

А. М. Пылаев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗНИКНОВЕНИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ПОЛОСТЯХ

Разработан метод анализа плоских линейных возмущений равновесия вязкой жидкости, газа или жидкой фазы теплоаккумулирующего материала в полостях с сечением, замыкаемым ломаной прямой. Возможности метода показаны на примере каналов трапециевидного сечения. Обоснован способ построения решений однородной дифференциальной задачи относительно функции тока и температуры — в форме двойных рядов типа Фурье. Для определения констант получена бесконечная линейная система уравнений, алгебраическая относительно числа Рэлея и допускающая редукцию. Приведены конкретные результаты, выявлено их хорошее согласование с известными литературными данными.

Первоначальная цель проводимого анализа — получить количественные оценки условий возникновения свободной конвекции для внутренних полостей, образованных плоскими участками с ломаной прямой в сечении, неограниченными в одном из координатных направлений (z); также необходимо выявить характер возникающих критических движений. Известно [1, 2], что последние могут быть использованы в качестве естественного полного базиса для разложения любого конвективного движения в полости. Это обстоятельство может быть полезно при итерационном аналитическом решении нелинейных задач конвекции.

Указанная область рассмотрения задачи была выбрана, в частности, с учетом возможного многообразия геометрии каналов или прослоек в элементах конструкции приборных отсеков космических аппаратов, подлежащих тепловому расчету. Предусмотрены варианты как газового, так и жидкостного (расплавы теплоаккумулирующих материалов) заполнения каналов.

Используемый метод поясняется применительно к каналам трапециевидного сечения. Для параллельных участков границы каналов, дающих основания трапеций в сечении, принята ориентация в направлении y действия массовых сил (центробежных или слабой гравитации). Для этих участков можно учитывать как идеальную (бесконечно большую) теплопроводность, так и идеальную тепловую изоляцию. Участки же границ, не совпадающие с направлением y по ориентации, считаются идеально теплопроводными.

Для областей рассматриваемого типа выполнимость необходимого условия равновесия неравномерно нагретой жидкости, а именно вертикальность (ориентация вдоль y) и постоянство градиента температуры в жидкости, считается возможной, вследствие соответствующего расположения источников теплоты на границах областей. В частности, при параллельности теплопроводящих участков границы (ограниченные в направлении x горизонтальные и наклонные каналы постоянной высоты) достаточно обеспечить независимость температуры этих участков от координат x , z и времени.

Обсуждаемая задача представляет собой частный случай явления конвективной устойчивости, изучаемого гидродинамикой со времен экспериментов Бенара (1900 г.) и теоретических исследований Рэлея (1916 г.). Начиная с 50-х годов, исследования развивались бурными темпами в связи с многочисленными приложениями в области учения о теплообмене, в геофизике и астрофизике. Систематическое изложение состояния вопроса было приведено в работах [1, 3]. Должное внимание конвективным течениям и устойчивости уделяется и в настоящее время, в частности, в связи с проблемами микрогравитации [4].

В монографиях [1 и 5] найдены ссылки на информацию только для частного варианта области рассмотрения, а именно для прямоугольных каналов. В работах [6, 7] принята идеальная теплопроводность всех границ, в работе [1] назван лишь один результат [8] для области с изолированными боковыми стенками: при единичном отношении высоты Y канала (размера в направлении теплообмена) к его ширине L критическое число Рэлея $Ra_{кр} = 2586$.

Опубликованы и некоторые результаты решения частных задач численным методом установления стационарного режима, например, получено $Ra_{кр} = 7800$ при $Y = 2$ [9]. Но известно, что реализация метода связана со значительными трудностями, так как время установления по мере приближения к порогу устойчивости растет. Поэтому должное внимание было уделено аналитическим возможностям решения.

Строгое аналитическое решение задачи, по-видимому, не рассматривалось даже для прямоугольной области с идеальной теплопроводностью границ. Хорошо известен лишь подход [1] с реализацией метода Бубнова–Галёркина — при априорном выборе для функции тока ψ относительно простой структуры решения (ψ_p), удовлетворяющей краевым условиям и линейной относительно конечного и даже малого числа неопределенных коэффициентов $\{A_n; n = 1 \dots N\}$. При этом, даже в случае использования для температуры t соответствующего точного решения (t_p) задачи теплопроводности, для функций ψ_p и t_p (уже

выбранной структуры с конечным числом констант) не следует ожидать их строгого удовлетворения уравнению с оператором Лапласа для ψ (см. далее). На основе последнего получают совокупность интегральных выражений для определения коэффициентов $\{A_n\}$, обеспечивающих решение, лишь оптимальное в смысле приближения к точному, без возможности оценки его погрешности. Поэтому, строго говоря, не исключена погрешность и в определении $Ra_{кр}$ при последующем использовании решений типа $\{\psi_p$ и $t_p\}$, хотя достоверность ранее полученных результатов здесь не подвергается сомнению.

При участии автора настоящей работы предпринята определенная модернизация описанного подхода с построением точных решений такой задачи в форме двойных рядов типа Фурье [10, 11] или типа Маклорена [12], в которых каждое из слагаемых удовлетворяет граничным условиям. Для определения констант в этих разложениях получена бесконечная линейная система уравнений, алгебраическая относительно числа Рэлея.

