плоскости  $s$  для вычисления интеграла Меллина**

$$\varphi(\rho, Fo) = L^{-1}[\Phi(\rho, s)] \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-s^2 Fo) \frac{\alpha(s)Y_0(\rho s) - \beta(s)J_0(\rho s)}{\alpha^2(s) + \beta^2(s)} ds, \quad \rho \geq 1, Fo \geq 0, \quad (12)$$

где

$$\alpha(s) = J_1(s) - \varepsilon s J_0(s); \quad (13)$$

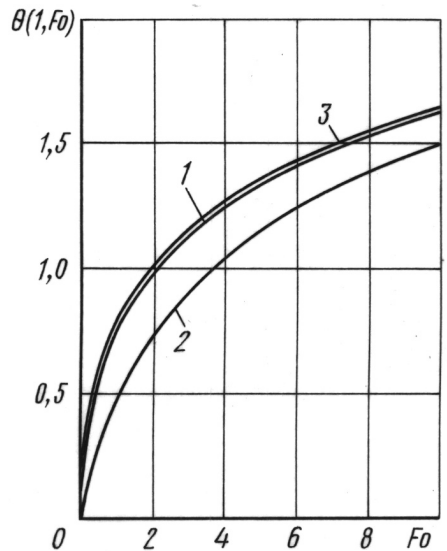
$$\beta(s) = Y_1(s) - \varepsilon s Y_0(s).$$

Воспользовавшись результатами проведенных исследований, подробнее проанализируем особенности процесса формирования температурного поля в неограниченном твердом теле с термически тонким теплоактивным стержневым элементом при  $Q(Fo) = Q_0 = \text{const}$ . В этом случае, согласно уравнениям (11) и (12), температурное поле в твердом теле определяется как

$$\Theta(\rho, Fo) = \frac{2Q_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-s^2 Fo}}{s^2} \frac{\alpha(s)Y_0(\rho s) - \beta(s)J_0(\rho s)}{\alpha^2(s) + \beta^2(s)} ds, \quad \rho \geq 1, Fo \geq 0, \quad (14)$$

где функции  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  задаются равенствами (13). При  $\varepsilon = 0$  интегральное представление (14) для функции  $\Theta(\rho, Fo)$  преобразуется к полученному в работах [1, 3]. Температуру граничной поверхности твердого тела можно определить из равенства (14) при  $\rho = 1$ . Заметим, что для практики значение этой температуры представляет наибольший интерес, поскольку позволяет оценить величину предельно достижимого разогрева твердого тела, подверженного тепловому воздействию.

На рис. 3 приведены результаты расчетов температурного профиля  $\Theta(1, Fo)$  поверхности  $\rho = 1$  твердого тела с теплоактивным термически тонким стержневым элементом при воздействии теплового потока



**Рис. 3.** Зависимость безразмерной температуры поверхности твердого тела, содержащего термически тонкий теплоактивный стержневой элемент, от времени при различных значениях параметра  $\varepsilon$ : 1 — 0,1; 2 — 1,0; 3 — 0

постоянной мощности  $Q = Q_0 \equiv 1$  и различных параметрах  $\varepsilon: 0,1$  (кривая 1) и  $1,0$  (кривая 2). Для сравнения здесь же представлены результаты расчетов температурного профиля поверхности  $\rho = 1$  цилиндрического канала, подверженного тепловому воздействию ( $\varepsilon = 0$ ; кривая 3). Отметим значительное влияние определяющего безразмерного параметра  $\varepsilon$  рассматриваемой математической модели “сосредоточенная емкость” (2) на формируемый температурный профиль  $\Theta(1, Fo)$ . Видно, что увеличение параметра  $\varepsilon$  снижает температуру поверхности  $\rho = 1$  твердого тела, т.е. приводит к повышению ее термозащищенности. При этом сам факт наличия термически тонкого стержневого элемента в неограниченном твердом теле оказывает влияние на процесс формирования в нем стационарного температурного поля на всем временном интервале его формирования.

Таким образом, в настоящей работе предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в неограниченном твердом изотропном теле, содержащем термически тонкий теплоактивный стержневой элемент, и установлен ее определяющий безразмерный параметр. Методом интегрального преобразования Лапласа найдено аналитическое решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Отмечено значительное влияние относительной теплопроводности твердого тела и его теплоинерционных свойств относительно стержневого элемента на температурное состояние изучаемой системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

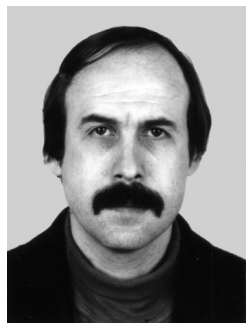
1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.
3. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 284 с.
4. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
5. Пинскер А. В. Аналитическое решение нестационарного уравнения теплопроводности в пространстве, содержащем бесконечную круговую цилиндрическую полость с движущимся в ней источником тепла // Докл. РАН. – 2000. – Т. 372, № 5. – С. 604–607.
6. Пинскер А. В. Распределение температурных и квазистатических термоупругих полей в пространстве, содержащем бесконечную цилиндрическую полость с расположенным по ее периметру кольцевым источником тепла // Тепломассообмен ММФ-2000: Труды IV Минского международного форума по тепломассообмену. – Минск, 2000. – Т. 3. – С. 236–239.
7. Зарубин В. С. Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 184 с.

8. Радугин А. В., Столин А. М., Власов В. А. О критических условиях тепловой неустойчивости при электронагреве керамики // Теплофизика высоких температур. – 1990. – Т. 28, № 4. – С. 722–727.
9. Зарубин В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
10. Аттетков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С. Термоактивная прокладка как средство управляемого воздействия на температурное поле конструкции // Изв. РАН. Энергетика. – 2002. – № 4. – С. 131–141.
11. Пудовкин М. А., Волков И. К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. – 188 с.
12. Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 3. – С. 81–86.
13. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и С. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
15. Диткин В. А., Прудников А. В. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. школа, 1965. – 468 с.

Статья поступила в редакцию 11.10.2004

Александр Владимирович Аттетков родился в 1955 г., окончил в 1979 г. МВТУ им. Н.Э.Баумана. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 80 научных работ в области физики горения и взрыва, химической физики и математического моделирования.

A.V. Attetkov (b. 1955) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1979. Ph. D. (Eng.), senior researcher, assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 80 publications in the field of physics of combustion and explosion, chemical physics and mathematical simulation.



Николай Сергеевич Беляков родился в 1984 году, студент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Специализируется в области математического моделирования.

N.S. Belyakov (b. 1984) studies in “Applied Mathematics” Department of Bauman Moscow State Technical University, specializes in the field of mathematical simulation.

