

УДК 621.7:539.3/4

А. М. Дмитриев, А. Л. Воронцов

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОСАДКИ И ВЫСАДКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАГОТОВОК.

Часть 1. ВЫСАДКА

Определены напряженное и деформированное состояния при осадке сплошных и полых цилиндрических заготовок. Получены формулы для расчета основных технологических параметров осадки и прогнозирования разрушения. Высокая точность теоретических результатов подтверждена экспериментальными данными.

Теоретическому исследованию осадки цилиндрической заготовки посвящены известные работы Э. Зибеля и Е.П. Унксова. Однако выполненные ими решения не позволяют прогнозировать разрушение и, кроме того, имеют целый ряд существенных недостатков, подробно рассматриваемых далее. Поэтому разработка общей теории осадки является актуальной.

Известно, что наличие сил трения между торцами осаживаемой заготовки и инструментом приводит к переменной площади поперечного сечения по высоте (рис. 1, справа), называемой для цилиндрических заготовок бочкообразностью. Бочкообразность обуславливает переменность деформированного состояния, однако для определения среднего диаметра, необходимого для расчета напряженного состояния и силы деформирования, с достаточной для практики точностью можно считать площадь поперечного сечения постоянной и использовать расчетную схему, показанную на рис. 2. В этой схеме применена ци-

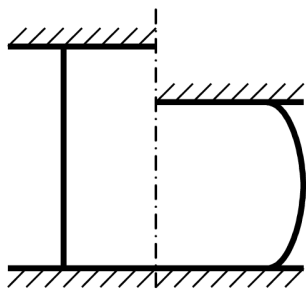


Рис. 1. Осадка заготовки

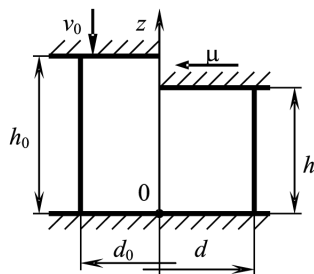


Рис. 2. Расчетная схема осадки

цилиндрическая система координат ρ, θ, z с началом координат на поверхности неподвижного инструмента (см. рис. 2, справа). Осаживающий инструмент движется со скоростью v_0 .

Принимаем следующие допущения: материал считаем жесткопластическим, а упрочнение учитываем средней по очагу пластической деформации величиной напряжения текучести σ_s ; силы контактного трения определяем по закону Зибеля как $\tau_k = \mu\beta\sigma_s$, где μ — коэффициент трения по напряжению текучести, а β — коэффициент Лоде.

В решении используем относительные величины напряжений, отнесенные к σ_s .

Кинематически возможную осевую скорость представим в общем виде

$$v_z = f(z), \quad (1)$$

удовлетворяющем имеющимся граничным условиям: $v_z = -v_0$ при $z = h$ и $v_z = 0$ при $z = 0$.

Из условия несжимаемости

$$\xi_z + \xi_\rho + \xi_\theta = 0,$$

которое для осесимметричной задачи имеет вид

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0,$$

или

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (v_\rho \rho) \right] = -\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

можно найти радиальную скорость

$$v_\rho = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\rho}{2} + \frac{f_1(z)}{\rho}. \quad (2)$$

Из граничного условия $v_\rho = 0$ при $\rho = 0$ вытекает, что $f_1(z) = 0$, и, следовательно,

$$v_\rho = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\rho}{2}. \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что полученная функция радиальной скорости в общем случае зависит от координаты z , т.е. позволяет учесть бочкообразность осаживаемой заготовки, что будет использовано при определении деформированного состояния. Таким образом, боковая поверхность заготовки на рис. 2 показана цилиндрической условно.

Учитывая формулы (1) и (3), находим скорости деформаций:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(z)}{\partial z}; \\ \xi_\theta = \frac{v_\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(z)}{\partial z}; \\ \xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial f(z)}{\partial z}; \\ \eta_{\rho z} = \frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \frac{\rho}{2}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Поскольку $\xi_\rho = \xi_\theta$, то $\beta = 1$ и интенсивность скоростей деформаций в упрощенной форме можно представить как

$$\xi_i = \beta |\xi_{\max}| = \beta |\xi_z| = \frac{\partial f(z)}{\partial z}. \quad (5)$$

Уравнения связи Леви–Мизеса имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\rho = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\xi_\rho}{\xi_i}; \\ \sigma_\theta = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\xi_\theta}{\xi_i}; \\ \sigma_z = \sigma + \frac{2}{3} \frac{\xi_z}{\xi_i}; \\ \tau_{\rho z} = \frac{1}{3} \frac{\eta_{\rho z}}{\xi_i}, \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$\sigma = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} \quad (7)$$

среднее главное напряжение (гидростатическое давление).

Уравнения равновесия для данной задачи имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

С учетом выражений (4) и (5) из четвертой формулы системы (6) получаем

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{6} \frac{\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}}{\frac{\partial f(z)}{\partial z}} \rho = f_2(z) \rho. \quad (9)$$

Подставив выражение (9) во второе уравнение системы (8), найдем, что

$$\sigma_z = -2 \int f_2(z) dz + f(\rho). \quad (10)$$

Из системы (6) с учетом зависимостей (4) и (5) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \rho} = \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho}. \quad (11)$$

Поскольку $\xi_\rho = \xi_\theta$, то из системы (6) следует, что и $\sigma_\rho = \sigma_\theta$. С учетом этого подставив выражения (9) и (11) в первое уравнение системы (8), получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}.$$