Второй подход технически проще и более экономичный. В этом случае теоретическое обоснование редуцируемости [13] бесконечной системы не получено; однако, вследствие явной разреженности матрицы ее коэффициентов, редукция системы вполне допустима при определении $Ra_{кр}$. Полученные в работе [12] значения хорошо согласуются с известными литературными данными. Однако неудовлетворительными по точности оказываются результаты по структуре критических движений, по функциональным зависимостям ψ и t от координат. В настоящей работе отдано предпочтение первому подходу с рядами Фурье из-за почти очевидной редуцируемости системы; выявление значений $Ra_{кр}$ и структуры движений при этом связано с условиями обращения в ноль достаточно большого, но конечного определителя. Метод имеет все преимущества аналитического подхода. Соответствующая программа для ПК, хотя и реализует более сложный алгоритм решения, оказалась проще и удобнее в практическом использовании. Задача остается интересной и в связи с возможностью других приложений развиваемого подхода: к решению широкого класса задач с переменными коэффициентами при производных (и даже слабо нелинейных задач), в том числе и применительно к анализу устойчивости конвективных течений.

В работе использованы уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска [1], основным моментом в которых является предположение о “слабой” конвекции: вызванные неоднородностью температуры отклонения плотности от среднего значения предполагаются прене-

брежимо малыми во всех уравнениях, кроме уравнения движения, где это отклонение учитывается лишь с подъемной силой.

Рассматриваются малые нестационарные возмущения равновесия (линейная теория устойчивости). Соотношения, выводимые из исходных уравнений подстановкой значений $\{v_1, t_0 + t_1, p_0 + p_1\}$ для скорости, м/с, температуры, К, и давления, Па, соответственно, при этом оказываются линейными, так как можно пренебречь квадратичными по возмущениям членами. Новая система уравнений приведена к безразмерному виду с использованием в качестве единиц измерения $L, AL, a/L, L^2/\nu, \nu\rho_0 a/L^2$ — для расстояния, температуры, скорости, времени и давления соответственно; здесь приняты обозначения a, ν, ρ, A — для температуропроводности ($\text{м}^2/\text{с}$), кинематической вязкости ($\text{м}^2/\text{с}$), плотности ($\text{кг}/\text{м}^3$) и равновесного градиента температуры ($\text{К}/\text{м}$) соответственно. Подстановка в полученную систему частных решений, зависящих от времени τ (с) по экспоненциальному закону, так называемых “нормальных” возмущений: $\{v, p, t\} \sim \exp(-\lambda\tau)$, где λ — декремент возмущения (с^{-1}), — приводит к системе амплитудных уравнений. При $\lambda = 0$ получаются уравнения нейтральных возмущений, характеризующие условия, при которых возмущение не затухает и не нарастает. Эти условия как раз и определяют границу устойчивости равновесия относительно данного возмущения. С чисто математической точки зрения доказательство неустойчивости равновесия сводится к доказательству существования решений краевой задачи для нейтральных возмущений. В настоящей работе выведенные таким образом уравнения применяются для анализа явлений в областях ограниченных объемов, в которых критические движения имеют, в общем случае, существенно трехмерную структуру. Но рассматриваются лишь плоские возмущения, соответствующие решениям задачи, не зависящим от координаты z : именно такие возмущения, в первую очередь, наиболее опасны в смысле нарушения равновесия. После введения безразмерной функции тока ψ систему уравнений плоских нейтральных возмущений можно представить в форме:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\psi + R\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \Delta t + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0; \\ \Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} x \in (x_1; x_2), \quad y \in (y_1; y_2); \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 1; \quad 0 \leq y_i = a_i x + c_i \leq Y, \quad i \in \{1; 2\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача подлежала рассмотрению при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 y \in y_i : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = t = \psi = 0; \\
 x \in x_i : \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \Big|_{r=2} \quad \text{или} \quad t = 0 \Big|_{r=1},
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где γ — род условий для t . Задача заключалась в определении действительных значений $\text{Ra} > 0$ (собственных чисел), обеспечивающих нетривиальное решение системы (1), (3) относительно t, ψ (собственных функций). Собственные функции задачи (1), (3) целесообразно искать в виде линейной суперпозиции некоторых функций, называемых базисными и удовлетворяющих граничным условиям. При рекомендации метода Бубнова–Галеркина [13] указан способ определения коэффициентов разложения и подчеркивается, что успех в применении метода определяется выбором структуры и числа базисных функций, входящих в разложение. При удачном выборе базиса достаточно точные результаты получаются уже при аппроксимации решения сравнительно небольшим числом функций. Но, естественно, для рассматриваемой задачи конкретных рекомендаций нет. К тому же применение метода приводит лишь к принципиально приближенному решению. В работах [10, 11] и в настоящей работе используются следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 \psi = \sum_{r,s=1}^N A_{rs} H f_4 \Pi_x \Pi_y^2; \quad t = \sum_{r,s=0}^N B_{rs} H f_2 \Pi_y \Pi_x^{r-1}; \\
 H = \sin(\pi r x) \sin(\pi s y / Y), \quad f_u = 1/(r^u + s^u), \quad \Pi_z = \prod_i (z - z_i).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Для выявления системы уравнений относительно коэффициентов $\{A_{rs}\}, \{B_{rs}\}$ зависимости (5) нужно подставить в уравнения (1), выполнить дифференцирование, провести переразложение выражений в левых частях уравнений в ряды уже использованного типа, но с гораздо более сложной структурой коэффициентов, и, наконец, приравнять каждый из таких коэффициентов соответствующим значениям в правых частях (нулевым). Двум исходным уравнениям (1) соответствуют две полученные совокупности ($\{n\} = \{1; 2\}$) соотношений:

