

3. Григорьев Ю. Н. О спектре пучка операторов задачи С.Л. Соболева // Динамика сплошной среды, Новосибирск. – 1974. – № 17. – С. 12–18.
4. Копачевский Н. Д., Радякин Н. К. О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. // Вопросы вычислительной математики и техники. – Киев: Наукова думка, 1976. С. 3–25.
5. Гонткевич В. С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах // Гидромеханика. Республ. межвуз. сб. – Киев, 1972. – Вып. 20. – С. 52–58.
6. Рвалов Р. В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Известия АН СССР, МЖГ. – 1973. – № 4. – С. 81–88.
7. Копачевский Н. Д. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких жидкостей. – Харьков: Физико-технический институт низких температур, препринт, 1978. Препринт № 33–77. – 60 с.
8. Ватсон Т. И. Теория Бесселевых функций. Ч.1. – М.: И.И.Л., 1949. – 797 с.
9. Орлов В. В., Темнов А. Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака. // Современные методы теории функций и смежные проблемы. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997.
10. Орлов В. В., Темнов А. Н.: Колебания вращающейся жидкости, вытекающей из закрытого сосуда // ИФЖ, Минск, 2000. – С. 165–173
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 01.06.2003

Владимир Владимирович Орлов родился в 1967 г., окончил в 1990 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 2 научных работ в области динамики жидкости.

V.V. Orlov (b. 1967) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1990. Author of 2 publications in the field of fluid dynamics.

---

УДК 533.6

А. И. Пастухов, Е. К. Галемин,  
В. А. Денисов

## **К РАСЧЕТУ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛЬЕВ С КОНЦЕВЫМИ ШАЙБАМИ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ**

*Задача расчета аэрогидродинамических характеристик тонких крыльев с концевыми шайбами решена на основе нелинейной теории непрерывной вихревой поверхности. Предлагаемый метод применим для крыльев больших и малых относительных удлинений, он учитывает размеры шайб и положение их по хорде крыла.*

**Состояние вопроса и описание эксперимента.** Вопрос о применении концевых шайб для улучшения аэрогидродинамических характеристик (АГДХ) крыла конечного размаха, вообще говоря, не является новым. Опубликованные исследования относятся в основном

к крыльям больших относительных удлинений. Из таких исследований можно назвать работы Нагеля и Манглера, в которых задачу решали методом конформных преобразований в применении к частному случаю систем с минимальным коэффициентом индуктивного сопротивления. Известны работы Я.М. Курицкеса [1, 2] по общей теории крыла с шайбами. Удовлетворительное решение вопроса о влиянии шайб на силовые характеристики крыла большого относительного удлинения в целом, полученное Я.М. Курицкесом с помощью П-образной системы вихрей, позволило ему перейти к исследованию частного случая, а именно: крыла с симметричными по высоте шайбами на базе распределенной по размаху циркуляции.

Как известно, распределение циркуляции по размаху прямоугольного в плане крыла большого относительного удлинения близко к эллиптическому. Эксперименты показывают, что применение шайбы, уменьшая скосы потока в основном на концах крыла, выравнивает распределение подъемной силы по размаху и увеличивает ее суммарное значение. Решение этого вопроса в рамках теории несущей линии, по существу, и дано в работах Я.М. Курицкеса.

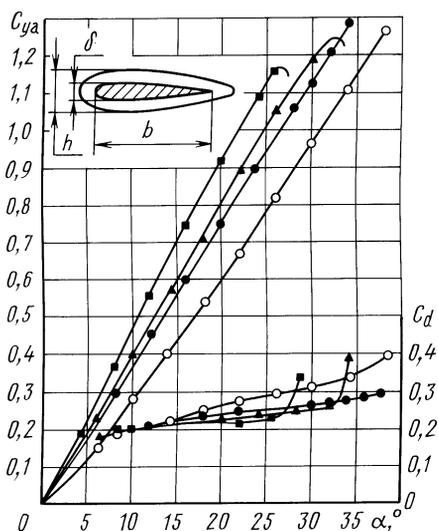
Настоящая статья посвящена исследованию влияния концевых шайб на распределение нагрузки по хорде крыла, а следовательно, в момент тангажа и при определенном положении центра давления. Особенно актуально это положение для крыльев малых относительных удлинений, для которых характерны нелинейность по углу атаки подъемной силы и момента тангажа, а также нестабильность положения центра давления.