Так как левая часть этого уравнения зависит только от ρ , а правая — только от z , то обе части должны равняться постоянной величине C , откуда:

$$f(\rho) = \frac{C\rho^2}{2} + C_1; \quad (12)$$

$$f_2(z) = -Cz + C_2. \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в формулу (9), найдем касательное напряжение

$$\tau_{\rho z} = (-Cz + C_2)\rho.$$

Произвольные постоянные C и C_2 определяются из следующих граничных условий: $\tau_{\rho z} = -\mu$ при $z = h$ и $\rho = d/2$; $\tau_{\rho z} = \mu$ при $z = 0$ и $\rho = d/2$. Отсюда

$$\begin{cases} C = \frac{4\mu}{dh}; \\ C_2 = \frac{2\mu}{d}. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив формулы (12)–(14) в выражение (10), получим

$$\sigma_z = \frac{4\mu}{dh}(z^2 - hz + 0,5\rho^2) + C_1. \quad (15)$$

Вычтя из первого выражения системы (6) третье и подставив соотношения (4), (5) и (15), найдем

$$\sigma_\rho = \sigma_z + 1 = 1 + \frac{4\mu}{dh}(z^2 - hz + 0,5\rho^2) + C_1. \quad (16)$$

Так как радиальное напряжение σ_ρ зависит от z , то удовлетворить условию $\sigma_\rho = 0$ по всей высоте боковой поверхности заготовки невозможно. Поэтому используем частное граничное условие $\sigma_\rho = 0$ при $z = h$ и $\rho = d/2$, откуда найдем произвольную постоянную

$$C_1 = -1 - \frac{\mu d}{2h}. \quad (17)$$

Выбор такого граничного условия обусловлен тем, что это повышает расчетное значение удельной силы, т.е. соответствует используемому нами принципу верхней оценки, и, кроме того, при этом одновременно удовлетворяется и граничное условие $\sigma_\rho = 0$ при $z = 0$ и $\rho = d/2$, а также получается наиболее простая формула для определения удельной силы деформирования. Легко проверить, что при использовании, например, граничного условия $\sigma_\rho = 0$ при $z = h/2$ и $\rho = d/2$, расчетные значения удельной силы уменьшатся, а окончательная формула станет более громоздкой.

Подставив выражение (17) в соотношение (15) при $z = h$, получим формулу нормальных напряжений на поверхности контакта с верхним инструментом:

$$\sigma_z = -1 - \frac{\mu}{dh}(0,5d^2 - 2\rho^2).$$

Относительная удельная сила осадки

$$q = \frac{2\pi}{\pi d^2} \int_0^{\frac{d}{2}} |\sigma_z| \rho d\rho = 1 + \frac{\mu d}{4h}. \quad (18)$$

Из условия постоянства объема имеем

$$d = d_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}}. \quad (19)$$

Значение силы осадки определено выражением

$$P = \sigma_s F q, \quad (20)$$

где

$$F = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (21)$$

Теперь проанализируем деформированное состояние заготовки. Укажем, что такой анализ в строгом понимании накопленной деформации ранее не проводился.

По определению А.А. Ильюшина накопленной деформацией называется величина, полная производная которой по времени равна интенсивности скоростей деформации, т.е.

$$\frac{de_i}{dt} = \xi_i. \quad (22)$$

В общем случае накопленная деформация e_i представляет собой сложную функцию координат и времени, т.е. $e_i = f(x, y, z, t)$. С учетом этого по известному правилу дифференцирования сложных функций выражение (22) следует переписать в виде

$$\xi_i = \frac{de_i}{dt} = \frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial e_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial e_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial e_i}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial e_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial e_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial e_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial e_i}{\partial z}.$$

Применительно к осадке, являющейся нестационарным процессом, можно принять $e_i = f(t)$. Тогда предыдущее выражение примет вид

$$\xi_i = \frac{\partial e_i}{\partial t}. \quad (23)$$

Уравнение (23) с учетом выражения (5) и третьей формулы системы (4) позволяет найти накопленную деформацию

$$\begin{aligned} e_i &= \int |\xi_z| \partial t + C_3 = \int \left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \partial t + C_3 = \\ &= - \int \frac{\partial v_z}{\partial z} + C_3 = - \int \frac{\partial v_z}{v_z} + C_3 = - \ln |v_z| + C_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Произвольная постоянная C_3 определяется из начального условия

$$e_i = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0, \quad (25)$$

где z_0 — начальная координата рассматриваемой материальной точки.

Связь между текущей и начальной координатами находится с помощью уравнения

$$dz = v_z dt, \quad (26)$$

которое решается с учетом того, что

$$h = h_0 - v_0 t. \quad (27)$$

Возникающая при решении произвольная постоянная C_4 находится из начального условия

$$z = z_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (28)$$

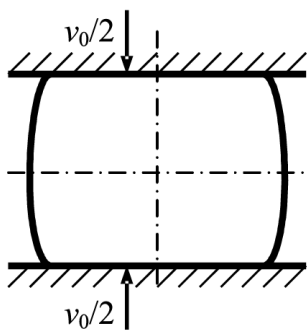


Рис. 3. Симметрия осадки

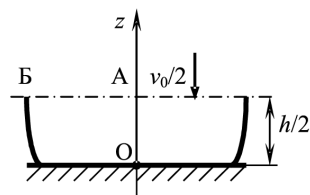


Рис. 4. Схема для определения накопленной деформации

Процесс осадки можно представить в виде сближения верхней и нижней поверхностей инструмента с одинаковой скоростью $v_0/2$ (рис. 3). Для получения конкретных расчетных выражений будем рассматривать в силу симметрии только нижнюю половину осаживаемой заготовки (рис. 4). Для использования наиболее простых функций скоростей течения будем считать нижнюю поверхность инструмента ($z = 0$) неподвижной; в этом случае очевидно (см. рис. 3), что срединная плоскость приближается к нижней поверхности со скоростью $v_0/24$.

В соответствии с выражениями (1) и (3) кинематически возможные скорости течения можно задать формулами

$$\begin{cases} v_z = -v_0 \left(\frac{az}{h} + \frac{2bz^2}{h^2} \right); \\ v_\rho = v_0 \left(\frac{a}{h} + \frac{4bz}{h^2} \right), \end{cases} \quad (29)$$

в которых коэффициенты a и b связаны соотношением

$$a + b = 1. \quad (30)$$

В этом случае автоматически удовлетворяются имеющиеся граничные условия

$$\begin{aligned} v_z &= 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \\ v_z &= -v_0/2 \quad \text{при} \quad z = h/2. \end{aligned}$$

С помощью выражений (29) и (30) рассмотрим возможные варианты деформации при осадке заготовок умеренной высоты ($h_0/d_0 \leq 2$), для которых характерно одинарное бочкообразование.