$$\sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^S [B_{rs} E_{rs}^{kl} + A_{rs} F_{rs}^{kl}] = 0, \quad \{k\} = \{l\} = 1 \dots N, \quad R = S = N.
 \tag{6}$$

Коэффициенты в выражении (6) представимы в форме:

$$F_{rs}^{kl} = f_4 \sum_{p,q} b_{pq}(G(M) + 2G(2, 2)|_{n=1}); \quad E_{rs}^{kl} = \text{Raf}_2 \sum_{p,q} d_{pq}G(K);$$

$$(M, K) \in \{(4, 0; 1)_{n=1}, (1; 0, 2)_{n=2}\}; \quad G(j) = G(j; 0) + G(0; j). \quad (7)$$

В соотношениях (7) использованы обозначения:

$$G(i; j) = S_{kr}^{xp,i} S_{ls}^{yq,j}; \quad S_{kr}^{\varphi p,j} = -e_{j/2} r^j \sum_I I H_{k+Ir}^p / 2, \quad j \in \{0; 2; 4\};$$

$$S_{kr}^{\varphi p,1} = 0,5r \left(\sum_I (D_p - p H_{k+Ir}^{p-1}) / (k + Ir); \right.$$

$$I \in \{1, -1\}, \quad e_j = (-1)^j; \quad L_\varphi \in \{1|_{\varphi=x}, Y|_{\varphi=y}\}; \quad (8)$$

$$D_p \in \{L_\varphi^p e_{k+r}|_{p \neq 0}, (e_{k+r} - 1)|_{p=0}\}; \quad H_k^p = \int_0^{L_\varphi} \varphi^p \cos(k\varphi\pi/L_\varphi) d\varphi;$$

$$H_k^p \in \{L_\varphi^{p+1}/(p+1)|_{k=0}, h_k^{\varphi p}|_{k \neq 0}\}; \quad |h_k^{\varphi p}| < p L_\varphi^{p+1}/(k\pi)^2.$$

С учетом уравнений (соотношений) для коэффициентов в выражениях (6) получены следующие оценки:

$$rs \neq kl, \quad n = 1: \quad |F_{rs}^{kl}| < C_1 \left| \sum_{p,q} h_{pq} b_{pq} \right|,$$

$$|E_{rs}^{kl}| < C_2 \text{Ra} \left| \sum_{p,q} d_{pq} \Phi / (r^2 + s^2) \right|; \quad \Phi = h_{k-r}^{xp} s D_q / (l - s);$$

$$rs \neq kl, \quad n = 2: \quad |F_{rs}^{kl}| < C_2 \left| \sum_{p,q} b_{pq} (\Phi + h_{l-s}^{yq} r D_p / (k - r)) / (r^4 + s^4) \right|,$$

$$|E_{rs}^{kl}| < C_1 \text{Ra} \left| \sum_{p,q} d_{pq} h_{pq} \right|;$$

$$rs = kl, \quad |F_{rs}^{kl}|_{n=1} > C_3 \approx \left| \sum_{p,q} \Psi_{pq} b_{pq} \right|, \quad |E_{rs}^{kl}|_{n=2} > C_4 \approx \text{Ra} |\Psi_{pq} d_{pq}|;$$

$$h_{pq} = h_{k-r}^{xp} h_{l-s}^{yq}; \quad \Psi_{pq} = L_y^{q+1} / ((p+1)(q+1)); \quad C_1 \approx C_2 \approx 1. \quad (9)$$

Выражения (6) можно рассматривать как систему уравнений относительно

$$\{A_{rs}\}, \{B_{rs}\}; \quad \{r\} = \{s\} = 1 \dots N. \quad (10)$$

Точное решение задачи гарантировано при $N \rightarrow \infty$ в выражении (6). Однако естественно считать, что при правильном подборе коэффициентов (10) равенства (5) выполняются с нужной точностью и при конечном N . Но возможно ли правильное определение коэффициентов (10) на основе решения системы (6) при конечном N , т.е. возможна ли редукция [13] этой системы?