В соответствии со сказанным, задача решается на основе нелинейной теории непрерывной вихревой поверхности [3], позволяющей с единых позиций рассчитать суммарные и распределенные характеристики крыльев больших и малых относительных удлинений.

Для выявления эффективности действия шайб на АГДХ прямоугольных в плане крыльев различных относительных удлинений были предприняты продувки крыльев с удлинениями  $\lambda = 0,8; 1,0; 1,5$  и симметричным профилем с относительной толщиной  $\bar{\delta} = 0,15$  ( $\bar{\delta} = \delta/b$ , рис. 1) с шайбами различной относительной ширины  $h = 2\delta, 3\delta, 5\delta$  при средней скорости потока в трубе 37 м/с.

Шайбы были изготовлены из листового железа толщиной 1 мм и крепились вплотную к торцовым сечениям крыла. Форма шайб повторяла профиль крыла, и только задняя кромка была закруглена.

В результате испытаний выявили, что эффективность шайб в смысле увеличения коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$  становится больше с уменьшением относительного удлинения крыла. Так например,



**Рис. 1. Результаты экспериментального исследования прямоугольного крыла с относительным удлинением  $\lambda = 0,8$  с полнопрофильными торцовыми шайбами:**

● —  $h = 2\delta$ , ▲ —  $h = 3\delta$ , ■ —  $h = 5\delta$ ,  
○ — крыло без шайб

шайб, установленных на крыле, способствует увеличению  $C_{ya}$  и существенной стабилизации центра давления. Видно, что с увеличением ширины шайб до  $h = 5\delta$  центр давления крыла становится практически стабильным во всем диапазоне углов атаки от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \alpha_{кр}$ . Таким образом, эффект от установки шайб эквивалентен увеличению относительного удлинения крыла.

Для обнаружения влияния протяженности шайб по хорде крыла была проведена вторая серия испытаний крыла с  $\lambda = 1,0$  и шайбами шириной  $h = 3\delta$  и  $h = 5\delta$ . Форма шайб последовательно изменялась следующим образом: 1) шайбы полного профиля; 2) передние кромки шайб, выходящие за профиль, срезаны и закруглены; 3) задние кромки шайб также срезаны и закруглены; 4) передняя часть шайб срезана на расстоянии  $1/3$  хорды крыла от его передней кромки; 5) то же на расстоянии  $2/3$  хорды крыла от его передней кромки.

Результаты испытаний крыла с шайбами шириной  $h = 3\delta$  и последовательно изменяющейся длиной их хорд изображены на рис. 2. Видно, что установка шайб с хордой, длина которой больше длины хорды

установка шайб шириной  $h = 5\delta$  на крыло с относительным удлинением  $\lambda = 0,8$  при угле атаки  $\alpha = 20^\circ$  приводит к увеличению на 50 % коэффициента подъемной силы, тогда как те же шайбы на крыле с относительным удлинением  $\lambda = 1,5$  приводят к приращению  $C_{ya}$  на 25 %. Кроме того, установлено, что наличие шайб незначительно увеличивает общий коэффициент лобового сопротивления. По-видимому, уменьшение индуктивного сопротивления, обусловленного наличием шайб, компенсируется существенным увеличением сопротивления трения.

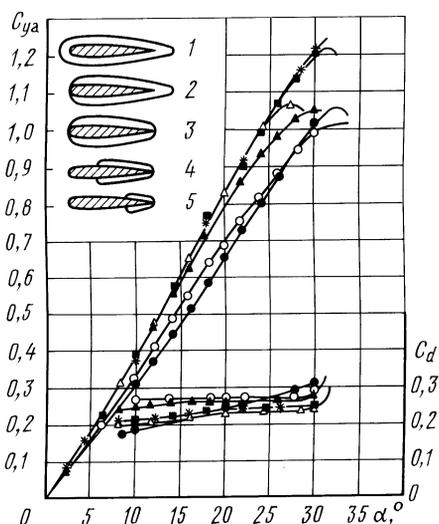
Изображенные на рис. 1 результаты испытания крыла с относительным удлинением  $\lambda = 0,8$  в присутствии шайб позволяют заключить, что увеличение ширины

крыла, нецелесообразна, так как не дает преимуществ ни по  $C_{ya}$ , ни по  $C_d$  сравнительно с шайбами, длина которых равна длине крыла. Дальнейшее уменьшение длины шайб ведет к уменьшению их влияния на величину  $C_{ya}$ , но благотворно сказывается на стабилизации положения центра давления.