1. *Свободное течение* ($\mu = 0$): заготовка сохраняет цилиндрическую форму, т.е. v_ρ не зависит от ρ , и, следовательно, $a = 1, b = 0$:

$$\begin{cases} v_z = -v_0 \frac{z}{h}; \\ v_\rho = v_0 \frac{\rho}{2h}. \end{cases} \quad (31)$$

В этом случае из выражения (24) получаем

$$e_i = -\ln \left(v_0 \frac{z}{h} \right) + C_3. \quad (32)$$

Из условия (25)

$$C_3 = \ln \left(v_0 \frac{z_0}{h} \right). \quad (33)$$

Подставив выражение (33) в формулу (32), получим

$$e_i = \ln \frac{z_0}{z}. \quad (34)$$

Подставив первое выражение системы (30) в выражение (26), с учетом формулы (27) приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z} = \frac{-v_0 dt}{h_0 - v_0 t},$$

решая которое, находим, что

$$z = C_4 (h_0 - v_0 t).$$

Используя условие (28), окончательно получаем связь между текущей и начальной координатами материальной частицы:

$$z = z_0 \frac{h_0 - v_0 t}{h_0} = z_0 \frac{h}{h_0}. \quad (35)$$

Подставив соотношение (35) в выражение (34), получим окончательную формулу для определения накопленных деформаций при осадке со свободным течением:

$$e_i = \ln \frac{h_0}{h}. \quad (36)$$

Очевидно, что в этом случае накопленные деформации в характерных точках А и О (см. рис. 4) равны между собой и определяются выражением (36).

2. Прилипание ($\mu = 0,5$): заготовка получает в процессе деформации наибольшую бочкообразность, а вблизи поверхности контакта заготовки и инструмента образуется застойная зона, т.е. на этой поверхности $v_\rho = 0$ и, следовательно, $a = 0$, $b = 1$:

$$\begin{cases} v_z = -2v_0 \frac{z^2}{h^2}; \\ v_\rho = 2v_0 \frac{z\rho}{h^2}. \end{cases} \quad (37)$$

В этом случае из выражения (24) получаем

$$e_i = -\ln \left(2v_0 \frac{z^2}{h^2} \right) + C_3. \quad (38)$$

Из условия (25)

$$C_3 = \ln \left(2v_0 \frac{z_0^2}{h^2} \right). \quad (39)$$

Подставив выражение (39) в формулу (38), получим

$$e_i = 2 \ln \frac{z_0}{z}. \quad (40)$$

Подставив первое выражение системы (37) в выражение (26), с учетом формулы (27) приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{-2v_0 dt}{(h_0 - v_0 t)^2},$$

решая которое, получаем

$$z = \frac{1}{\frac{2}{h_0 - v_0 t} + C_4}.$$

Используя условие (28), окончательно получаем связь между текущей и начальной координатами материальной частицы:

$$z = \frac{z_0 h_0 h}{2(h_0 - h)z_0 + h_0 h}. \quad (41)$$

Подставив соотношение (41) в выражение (40), выведем окончательную формулу для определения накопленных деформаций при осадке с прилипанием:

$$e_i = 2 \ln \left(2z_0 \frac{h_0 - h}{h_0 h} + 1 \right). \quad (42)$$

В этом случае накопленная деформация в точке А (см. рис. 4), начальная координата которой $z_0 = h_0/2$,

$$e_{iA} = 2 \ln \frac{h_0}{h}. \quad (43)$$

Накопленная деформация в точке О, начальная координата которой $z_0 = 0$,

$$e_{iO} = 0. \quad (44)$$

3. *Затрудненное течение* ($\mu = 0,25$): заготовка получает в процессе деформации среднюю бочкообразность, так как радиальная скорость v_ρ на поверхностях контакта с инструментом имеет меньшую величину, чем в срединной плоскости. Этот случай является промежуточным между вариантами 1 и 2, и, следовательно, можно принять $a = 0,5$, $b = 0,5$. Дальнейшее определение деформированного состояния в этом случае осуществляется аналогично рассмотренным ранее. Но так как функция v_z достаточно сложна (см. первое выражение системы (29)), то в этом случае для определения зависимости между текущей и начальной координатами $z = f(z_0)$ приходится решать дифференциальное уравнение Бернулли, что довольно трудоемко. Общие выражения для текущей координаты и накопленной деформации аналогичны выведенным выражениям для случая затрудненного течения при выдавливании стаканов (см. формулы (3.98), (3.99) в книге [1]). Поэтому приведем без вывода окончательные результаты:

$$e_{iA} = 1,5 \ln \frac{h_0}{h}; \quad (45)$$

$$e_{iO} = 0,5 \ln \frac{h_0}{h}. \quad (46)$$

Соответствующие рассмотренным случаям эпюры распределения накопленных деформаций по высоте осаживаемой заготовки показаны на рис. 5. С достаточной для практики точностью можно считать, что средняя величина накопленной деформации в объеме заготовки определяется выражением

$$e_i = \frac{e_{iA} + e_{iO}}{2} = \ln \frac{h_0}{h}, \quad (47)$$

т.е. будет одинакова во всех трех случаях.