Удобно последовательно согласованное расположение двух множеств из коэффициентов (10) и двух множеств уравнений из выражений (6), с $n \in \{1; 2\}$ — по возрастанию сумм $(r + s)$ и $(k + l)$ соответственно; в пределах же каждой группы с совпадающей суммой размещение возможно в порядке роста 1-го индекса (r или k). В частности

$$\begin{aligned} & \{ \{ A_{rs}, s = 1 \dots m - 1 \}, m = r + s = 2 \dots 2N \} = \\ & = \{ A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{13}, A_{22}, A_{31}, A_{14}, A_{23}, A_{32}, A_{41} \dots \}. \end{aligned}$$

При таком подходе, если $r = k, s = l$, коэффициенты F_{rs}^{kl} или E_{rs}^{kl} будут диагональными в общей матрице коэффициентов для последовательно записанных уравнений из выражения (6). При разложении (5) такие диагональные элементы оказываются преобладающими по модулю в любой строке матрицы, и удается доказать неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{r,s=0}^{\infty} (Z_E^2 + Z_F^2) / (Z_\varphi^2|_{rs=kl}) < \infty, \\ & Z_E = E_{rs}^{kl}, \quad \varphi \in \{ F|_{n=1}, E|_{n=2} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполнение неравенства (11), обеспечивающее возможность редукции [13], по существу является следствием ограниченности интеграла

$$\begin{aligned} & \iint_{k,l} dkdl \iint_{r,s} drds / ((k - l)^4 (r - s)^4), \\ & (k, l, r, s) \in \{ 1 \dots \infty \}, \quad (|k - l|, |r - s|) \geq 1. \end{aligned}$$

Итак, решение задачи сведено к анализу определителя конечной линейной алгебраической системы (6). Из условия нетривиальности решения этой системы следует, что искомые значения Ra должны обращать в нуль названный определитель $\delta(\text{Ra})$, записанный для достаточно больших, но конечных значений N . Значения определителей на ПК вычислялись с привлечением внешней памяти по методу, представляющему обобщение известного подхода Гаусса: с последовательным исключением групп переменных, с применением обращения матриц. Определитель $\delta(\text{Ra})$ — сложная функция, часто с большим диапазоном абсолютных значений в пределах даже весьма узкого интервала

изменения ее знака. Функции ψ и t также чувствительны к изменению значения Ra , но в меньшей степени.

Для каждого из рассмотренных вариантов области решения приводится несколько Ra -нулей соответствующего определителя (в порядке их возрастания); представлены и примеры графиков функций (для t — всегда сверху или слева на рисунке, для ψ — снизу или справа). В случаях непрямоугольных областей (см. рис. 5–8) для всех отрезков, параллельных оси y , кроме максимального, при построении графиков использовалось растяжение с переменным по оси x коэффициентом таким образом, что изображение области всегда оказывалось прямоугольным. При вычислении значений функций внутри прямоугольных областей (исходных или полученных названным преобразованием) применено равномерное разбиение с шагом $d\varphi = L_\varphi/22$ при $\varphi \in \{x, y\}$. Соответствующая нумерация сечений использована в качестве значений x и y на графиках. Приводимые на графиках значения функций всегда определялись из условия $A_{11} = 1$. Конечно, более надежны в вычислении и представляют практический интерес первые два-три из предлагаемых значений.

Удовлетворительные по точности результаты получаются уже при достаточно малых значениях N в (10), даже при $N = 4$. Предлагаемая здесь информация получена, в основном, при $N = 7$.

В трех последних столбцах табл. 1 и в трех строках табл. 2 приведены совокупности $\{Ra_{кр}\}$ для каналов прямоугольного сечения — последовательно при $Y = 1/20$, $Y = 1/10$ (оба варианта с изоляцией вертикальных границ, т.е. с $\gamma = 2$), а также при $Y = 1/10$ с теплопроводными границами ($\gamma = 1$). Для всех трех случаев обе таблицы имеют

Таблица 1

**Значения числа Рэлея для горизонтального слоя и
прямоугольных сечений**

		$Ra_{кр}$		
для плоских слоев		для прямоугольных сечений		
3,116	1707,762	$1,7066 \cdot 10^3$	$1,7375 \cdot 10^3$	$2,1614 \cdot 10^3$
5,36	$17,6104 \cdot 10^3$	$16,110 \cdot 10^3$	$17,331 \cdot 10^3$	$17,393 \cdot 10^3$
7,58	$75,7098 \cdot 10^3$	$71,988 \cdot 10^3$	$71,142 \cdot 10^3$	$74,174 \cdot 10^3$
9,80	$219,885 \cdot 10^3$	$216,66 \cdot 10^3$	$208,98 \cdot 10^3$	$214,56 \cdot 10^3$
12,02	$509,658 \cdot 10^3$	$509,60 \cdot 10^3$	$496,24 \cdot 10^3$	$504,87 \cdot 10^3$
14,24	$1202,51 \cdot 10^3$	$1202,2 \cdot 10^3$	$1197,6 \cdot 10^3$	$1198,5 \cdot 10^3$
16,46	$1843,58 \cdot 10^3$	$1845,6 \cdot 10^3$	$1843,0 \cdot 10^3$	$1847,2 \cdot 10^3$
18,69	$3085,83 \cdot 10^3$	$3085,6 \cdot 10^3$	$3084,8 \cdot 10^3$	$3085,4 \cdot 10^3$
21,00	$4870,12 \cdot 10^3$	$4869,9 \cdot 10^3$	$4868,8 \cdot 10^3$	$4869,7 \cdot 10^3$
23,24	$7334,78 \cdot 10^3$	$7333,9 \cdot 10^3$	$7328,3 \cdot 10^3$	$7335,0 \cdot 10^3$