Основываясь на результатах экспериментального исследования, выявили, что при удачном конструктивном решении вопроса, применение концевых шайб на крыльях и рулях может дать известное улучшение их АГДХ.

**Вихревая схема крыла с шайбами и вычисление индуктивных скоростей.** Рассмотрим несущую систему, состоящую из тонкого крыла, схематизируемого пластиной прямоугольной формы в плане, и концевых плоских прямоугольных шайб. Примем, что шайбы несимметричны по высоте, начинаются от задней кромки пластины и перекрывают всю хорду или ее часть.

При решении задачи воспользуемся теорией несущей поверхности аналогично тому, как это было сделано в случае изолированного крыла [3]. Для этого заменим пластину непрерывной последовательностью П-образных вихрей, причем в порядке допущения будем считать, что концевая шайба разделяет присоединенный вихрь на торце пластинки на два свободных одинаковой интенсивности  $0,5\gamma(x, \alpha)dx$ , которые распространяются вдоль верхнего и нижнего участков шайб, а затем сбегают с их концов под углом  $\alpha$  к плоскости пластины (рис. 3). Принятая для отсчета координат система изображена на рис. 3. Длина хорды и размах крыла обозначены соответственно  $b$  и  $l$ . Очевидно, что отличие от соответствующего решения для изолированного крыла будет заключаться лишь в учете изменений в величинах индуктивных скоростей, вносимых установкой шайб на концах крыла. В соответствии с использованием для модели пластины П-образных вихрей принимаем допущение, что снос потока постоянен по размаху крыла и равен величине сноса, вызываемого всей вихревой системой в среднем сечении.



**Рис. 2.** Результаты экспериментального исследования крыла с относительным удлинением  $\lambda = 1,0$  с торцовыми шайбами различной протяженности по хорде. Номера шайб:

1 —  $\Delta$ , 2 —  $\blacksquare$ , 3 —  $*$ , 4 —  $\blacktriangle$ , 5 —  $\circ$ , крыло без шайб —  $\bullet$ .



Вычислим теперь величину скорости, индуцируемой вихрями, сбегаящими с конца нижнего участка шайбы (см. рис. 4). Пара вихрей интенсивности  $0,5\gamma(x, \alpha) dx$  индуцирует в точке  $C(x')$  скорость  $W'_{c(н)}$ , нормальную к направлению их схода и ориентированную в плоскости  $Oxy$  (см. рис. 4):

$$dW'_{c(н)}(x, x', \alpha) = \frac{\gamma(x, \alpha) dx}{4\pi h_{c(н)}} (\cos \varphi_2 + 1) \cos \psi,$$

где  $h_{c(н)} = CE$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $C(x')$  на направление вихря (см. рис. 4).

Восстановим из точки  $C(x')$  перпендикуляр  $CB$  до пересечения с прямой  $AB$  в плоскости  $Oxy$ , параллельной средней линии пластины. Проектируя ломаную  $ABCD$  на направление  $CD$ , получим

$$CD = BC \cos \alpha - AB \sin \alpha = y_1 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha,$$

где  $KA = BC = y_1$  — высота нижнего участка шайбы в сечении, определяемом абсциссой  $x$ . Из прямоугольного треугольника  $CDE$  имеем

$$h_{c(н)}^2 = CE^2 = CD^2 + DE^2 = (0,5l)^2 + [y_1 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha]^2$$

и

$$\cos \psi = \frac{DE}{CE} = \frac{0,5l}{h_{c(н)}}.$$

Подставляя значения  $h_{c(н)}$  и  $\cos \psi$ , получим

$$\begin{aligned} dW'_{c(н)}(x, x', \alpha) &= \\ &= \frac{\gamma(x, \alpha) dx}{4\pi} \frac{0,5l}{(0,5l)^2 + [y_1 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha]^2} (\cos \varphi_2 + 1). \end{aligned}$$