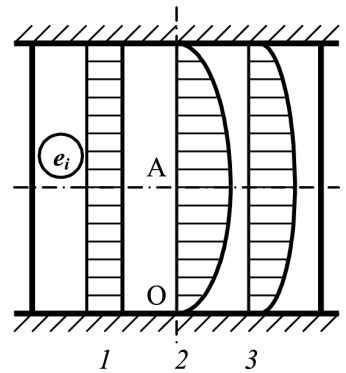


Рис. 5. Варианты распределения накопленных деформаций по высоте осаживаемой заготовки

Если кривая упрочнения построена не для логарифмических, а для относительных деформаций, то последние можно определить по формуле

$$e = 1 - e^{-e_i}. \quad (48)$$

Из формул (43) и (45) видно, что вследствие неравномерности деформации местная накопленная деформация может в 1,5–2 раза превысить среднюю величину накопленной деформации, определяемую по формуле (47). Этот теоретический результат полностью совпадает с экспериментальными данными, приведенными на с. 253 работы [2].

Из рис. 5 видно, что неравномерность деформации сильно зависит от условий трения на контактных поверхностях инструмента и заготовки. С уменьшением коэффициента трения неравномерность распределения накопленных деформаций также уменьшается. Сопоставительный анализ формул (36), (43) и (45) с учетом соответствующих коэффициентов трения μ показывает, что их можно обобщить, представив в следующем виде:

$$e_{iA} = (1 + 2\mu) \ln \frac{h_0}{h} = (1 + 2\mu)e_i.$$

Следует также указать, что в процессе осадки может происходить качественное изменение характера деформированного состояния. Например, в начале осадки заготовки умеренной высоты на сухих шероховатых плитах почти вся контактная поверхность представляет собой зону прилипания [3]. Однако по мере уменьшения высоты на значительной части контактной поверхности начинает развиваться скольжение, которое постепенно охватывает большую часть контактной поверхности. Когда заготовка становится достаточно низкой, ее бочкообразность практически исчезает [4]. Таким образом, вначале деформированное состояние соответствует рассмотренному случаю прилипания, в середине — случаю затрудненного течения, а в конце — случаю свободного течения. В принципе, при таком протекании процесса для расчета накопленных деформаций следует сначала использовать формулы (43) и (44), а при значении $h = h_1$ переходить на расчет по формулам (45) и (46), принимая $h_0 = h_1$ и складывая получающиеся значения со значениями, найденными по формулам (43) и (44) при $h = h_1$, а затем при значении $h = h_2$ переходить на аналогичный расчет по формуле (36). Это вызывает существенные трудности, связанные с тем, что точное значение переходных высот h_1 и h_2 неизвестно.

Поэтому для проверки формул (45) и (46) с учетом формулы (48) нами использованы экспериментальные данные о распределении накопленных деформаций при осадке с небольшим ходом низкой заготовки

с $h_0/d_0 = 0,5$, для которой с самого начала процесса деформирования наблюдалось затрудненное течение (рис. 70, б, с. 167 работы [2]): при $h/h_0 = 0,84$, $e_{iO} = 0,087$, $e_O = 0,08$, $e_{O_3} = 0,09$, $\delta = 7,8\%$; $e_{iA} = 0,262$, $e_A = 0,23$, $e_{A_3} = 0,22$, $\delta = 4,3\%$ (здесь и далее δ — расхождение, вычисляемое по отношению к теоретической величине).

Так как для практических расчетов, связанных с прогнозированием разрушения, важна только накопленная деформация e_{iA} , то тщательная проверка была произведена лишь для этой деформации, которую независимо от изменения деформированного состояния по ходу осадки заготовки вычисляли по формуле (43), дающей наибольшую величину, т.е. оценку с запасом. Сравнение расчетных и экспериментальных данных приведено в табл. 1. Следует отметить, что для экспериментальных данных, соответствующих первой строке табл. 1 (осадка с прилипанием), авторы работы [3] провели сопоставление с теоретическим распределением деформаций, полученным ими с помощью трех громоздких уравнений, основанных на теории малых деформаций (окончательная формула, подобная нашей формуле (42), в работе [3] не получена). Сравнение показывает значительную погрешность результатов теоретического расчета по работе [3]: $e_O = 0,22$, $e_{O_3} = 0$, $\delta = 100\%$ (по формуле (44) $e_O = 0$, т.е. $\delta = 0\%$); $e_A = 0,60$, $e_{A_3} = 0,73$, $\delta = 22\%$ (по формулам (43), (48) $e_A = 0,75$, т.е. $\delta = 2,7\%$).

Таблица 1

Сравнение расчетных и экспериментальных значений максимальной накопленной деформации при осадке

h_0/d_0	h/h_0	e_{iA}	e_A	e_{A_3}	$\delta, \%$	Эксперимент
2,0	0,50	1,386	0,75	0,73	2,7	[3], с. 200, рис. 74
1,0	0,70	0,713	0,51	0,52	2,0	[3], с. 190, рис. 66, а
1,7	0,65	0,862	0,58	0,60	3,9	[2], с. 167, рис. 70, а
	0,56	1,160	0,69	0,72	4,9	
	0,48	1,468	0,77	0,80	4,0	
	0,39	1,883	0,85	0,87	2,6	
	0,28	2,546	0,92	0,90	2,3	
	0,20	3,219	0,96	0,93	3,1	
0,5	0,69	0,742	0,52	0,50	4,6	[2], с. 167, рис. 70, б
	0,63	0,924	0,60	0,60	0,0	
	0,56	1,160	0,69	0,70	2,0	
	0,44	1,642	0,81	0,79	2,0	
	0,38	1,935	0,86	0,83	3,0	

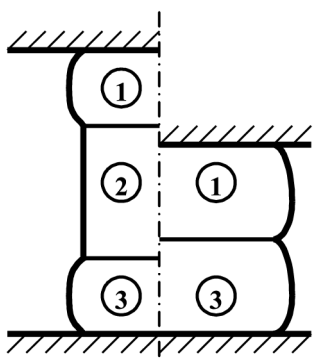


Рис. 6. Двойное бочкообразование при осадке высокой заготовки

Если напряжение текучести осаживаемого материала зависит от скорости деформации, то ее можно определить по формуле

$$\xi_i = \frac{v_0}{h},$$

которая получена подстановкой первого выражения системы (31) в формулу (5).