Значения числа Рэлея для прямоугольных сечений ($Y = 1/20$ и $Y = 1/10$)

$Ra_{кр} \cdot 10^{-3}$								
2,9239	4,1525	5,894	11,528	28,531	39,751	98,410	114,75	125,94
3,4688	7,1243	12,406	21,004	28,042	40,431	93,461	113,90	135,82
5,5820	6,6438	13,131	15,089	35,183	89,752	105,32	138,59	166,01

полный набор $\{Ra_{кр}\}$ до значений в 4-й строке табл. 1 включительно, а также по пять выборочных результатов (6...10 строки), в интервалах между которыми решение определителей не проводилось.

Для сопоставления с этими результатами в 1 и 2-м столбцах приведена информация, полученная в работе [14] для плоских слоев, неограниченных в направлениях x и z . Для таких областей (слоев) возможны нейтральные возмущения типа

$$t = t(y)e(x, z), \quad \psi = \psi(y)e(x, z); \quad j = \sqrt{-1}; \quad (12)$$

$$e(x, z) = \exp[j(k_1x + k_2z)]; \quad k_{1m}^2 + k_{2m}^2 = k_m^2,$$

где $\{k_m^2, m \in \{1 \dots \infty\}\}$ — вещественные волновые числа, характеризующие периодичность возмущений вдоль направлений x и z , а $t(y)$, $\psi(y)$ — амплитуды возмущений. Для каждого из значений k_i возможна последовательность значений $\{Ra_{кр}\}_i$, при которых выражения (12) удовлетворяют задаче типа (1)–(3). Из множества значений $\{Ra_{кр}\}$, содержащихся во всех рассмотренных последовательностях, в табл. 1 приведены значения $\{Ra_{крm}, m \in \{1 \dots 10\}\}$ (2-й столбец) и соответствующие числа k_m (1-й столбец) для нижних десяти уровней неустойчивости.

Заметно определенное согласование данных в столбцах 3–5 и 2. Это означает, что для рассмотренных каналов (с $Y = 1/20$ и $Y = 1/10$) в основе нейтральных возмущений, удовлетворяющих задаче (1)–(3) при приводимых в столбцах 3–5 значениях $Ra_{кр}$, — лежат гармоники с однозначно соответствующими числами (k_m для $Ra_{кр}$ в m -й строке). Но, понятно, в чистом виде такие гармоники задачам (1)–(3) уже не удовлетворяют.

Табл. 3 содержит чередующиеся строки значений $Ra_{кр}$ (канал с квадратным сечением) для случаев с идеальной теплопроводностью ($\gamma = 1$; строки 1, 3, 5) и с идеальной изоляцией ($\gamma = 2$; строки 2, 4, 6) вертикальных, т.е. с $x \in \{0, 1\}$, границ. Первый результат во 2-й строке согласуется со значением $Ra_{кр} = 2586$, приведенным в работе [8]. В нечетных же строках табл. 3 имеются и значения, близкие к представленным в работе [6] $Ra_{кр} \in \{5099; 8495; 30080; 36600\}$ и в работе [7] $Ra_{кр} = 5030$. На рис. 1, а, б показаны картины изолиний, последова-

тельно соответствующие значениям $Ra_{кр} \in \{5086; 30319\}$ и близкие к полученным в работе [6].

Таблица 3

Значения числа Рэлея для квадратных сечений

$Ra_{кр}$					
$2,9887 \cdot 10^3$	$5,0856 \cdot 10^3$	$7,2813 \cdot 10^3$	$9,0946 \cdot 10^3$	$10,497 \cdot 10^3$	$14,397 \cdot 10^3$
$2,4725 \cdot 10^3$	$4,2704 \cdot 10^3$	$7,0505 \cdot 10^3$	$8,2244 \cdot 10^3$	$9,9637 \cdot 10^3$	$11,683 \cdot 10^3$
$15,118 \cdot 10^3$	$17,320 \cdot 10^3$	$20,466 \cdot 10^3$	$26,032 \cdot 10^3$	$27,882 \cdot 10^3$	$30,319 \cdot 10^3$
$13,850 \cdot 10^3$	$16,506 \cdot 10^3$	$19,280 \cdot 10^3$	$23,495 \cdot 10^3$	$25,176 \cdot 10^3$	$28,218 \cdot 10^3$
$34,437 \cdot 10^3$	$38,840 \cdot 10^3$	$46,953 \cdot 10^3$	$51,004 \cdot 10^3$	$56,747 \cdot 10^3$	$70,255 \cdot 10^3$
$31,406 \cdot 10^3$	$36,587 \cdot 10^3$	$44,297 \cdot 10^3$	$47,162 \cdot 10^3$	$52,454 \cdot 10^3$	$65,479 \cdot 10^3$