Значение  $\cos \varphi_2$  найдется из прямоугольного треугольника  $CEF$ :

$$\cos \varphi_2 = \frac{EF}{CF}.$$

Проектируя ломаную  $ABCD$  на направление  $AD$ , найдем

$$AD = EF = AB \cos \alpha + BC \sin \alpha = y_1 \sin \alpha + (x' - x) \cos \alpha,$$

но

$$CF^2 = CE^2 + FE^2 = y_1^2 + (0,5l)^2 + (x' - x)^2$$

и

$$\cos \varphi_2 = \frac{y_1 \sin \alpha + (x' - x) \cos \alpha}{\sqrt{y_1^2 + (0,5l)^2 + (x' - x)^2}}.$$

Подставляя значение  $\cos \varphi_2$  в формулу для  $dW'_{c(н)}(x, x', \alpha)$ , получим

$$dW'_{c(н)}(x, x', \alpha) = \frac{\gamma(x, \alpha) dx}{4\pi} \frac{0,5l}{(0,5l)^2 + [y_1 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha]^2} \times \left[ \frac{y_1 \sin \alpha + (x' - x) \cos \alpha}{\sqrt{y_1^2 + (0,5l)^2 + (x' - x)^2}} + 1 \right].$$

Нормальный к пластине компонент этой скорости можно найти по выражению

$$dW_{c(н)}^n(x, x', \alpha) = dW'_{c(н)}(x, x', \alpha) \cos \alpha.$$

Интегрируя по длине шайбы, для нормального компонента скорости, индуцируемой свободными вихрями, сбегаящими с нижних участков шайб, окончательно получим

$$dW_{c(н)}^{(n)}(x', \alpha) = \frac{0,5l}{4\pi} \int_{b_1}^{0,5b} \gamma(x, \alpha) \frac{\cos \alpha}{(0,5l)^2 + [y_1 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha]^2} \times \left[ \frac{y_1 \sin \alpha + (x' - x) \cos \alpha}{\sqrt{y_1^2 + (0,5l)^2 + (x' - x)^2}} + 1 \right] dx.$$

Совершенно таким же образом можно получить выражение для скорости, индуцируемой свободными вихрями, сбегаящими с верхних участков шайб:

$$dW_{c(н)}^{(n)}(x', \alpha) = \frac{0,5l}{4\pi} \int_{b_1}^{0,5b} \gamma(x, \alpha) \frac{\cos \alpha}{(0,5l)^2 + [y_2 \cos \alpha - (x' - x) \sin \alpha]^2} \times \left[ \frac{(x' - x) \cos \alpha - y_2 \sin \alpha}{\sqrt{y_2^2 + (0,5l)^2 + (x' - x)^2}} + 1 \right] dx,$$

где  $y_2$  — высота верхнего участка шайбы в сечении, определяемом абсциссой  $x$ .

Относя индуктивные скорости и вихревую плотность к скорости набегающего потока на бесконечности

$$\overline{W}_\Pi = \frac{W_\Pi}{V_\infty}, \quad \overline{W}_c = \frac{W_c}{V_\infty}, \quad \overline{W}_{c(н)}^n = \frac{W_{c(н)}^n}{V_\infty}, \quad \overline{W}_{c(в)}^n = \frac{W_{c(в)}^n}{v_\infty}, \quad \overline{\gamma} = \frac{\gamma}{V_\infty}$$

и вводя в формулы относительные величины

$$\lambda = \frac{l}{b}, \quad \overline{y}_1 = \frac{y_1}{0,5b}, \quad \overline{y}_2 = \frac{y_2}{0,5b},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{0,5b} = -\cos \theta, \quad \bar{x}' = \frac{x'}{0,5b} = -\cos \theta,$$