При осадке высоких заготовок ($h_0/d_0 \geq 2,5$) наблюдается двойное бочкообразование (рис. 6). При этом в зонах 1 и 3 имеет место неравномерное распределение накопленных деформаций. Промежуточная зона 2 при осадке остается цилиндрической и, соответственно, характеризуется равномерным распределением накопленных деформаций. По мере осадки зона 2 уменьшается, и в определенный момент зоны 1 и 3 соприкасаются друг с другом (см. рис. 6, справа). При дальнейшей осадке двойная бочка благодаря более интенсивному увеличению срединного диаметра переходит в одинарную, и процесс продолжается так же, как в случае осадки заготовки умеренной высоты (см. рис. 1).

Такое формоизменение при осадке высоких заготовок известно давно, однако его теоретическое объяснение в литературе отсутствует. Только авторы работы [3] на с. 188 объясняют двойное бочкообразование тем, что в соответствии с принципом Сен-Венана действие сил внешнего трения затухает по мере удаления от контактных поверхностей. Данное объяснение является неубедительным, так как фактически принцип Сен-Венана объясняет не двойное, а одинарное бочкообразование: по мере удаления от контактных поверхностей затухает влияние сил внешнего трения, сдерживающее течение металла в радиальном направлении, в результате чего срединные слои расширяются быстрее приконтактных, образуя бочкообразность боковой поверхности заготовки. Возможность образования двойной бочки и ее последующее превращение в одинарную этим никак не объясняются.

Для объяснения упомянутых явлений обратимся к рис. 6. Так как металл в зонах 1 и 3 течет в радиальном направлении быстрее, чем в зоне 2, сдерживающей это течение, то это означает, что на границах между этими зонами возникают значительные касательные напряжения (при рассмотрении жесткопластической модели эти напряжения равны предельным). Поскольку зона 2 сохраняет цилиндричность, то это означает, что кинематическое состояние в ней описывается выражениями (31), при которых $\eta_{\rho z}$ (4) и, соответственно, $\tau_{\rho z}$ (6) равны нулю. Таким образом, зона 2 представляет собой область, в которой касатель-

ные напряжения равны нулю. Следовательно, в соответствии с известным принципом минимума энергии деформации, двойное бочкообразование при осадке высоких заготовок обусловлено тем, что при этом работа касательных напряжений на соответствующих сдвиговых деформациях затрачивается лишь в зонах 1 и 3, в то время как в зоне 2 она равна нулю, что в сумме дает меньшую энергию деформации, несмотря на увеличение расхода энергии в зонах 1 и 3 из-за повышения касательных напряжений на границах с зоной 2. Этим объясняется также и тот факт, что с увеличением высоты заготовки зона 2 также увеличивается по сравнению с зонами 1 и 3, поскольку это позволяет сосредоточить повышенный расход энергии в сравнительно малых зонах. Поскольку затухание действия сил контактного трения имеет определенную протяженность, то, соответственно, и высота зон 1 и 3 не может стать бесконечно малой. Поэтому в процессе осадки будет уменьшаться высота именно зоны 2. В момент, когда зоны 1 и 3 соприкоснутся друг с другом (см. рис. 6, справа), в силу симметрии течения на границе между ними, касательные напряжения станут равными нулю. Это обуславливает облегчение радиального течения металла вблизи данной границы по сравнению с расположенными выше и ниже слоями, радиальное течение в которых сдерживается влиянием контактного трения. Поэтому при дальнейшей осадке будет происходить опережающее течение средних слоев, приводящее сначала к выравниванию образующей боковой поверхности, а затем и к появлению одинарной бочкообразности.

Рассмотренную физическую модель можно описать и математически, однако это выходит за рамки настоящей статьи, поскольку высокие заготовки при осадке в процессах объемной штамповки, как правило, не используют. Это обусловлено не только возможной потерей устойчивости, но также и тем, что в силу непараллельности верхнего и нижнего торцов заготовки и недостаточно жесткого направления верхней и нижней осадочных плит обычно при осадке высоких заготовок возникает значительный перекося их оси, приводящий к искривлению боковой поверхности и смещению верхнего и нижнего торцов заготовки друг относительно друга.

Для проверки полученных расчетных формул для определения силы осадки авторами были проведены эксперименты по холодной осадке обезжиренных цилиндрических заготовок из алюминиевого сплава АД0. Кривая упрочнения данного сплава была получена испытанием на сжатие образцов с выточками по торцам, заполненными смазочным материалом. Для расчетов использовались формулы (18)–(21), (47) и (48). Сравнение расчетных и экспериментальных данных приведено в табл. 2.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений силы холодной осадки цилиндрической заготовки из алюминиевого сплава АД0 ($\mu = 0,3$)

d_0 , мм	h_0 , мм	h , мм	d , мм	F , мм ²	e_i	e	σ_s , МПа	q	P , кН	P_3 , кН	δ , %
20	20	16,90	21,76	371,8	0,168	0,155	105	1,097	428	400	6,6
20	20	13,95	23,95	450,4	0,360	0,303	130	1,129	661	630	4,7
20	20	11,50	26,38	546,4	0,553	0,425	140	1,172	897	900	0,3

Для большей объективности эти данные были также сопоставлены с результатами независимых экспериментов, которые, включая значения коэффициентов трения, были взяты со с. 165–168 работы [5]. Сравнение расчетных и экспериментальных данных представлено в табл. 3–5. Напряжения текучести в табл. 3 определялись по кривой упрочнения 5 (см. рис. 31, с. 62 справочника [6]). Напряжения текучести в табл. 4 взяты из табл. 7, с. 167 книги [5]. Напряжения текучести в табл. 5 определялись по кривой упрочнения 3 (см. рис. 46, б, с. 68 справочника [6]).