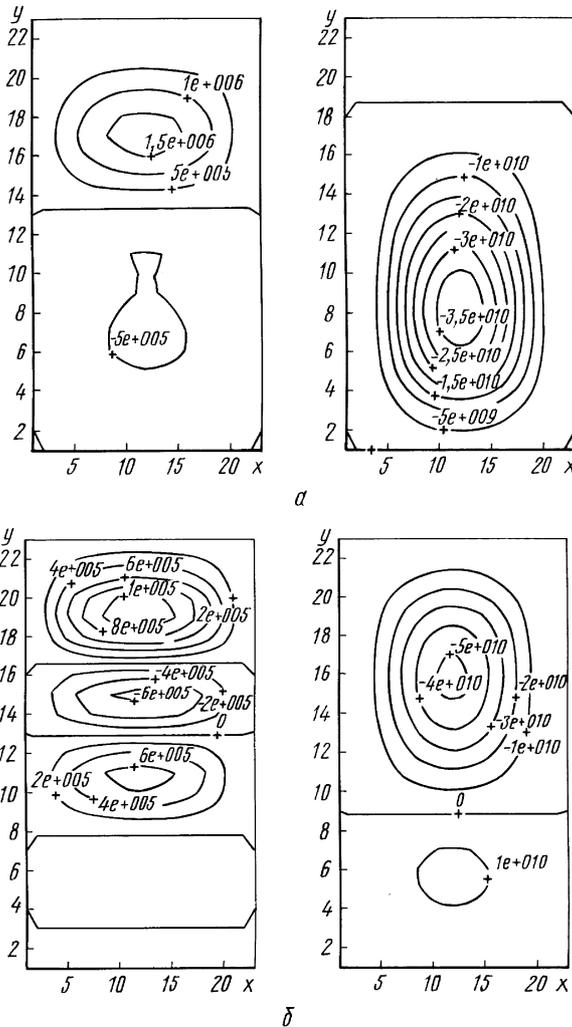


Рис. 1. Изолинии температуры (t) и функции тока (ψ) в полости с квадратным сечением:

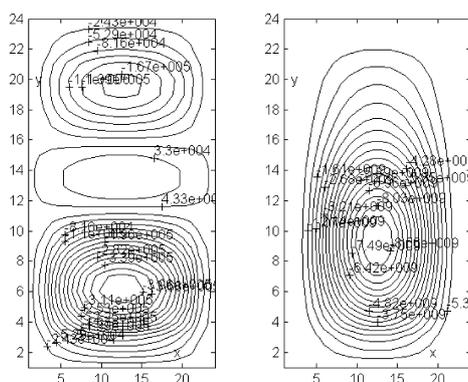
a — $Ra_{кр,2} = 5086$; $\Gamma = 1$ (на вертикальных границах — условие 1-го рода); $б$ — $Ra_{кр} = 30319$; $\Gamma = 1$

В табл. 4 сопоставляются значения $Ra_{кр}$ для области с прямоугольным сечением, с высотой вдвое большей ширины ($Y = 2$) при $\gamma = 2$ (1-я строка) и при $\gamma = 1$ (2-я строка). Согласование с известным результатом ($Ra_{кр} = 7800$; [9]), по-видимому, можно считать вполне удовлетворительным; на рис. 2, *а*, *б* показаны картины изолиний для первых двух значений $Ra_{кр}$ в этом случае ($\gamma = 2$).

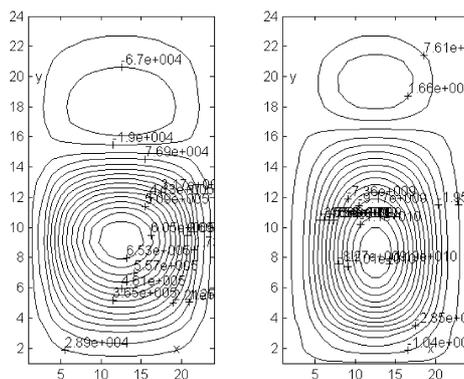
Таблица 4

Значения числа Рэлея для прямоугольных сечений ($Y = 2$)

$Ra_{кр} \cdot 10^{-3}$							
3.7406	7.8099	9.8016	14.487	17.002	21.244	27.469	33.778
6.4947	8.9627	10.634	14.992	17.137	22.436	29.223	36.964



а



б

Рис. 2. Изолинии t и ψ в полости с прямоугольным сечением; $Y = 2$ (отношение высоты к длине):

а — $Ra_{кр,1} = 3741$; $\gamma = 2$; *б* — $Ra_{кр,2} = 7810$; $\gamma = 2$

В строках табл. 5 последовательно приведены совокупности значений $Ra_{кр}$ для областей со следующими сечениями: в виде параллелограмма, составленного из двух равнобедренных прямоугольных треугольников; в виде прямоугольной трапеции, составленной из квадрата и равнобедренного треугольника сверху; в виде равнобокой трапеции, составленной из квадрата и двух равнобедренных треугольников. В нечетных рядах содержатся результаты для вариантов с $\gamma = 2$, в четных — с $\gamma = 1$.