полученные формулы для скоростей можно записать в виде

$$\bar{W}_{\Pi}(\alpha, \theta') = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\bar{\gamma}(\theta, \alpha)}{\cos \theta - \cos \theta'} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\lambda^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2}};$$

$$\bar{W}_c(\alpha, \theta') = \frac{\lambda \cos \alpha}{2\pi} \int_0^{\theta_1} \frac{\bar{\gamma}(\theta, \alpha)}{\lambda^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2 \sin^2 \alpha} \times \left[ 1 + \frac{(\cos \theta - \cos \theta') \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2}} \right] \sin \theta d\theta;$$

$$\bar{W}_{c(н)}^{(n)}(\alpha, \theta') = \frac{\lambda \cos \alpha}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\bar{\gamma}(\theta, \alpha)}{\lambda^2 + [\bar{y}_1 \cos \alpha - (\cos \theta - \cos \theta') \sin \alpha]^2} \times \left[ \frac{\bar{y}_1 \sin \alpha + (\cos \theta - \cos \theta') \cos \alpha}{\sqrt{\bar{y}_1^2 + \lambda^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2}} + 1 \right] \sin \theta d\theta;$$

$$\bar{W}_{c(в)}^{(n)}(\alpha, \theta') = \frac{\lambda \cos \alpha}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\bar{\gamma}(\theta, \alpha)}{\lambda^2 + [\bar{y}_2 \cos \alpha + (\cos \theta - \cos \theta') \sin \alpha]^2} \times \left[ \frac{(\cos \theta - \cos \theta') \cos \alpha - \bar{y}_2 \sin \alpha}{\sqrt{\bar{y}_2^2 + \lambda^2 + (\cos \theta - \cos \theta')^2}} + 1 \right] \sin \theta d\theta,$$

где  $\theta_1 = \arccos[-b_1/(0,5b)]$ .

**Составление и решение интегрального уравнения.** Принятое допущение о постоянстве скоса потока вдоль размаха крыла позволяет существенно упростить задачу и требовать удовлетворения граничного условия обтекания только в среднем сечении пластины. В таком случае граничное условие обтекания, т.е. условие равенства нормальных к пластине компонентов скорости набегающего потока и скоростей, индуцируемых вихревой системой, можно записать в следующем виде:

$$W_{\Pi}(x', \alpha) + W_c(x', \alpha) + W_{c(н)}^{(n)}(x', \alpha) + W_{c(в)}^{(n)}(x', \alpha) = V_{\infty} \sin \alpha.$$

Подставляя в это уравнение выражения для нормальных компонентов индуктивных скоростей и пользуясь разложением для  $\gamma(x, \alpha)$  [3]

$$\gamma(x, \alpha) = \gamma(\theta, \alpha) = 2V_{\infty} \left[ A_0(\alpha) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\alpha) \sin(n\theta) \right],$$

основное интегральное уравнение можно выразить через коэффициенты этого тригонометрического ряда.

Из приведенных далее формул следует, что суммарные АГДХ прямоугольных крыльев зависят только от коэффициентов  $A_0, A_1, A_2$ . Вычисления показывают, что значения этих коэффициентов практически не зависят от числа членов в разложении  $\gamma(\theta, \alpha)$  в ряд. Поэтому функцию  $\gamma(\theta, \alpha)$  можно представить в виде тригонометрического многочлена, содержащего три-четыре слагаемых. Так например, производя вычисления для четырех точек пластины, для которых  $\theta' = \pi/9, \pi/4, 5\pi/9, 5\pi/6$ , значения  $A_q(\alpha)$  можно получить из решения системы уравнений типа:

$$\begin{aligned}
 & A_0(\alpha) \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{(1 + \cos \theta) d\theta}{\chi(\theta, \pi/9) \sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} + \right. \\
 & \quad + \cos \alpha \left[ \int_0^{\theta_1} \frac{1 + \cos \theta}{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9) \sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^\pi \frac{1 + \cos \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_1 \cos \alpha - \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\bar{y}_1 \sin \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\bar{y}_1^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^\pi \frac{1 + \cos \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_2 \cos \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha - \bar{y}_2 \sin \alpha}{\sqrt{\bar{y}_2^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta \right\} + \\
 & \quad + A_1(\alpha) \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\chi(\theta, \pi/9) \sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} + \right. \\
 & \quad + \cos \alpha \left[ \int_0^{\theta_1} \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9) \sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_1 \cos \alpha - \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\bar{y}_1 \sin \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\bar{y}_1^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^\pi \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_2 \cos \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha - \bar{y}_2 \sin \alpha}{\sqrt{\bar{y}_2^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta \right\} + \\
 & \quad + A_2(\alpha) \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin 2\theta \sin \theta d\theta}{\chi(\theta, \pi/9) \sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} + \right. \\
 & \quad \left. + \cos \alpha \left[ \int_0^{\theta_1} \frac{\sin 2\theta \sin \theta}{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9) \sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin 2\theta \sin \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_1 \cos \alpha - \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\bar{y}_1 \sin \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\bar{y}_1^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin 2\theta \sin \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_2 \cos \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha - \bar{y}_2 \sin \alpha}{\sqrt{\bar{y}_2^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta \Bigg\} + \\
& + A_3(\alpha) \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\sin 3\theta \sin \theta d\theta}{\chi(\theta, \pi/9) \sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} + \right. \\
& + \left. \cos \alpha \left[ \int_0^{\theta_1} \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9) \sin^2 \alpha} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_1 \cos \alpha - \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\bar{y}_1 \sin \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha}{\sqrt{\bar{y}_1^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{\sin 3\theta \sin \theta}{\lambda^2 + [\bar{y}_2 \cos \alpha + \chi(\theta, \pi/9) \sin \alpha]^2} \left( 1 + \frac{\chi(\theta, \pi/9) \cos \alpha - \bar{y}_2 \sin \alpha}{\sqrt{\bar{y}_2^2 + \lambda^2 + \chi^2(\theta, \pi/9)}} \right) d\theta \right] \right\} = \\
& = \sin \alpha.
\end{aligned}$$