Таблица 3

Сравнение расчетных и экспериментальных значений силы холодной осадки цилиндрической заготовки из стали 10 ($\mu = 0,3$)

d_0 , мм	h_0 , мм	h , мм	d , мм	F , мм ²	e_i	e	σ_s , МПа	q	P , кН	P_3 , кН	δ , %
10,04	10,05	3,70	16,55	215,0	0,999	0,632	650	1,335	187	190	1,6
9,97	6,83	3,23	14,49	165,0	0,749	0,527	610	1,337	134	127	5,2
9,96	7,80	3,39	15,11	179,4	0,833	0,565	620	1,334	148	142	4,1

Таблица 4

Сравнение расчетных и экспериментальных значений силы холодной осадки цилиндрической заготовки из латуни Л62 ($\mu = 0,15$)

d_0 , мм	h_0 , мм	h , мм	d , мм	F , мм ²	e_i	σ_s , МПа	q	P , кН	P_3 , кН	δ , %
10,03	17,07	5,57	17,56	242,1	1,120	711	1,118	193	198	2,6
10,06	17,03	5,69	17,40	237,7	1,096	710	1,115	188	198	5,3
10,00	20,10	6,43	17,68	245,4	1,140	712	1,103	193	198	2,6
9,94	19,05	5,43	18,62	272,4	1,256	717	1,129	221	238	7,7
9,95	18,97	5,33	18,77	276,7	1,270	718	1,132	225	237	5,3
9,90	20,01	6,30	17,64	244,3	1,156	713	1,105	193	197	2,1

Из полученных формул деформированного состояния видно, что величины накопленной деформации в процессе осадки непрерывно

**Сравнение расчетных и экспериментальных значений силы холодной осадки
цилиндрической заготовки из стали 35X ($\mu = 0,3$)**

d_0 , мм	h_0 , мм	h , мм	d , мм	F , мм ²	e_i	e	σ_s , МПа	q	P , кН	P_3 , кН	δ , %
10,00	11,76	4,52	16,13	204,3	0,956	0,616	1050	1,134	243	236	2,9
9,93	10,79	4,52	15,34	184,8	0,870	0,581	1030	1,127	215	216	0,5
9,95	10,82	4,51	15,42	186,7	0,875	0,583	1030	1,128	217	216	0,5
9,95	9,85	4,43	14,83	172,8	0,799	0,550	1010	1,126	196	196	0,0
9,96	8,78	4,47	13,96	153,0	0,675	0,491	980	1,117	168	169	0,6
9,96	8,91	4,49	14,04	154,7	0,685	0,496	980	1,117	169	170	0,6

возрастают. При определенной величине рабочего хода исчерпывается ресурс пластичности осаживаемого материала, что приводит к появлению трещин в изделии. Поэтому для получения высококачественных изделий необходимо определить параметры, требующиеся для расчета предельного формоизменения заготовки при осадке по существующим теориям разрушения. Такими параметрами являются величины накопленной деформации e_i , гидростатического давления σ и, в случае ярко выраженной зависимости свойств материала от скорости деформации, интенсивности скоростей деформации ξ_i в опасной точке очага пластической деформации.

При осадке наиболее опасной точкой является точка Б, расположенная посередине боковой поверхности заготовки (см. рис. 4), т.е. в месте наибольшей бочкообразности, поскольку накопленные деформации и алгебраическая величина гидростатического давления здесь достаточно велики. В нашей постановке

$$e_{iB} = e_{iA}.$$

Из выражения (7) с учетом формулы (16) и того, что $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, следует, что гидростатическое давление

$$\sigma = \frac{2}{3} + \sigma_z.$$

Подставив сюда формулу (15), с учетом выражения (17) при $z = h/2$ и $\rho = d/2$ получим

$$\sigma = -0,333 - \frac{\mu h}{d}. \quad (49)$$

Конкретные примеры прогнозирования разрушения будут приведены в статье, посвященной исследованию процесса высадки.

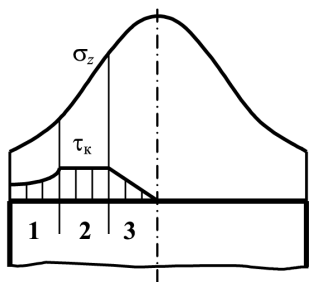


Рис. 7. Эпюры контактных напряжений в решении Е.П. Унксова

Теперь проанализируем недостатки считающегося наиболее обоснованным решения задачи по определению силы осадки, выполненного Е.П. Унксовым с помощью инженерного метода (известное решение Э. Зибеля, при котором касательные напряжения приняты постоянными по всей поверхности контакта, является частным случаем решения Е.П. Унксова). В результате этого решения в общем случае [4] получено распределение нормальных и касательных напряжений на

контактной поверхности, показанное на рис. 7.

1. Равенства $\xi_\rho = \sigma_\theta$ и $\sigma_\rho = \sigma_\theta$, необходимые для решения упрощенного уравнения равновесия, приняты бездоказательно. Широко распространенное мнение, что осесимметричная деформация предопределяет эти равенства, является неверным, что будет доказано далее.

2. Приняты допущения, что на одном участке контактной поверхности (см. рис. 7, участок 1) касательные напряжения определяются законом Амонтона–Кулона $\tau_k = \mu\sigma_n$, т. е. пропорциональны нормальному напряжению и, соответственно, возрастают в направлении оси симметрии аналогично росту $\sigma_n = |\sigma_z|$, а на другом участке 2 касательные напряжения постоянны. Между тем, упомянутые в п. 1 равенства возможны лишь при определенном виде скоростей течения, описываемом выражениями (1) и (3). Но при таких скоростях течения в соответствии со строго выведенным выражением (9) касательные напряжения неизбежно зависят от радиуса ρ по закону, близкому к линейному, при использовании точного выражения интенсивности скоростей деформации ξ_i , и по линейному закону при использовании приближенного выражения ξ_i . Поэтому они будут уменьшаться в направлении оси, что противоречит как одному, так и другому допущению. Таким образом, при условии равенства радиального и тангенциального напряжений оба принятых в отношении касательных напряжений допущения являются невозможными.