Таблица 5

Значения числа Рэлея для трапециевидных сечений

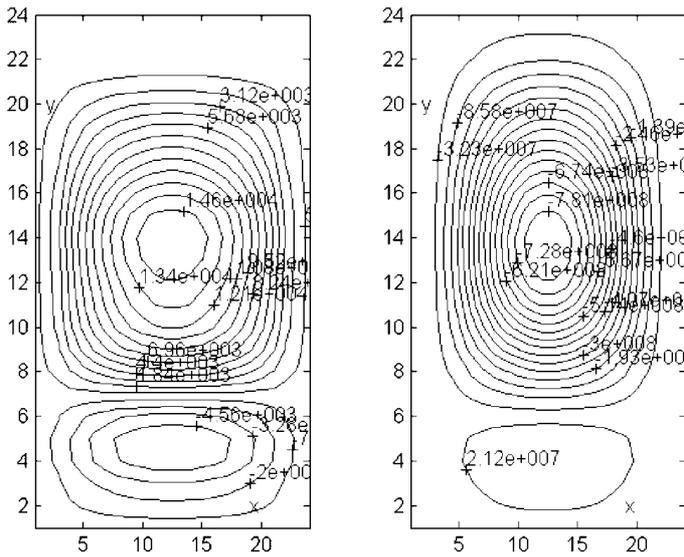
$Ra_{кр} \cdot 10^{-3}$								
3,4148	7,6966	13,646	26,623	45,105	48,056	52,403	58,534	69,154
5,4453	7,9480	18,429	30,365	45,152	49,424	52,865	64,531	75,800
4,0183	6,2833	10,601	12,788	14,992	18,802	24,757	27,721	31,913
4,8923	7,6819	11,194	14,145	15,298	23,145	27,609	30,013	38,432
2,9917	4,0446	7,5350	8,8701	11,951	13,129	16,303	18,453	19,823
3,2369	4,1140	9,1180	10,511	12,432	13,568	17,936	18,926	20,105

На рис. 3, а, б показаны изолинии в параллелограммном сечении с теплоизолированными границами ($\gamma = 2$), соответствующие второму и пятому значениям $Ra_{кр}$; первому значению $Ra_{кр}$ соответствуют практически центрально-симметричные картины изолиний. На рис. 4, а, б изображены изолинии для прямоугольно-трапециевидного сечения также при $\gamma = 2$, но для случаев с первым и вторым значениями $Ra_{кр}$.

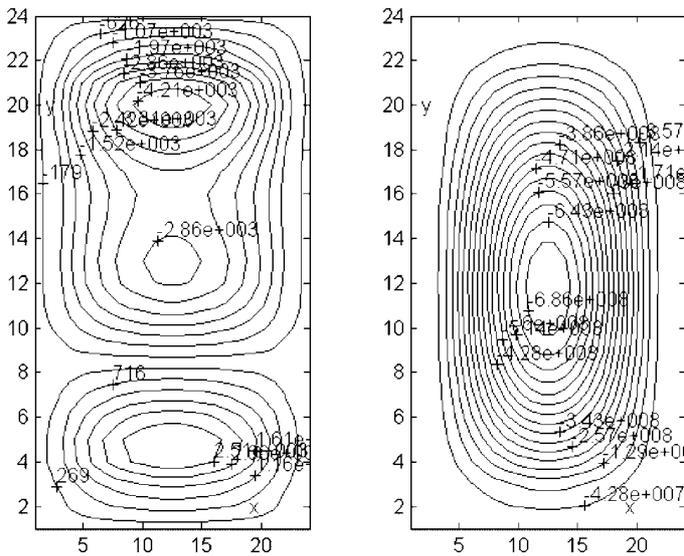
Заметна относительно большая плотность значений $Ra_{кр}$ на числовой оси. И анализ показывает, что различающимся значениям всегда соответствуют различающиеся же картины изолиний, причем значительно больше разнообразия в картинах изотерм.

При сопоставлении же рядов из значений $Ra_{кр}$, расположенных в табл. 1–5 по их возрастанию, видно, что практически при любом порядковом номере m справедливо: $Ra_{кр,m} \Big|_{\gamma=2} < Ra_{кр,m} \Big|_{\gamma=1} < Ra_{кр,m+1} \Big|_{\gamma=2}$.

Итак, при решении задачи об устойчивости равновесия жидкости применен подход, близкий к строго аналитическому, с получением бесконечной линейной системы уравнений, алгебраической относительно числа Рэлея Ra . Доказана редуцируемость этой системы, вычисление критических значений $Ra(Ra_{кр})$ связано с условиями обращения в ноль достаточно большого, но конечного определителя.