3. Наличие участка 2 с постоянными касательными напряжениями объясняется тем, что на этом участке, вследствие возрастания σ_z , касательные напряжения, определяемые по закону Амонтона–Кулона, начинают превосходить предельно возможную величину $\tau_k = 0,5\sigma_s$. Поэтому на данном участке касательные напряжения принимаются постоянными, равными предельной величине. Следуя данной логике, участок 3, на котором касательные напряжения приняты линейно падающими до нуля, вообще не должно быть, так как напряжения σ_z на этом

участке еще более возрастают, т.е. тут с еще большим основанием касательные напряжения следует принять постоянными, равными предельной величине. Однако для устранения очевидных недостатков решения, связанных с получением излома на эпюре нормальных напряжений и разрыва касательных напряжений на оси симметрии, принятая логика решения нарушается искусственным введением участка 3.

4. Так как участок 3 исходными положениями решения никак не мотивирован, то невозможно и доказательно определить радиус его границы с участком 2. В результате этот радиус задается бездоказательно, со ссылкой на достаточное приближение к экспериментальным данным. Фактически такое исследование является уже не теоретическим, а экспериментально-аналитическим.

5. Естественно, что наименьшие контактные касательные напряжения, действующие на участке 3, должны максимально облегчать радиальное скольжение металла на данном участке. Однако данный участок вопреки теоретическому смыслу называется “зоной прилипания”. Такая подмена понятий позволяет с помощью отсутствия деформации кольцевых рисок, нанесенных в данной зоне, экспериментально “доказать” наличие участка 3 и определить его протяженность, хотя на самом деле отсутствие деформации никак не подтверждает падения касательных напряжений до нуля.

Столь большое количество противоречащих друг другу предположений приводит к непредсказуемости надежности результатов анализа. В итоге, решения инженерным методом задач более сложных, чем осадка, часто оказываются малопригодными для практического использования. Это и побудило авторов выполнить изложенное ранее достаточно строгое теоретическое решение, основанное на минимальном количестве допущений и лишенное перечисленных недостатков.

Теперь рассмотрим осадку полой заготовки на оправке, расчетная схема которой представлена на рис. 8. Кинематически возможную осевую скорость возьмем в виде выражения (1). В результате, сделав соответствующие выкладки, получим, что радиальная скорость определяется выражением (2). Из граничного условия $v_\rho = 0$ при $\rho = d/2$ вытекает, что

$$f_1(z) = -\frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{d^2}{8},$$

и, следовательно,

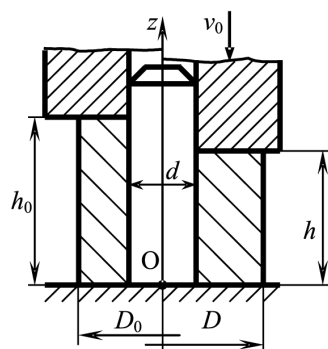


Рис. 8. Осадка полой заготовки на оправке

$$v_\rho = \frac{1}{2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \left(\rho - \frac{d^2}{4\rho} \right). \quad (50)$$

Учитывая формулы (1), (4) и (50), находим скорости деформаций:

$$\begin{cases} \xi_z = -\frac{\partial f(z)}{\partial z}; \\ \xi_\rho = \frac{1}{2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \left(1 + \frac{d^2}{4\rho^2} \right); \\ \xi_\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \left(1 - \frac{d^2}{4\rho^2} \right); \\ \eta_{\rho z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \left(\rho - \frac{d^2}{4\rho} \right). \end{cases} \quad (51)$$

Из полученных выражений видно, что в данном случае $\xi_\rho \neq \xi_\theta$ и, следовательно, $\sigma_\rho \neq \sigma_\theta$. Это доказывает, что принятие данных равенств лишь на основании осесимметричности деформации является некорректным.

Так как $\rho \geq d/2$, то из сравнения первого и второго выражений системы (51) видно, что и при осадке полой заготовки максимальной по абсолютной величине скоростью деформации является ξ_z . С учетом этого из выражения (5) следует, что интенсивность скоростей деформаций будет равна

$$\xi_i = \beta \frac{\partial f(z)}{\partial z}. \quad (52)$$

С учетом формулы (52) и четвертых выражений систем (6) и (51), получаем

$$\tau_{\rho z} = \frac{1}{6} \frac{\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} \left(\rho - \frac{d^2}{4\rho} \right)}{\beta \frac{\partial f(z)}{\partial z}} = f_2(z) \left(\rho - \frac{d^2}{4\rho} \right). \quad (53)$$

Подставив выражение (53) во второе уравнение системы (8), найдем, что

$$\sigma_z = -2 \int f_2(z) dz + f(\rho). \quad (54)$$

Из систем (6) и (51) видно, что наибольшим по алгебраической величине нормальным напряжением будет σ_ρ , а наименьшим — σ_z . С учетом этого приближенное условие пластичности имеет вид

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \beta,$$

откуда

$$\sigma_\rho = \sigma_z + \beta. \quad (55)$$

Из систем (6) и (51) с учетом выражения (52) следует, что

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \frac{2}{3\xi_i}(\xi_\rho - \xi_\theta) = \frac{1}{6\beta} \frac{d^2}{\rho^2}. \quad (56)$$

Подставив выражения (54)–(56) в первое уравнение равновесия (8), получим уравнение

$$\frac{4\rho}{4\rho^2 - d^2} \left[\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{6\beta} \frac{d^2}{\rho^3} \right] = -\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}.$$

Так как левая часть этого уравнения зависит только от ρ , а правая — только от z , то обе эти части должны равняться постоянной величине C_5 , откуда

$$f(\rho) = \frac{1}{12\beta} \frac{d^2}{\rho^2} + \frac{C_5}{2} \rho^2 - \frac{C_5 d^2}{4} \ln \rho + C_6, \quad (57)$$

$$f_2(z) = -C_5 z + C_7. \quad (58)$$

Подставив выражение (58) в формулу (53), найдем касательные напряжения

$$\tau_{\rho z} = (C_7 - C_5 z) \left(\rho - \frac{d^2}{4\rho} \right).$$

Из граничных условий $\tau_{\rho z} = \beta\mu$ при $\rho = D/2$, $z = 0$ и $\tau_{\rho z} = -\beta\mu$ при $\rho = D/2$ и $z = h$ следует, что произвольные постоянные в выражении касательного напряжения равны

$$\begin{cases} C_5 = \frac{4\beta\mu D}{(D^2 - d^2)h}; \\ C_7 = \frac{2\beta\mu D}{D^2 - d^2}. \end{cases} \quad (59)$$