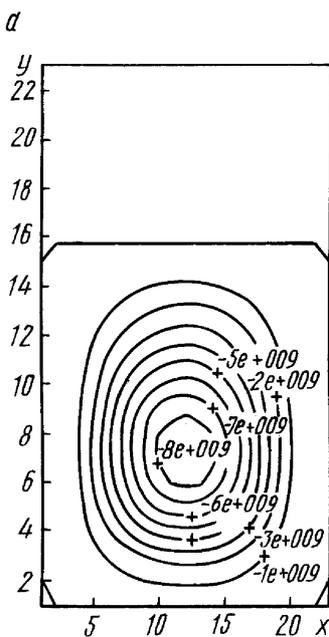
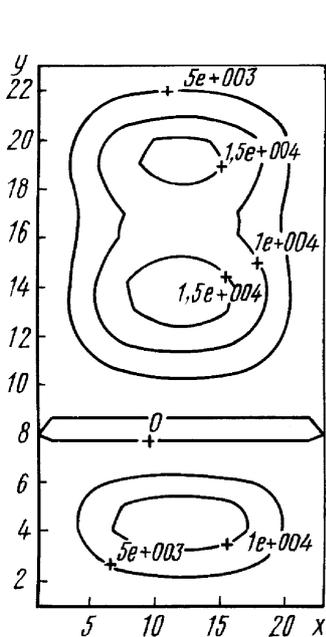
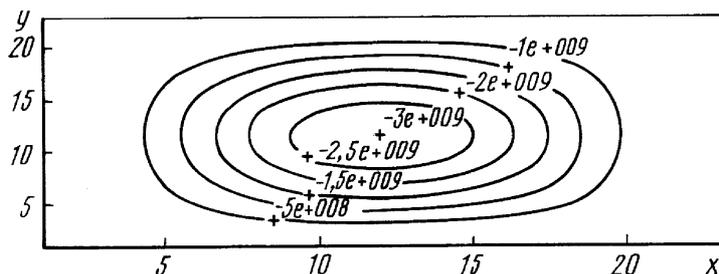
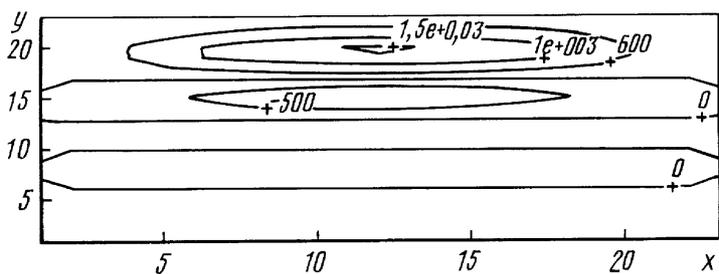
a



б

**Рис. 3. Изолинии t и ψ в полости с параллелограммным сечением, $\gamma = 2$:
a — $Ra_{кр,1} = 7697$; *б* — $Ra_{кр,3} = 45105$**

Разработан алгоритм и отлажена программа для ПК, реализующие предложенный метод решения. Выявлено хорошее согласование



δ

Рис. 4. Изолинии t и ψ в полости с прямоугольно-трапециевидным сечением, $\Gamma = 2$:

a — $Ra_{кр,1} = 4018$, b — $Ra_{кр,2} = 6283$

результатов расчета с известными данными для прямоугольных областей. Впервые получена информация по $Ra_{кр}$, по картинам изолиний температур, функций тока и другим параметрам для трапециевидных полостей общего типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
2. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции // ПММ. – 1963. – Т. 27. – № 2. – С. 295.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 319 с.
4. Полежаев В. И., Сазонов В. В. Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы. Аннот. докл. науч.-исслед. семинара. – М.: ИПМ РАН, 1998. – 36 с.
5. Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А. Свободно-конвективный тепло- и массообмен // Библиографический указатель. – Минск, 1987. Ч. I–IV.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1966. – № 6. – С. 93.
7. V e l t e W. Stabilitatsverhalten und verzweigung stationarer losungen der Navier–Stokesschen Gleichungen // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. – V. 16. – № 2. – S. 97.
8. K u r z w e g U. H. Convektive instability of a hydromagnetic fluid within a rectangular cavity // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1965. – № 8. – S. 35.
9. Петражицкий Г. Б., Полежаев В. И. Исследование режимов теплообмена при свободном движении вязкого газа в двумерных полостях // Науч. труды МВТУ. – М.: Изд-во МВТУ. – 1976. – № 222. – С. 27–66.
10. Петражицкий Г. Б., Пылаев А. М. Аналитическое исследование равновесия жидкости в замкнутых полостях // Междунар. симпозиум по гидромеханике и теплообмену в невесомости. Пермь. – 1991.
11. P y l a e v A. M., D i e v M. D. Theoretical approach to the analysis of flows and equilibria in gasliquid system // IAC '94. Proceedings. – М. – 1995. – V. 1. – S. 737–739.
12. Пылаев А. М. Задача об устойчивости равновесия жидкости в трапециевидных полостях // Труды третьей Российской нац. конф. по теплообмену; свободная конвекция. Т. 3. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. – С. 136–139.
13. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М. –Л.: ГИТТЛ. – 1950. – 696 с.
14. S a t t o n I. Natural convektion in horizontal liquid layers // Phis. Fluids. – 1966. – V. 9. – № 12. – S. 2521.

Статья поступила в редакцию 19.06.2003

Анатолий Михайлович Пылаев родился в 1936 г., окончил Московский энергетический институт в 1960 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теплофизика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Имеет около 100 научных работ в области теплофизики.

Анатолий Михайлович Пылаев родился в 1936 г., окончил Московский энергетический институт в 1960 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теплофизика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Имеет около 100 научных публикаций в области теплофизики.