Подставляя формулы (57) и (58) в выражение (54), получаем

$$\sigma_z = (C_5 z - 2C_7)z + \frac{1}{12\beta} \frac{d^2}{\rho^2} + \frac{C_5}{2} \rho^2 - \frac{C_5 d^2}{4} \ln \rho + C_6. \quad (60)$$

Подставляя формулу (60) в выражение (55) и используя граничное условие $\sigma_\rho = 0$ при $z = h$ и $\rho = D/2$, находим произвольную постоянную

$$C_6 = -\beta - \frac{d^2}{3\beta D^2} - \frac{C_5 D^2}{8} + \frac{C_5 d^2}{4} \ln \frac{D}{2}. \quad (61)$$

Тогда окончательно получим

$$\sigma_z = -\beta + \frac{d^2}{3\beta} \left(\frac{1}{4\rho^2} - \frac{1}{D^2} \right) + (C_5 z - 2C_7)z - \frac{C_5}{4} \left(\frac{D^2}{2} - 2\rho^2 + d^2 \ln \frac{2\rho}{D} \right). \quad (62)$$

Подставив в выражение (62) $z = h$, с учетом соотношений (59) получим формулу нормальных напряжений на поверхности контакта с верхним инструментом:

$$\sigma_z = -\beta + \frac{d^2}{3\beta} \left(\frac{1}{4\rho^2} - \frac{1}{D^2} \right) - \frac{\beta\mu D}{h(D^2 - d^2)} \left(\frac{D^2}{2} - 2\rho^2 + d^2 \ln \frac{2\rho}{D} \right).$$

С учетом этого относительная удельная сила осадки полой заготовки на оправке будет равна

$$q = \frac{2\pi}{\pi(D^2 - d^2)} \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} |\sigma_z| \rho d\rho = \beta \left\{ 1 + \frac{d^2}{3\beta^2} \left(\frac{1}{D^2} - \frac{2}{D^2 - d^2} \ln \frac{D}{d} \right) + \frac{\mu D}{4h(D^2 - d^2)^2} \left[(D^2 - 3d^2)(D^2 - d^2) + 4d^4 \ln \frac{D}{d} \right] \right\}. \quad (63)$$

В частном случае $d = 0$ формула (63) переходит в формулу (18), что видно с учетом раскрытия неопределенности по правилу Лопиталья и того, что при осадке сплошной заготовки $\beta = 1$. При осадке полой заготовки коэффициент Лоде $\beta > 1$. Так как согласно третьему выражению системы (51) при $\rho = d/2$ $\xi_\theta = 0$, то деформированное состояние на поверхности контакта заготовки с оправкой является плоским, и, следовательно, здесь $\beta = 1,155$. С учетом этого в расчетах можно принимать среднее значение $\beta = 1,1$.

Текущее значение среднего наружного диаметра заготовки находится из условия постоянства объема:

$$D = \sqrt{d^2 + (D_0^2 - d^2) \frac{h_0}{h}}.$$

Натуральное значение силы осадки определено выражением

$$P = \sigma_s \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) q.$$

Поскольку осевую скорость v_z можно и в случае осадки полой заготовки задать в виде первого выражения системы (29), то накопленные деформации будут определяться формулами, полученными ранее

для осадки сплошной заготовки. При осадке полой заготовки наиболее опасной точкой также является точка Б, расположенная в середине боковой поверхности заготовки, т.е. в месте наибольшей бочкообразности. Из выражения (7) с учетом формул (55) и (56) следует, что гидростатическое давление

$$\sigma = \frac{2\beta}{3} - \frac{d^2}{18\beta\rho^2} + \sigma_z.$$

Подставив сюда формулу (62) с учетом выражений (59), получим при $z = h/2$ и $\rho = D/2$:

$$\sigma = -\frac{\beta}{3} - \frac{2d^2}{9\beta D^2} - \frac{\beta\mu Dh}{D^2 - d^2}. \quad (64)$$

При $d = 0$ и $\beta = 1$ формула (64) переходит в формулу (49).

Экспериментальная проверка и практическое использование формул для осадки полой заготовки на оправке будут представлены в статье, посвященной исследованию высадки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осадчий В. Я., Воронцов А. Л., Безносиков И. И. Теория и расчеты технологических параметров штамповки выдавливанием. Учебное пособие для вузов с грифом Минобразования РФ. – М.: МГАПИ, 2001. – 307 с.
2. О х р и м е н к о Я. М., Т ю р и н В. А. Теория процессовковки. – М.: Высшая школа, 1977. – 295 с.
3. Т е о р и я обработки металлов давлением / Тарновский И.Я., Поздеев А.А., Ганаго О.А. и др. – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.
4. С т о р о ж е в М. В., П о п о в Е. А. Теория обработки металлов давлением. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
5. С м и р н о в - А л я е в Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
6. Х о л о д н а я объемная штамповка. Справочник / Под ред. Г.А. Навроцкого. – М.: Машиностроение, 1973. – 496 с.
7. К о л м о г о р о в В. Л. Напряжения, деформации, разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 229 с.

Статья поступила в редакцию 2.06.03

Александр Михайлович Дмитриев родился в 1948 г., окончил в 1972 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Технологии обработки давлением” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 210 научных работ в области обработки металлов давлением.

A.M. Dmitriev (b. 1948) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1972. Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, D. Sc. (Eng.), professor, head of the “Procedures and Techniques of Treatment by Pressure” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 210 publications in the field of plastic metal working.