Следующие три уравнения относительно  $A_0(\alpha)$ ,  $A_1(\alpha)$ ,  $A_2(\alpha)$ ,  $A_3(\alpha)$  отличаются только значениями  $\chi$ :  $\chi(\theta, \pi/9) = \cos \theta - \cos(\pi/9)$ ,  $\chi(\theta, \pi/4) = \cos \theta - \cos(\pi/4)$ ,  $\chi(\theta, 3\pi/9) = \cos \theta - \cos(3\pi/9)$ ,  $\chi(\theta, 5\pi/6) = \cos \theta - \cos(5\pi/6)$ .

**Вычисление АГДХ.** Как было сказано, использование усеченного тригонометрического ряда позволяет получить аэродинамические коэффициенты, не используя довольно громоздких расчетов распределения давления, что связано с решением системы уравнений непроницаемости значительно более высокого порядка.

Ограничиваясь четырьмя коэффициентами ряда, можно получить: циркуляцию и коэффициент подъемной силы —

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) & = \\
& = \int_{-b/2}^{+b/2} \gamma(x, \alpha) dx = \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \gamma(\theta, \alpha) \sin \theta d\theta = bV_{\infty} \left[ A_0(\alpha) \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta + \right. \\
& + A_1(\alpha) \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta + A_2(\alpha) \int_0^{\pi} \sin 2\theta \sin \theta d\theta + A_3(\alpha) \int_0^{\pi} \sin 3\theta \sin \theta d\theta \Big], \\
\Gamma(\alpha) & = \pi V_{\infty} b \left[ A_0(\alpha) + \frac{A_1(\alpha)}{2} \right], \quad C_{ya}(\alpha) = 2\pi \left[ A_0(\alpha) + \frac{A_1(\alpha)}{2} \right];
\end{aligned}$$

момент вихревой плотности относительно передней кромки пластины —

$$\begin{aligned}
 M_z(\alpha) &= \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{b}{2} + x \right) \gamma(x, \alpha) dx = \frac{b^2}{4} \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \gamma(\theta, \alpha) \sin \theta d\theta = \\
 &= \frac{b^2}{4} \left[ \int_0^\pi \gamma(\theta, \alpha) \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \gamma(\theta, \alpha) \sin \theta \cos \theta d\theta \right] = \frac{b^2}{2} V_\infty \left\{ \pi \left[ A_0(\alpha) + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{A_1(\alpha)}{2} \right] - \left[ A_0(\alpha) \int_0^\pi \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \theta d\theta + A_1(\alpha) \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta + \right. \\
 &\left. \left. + A_2(\alpha) \int_0^\pi \sin 2\theta \cos \theta d\theta + A_3(\alpha) \int_0^\pi \sin 3\theta \cos \theta d\theta \right] \right\}, \\
 M_z(\alpha) &= \frac{b^2}{2} \pi V_\infty \left\{ \left[ A_0(\alpha) + \frac{A_1(\alpha)}{2} \right] - \left[ \frac{A_0(\alpha)}{2} + \frac{A_2(\alpha)}{4} \right] \right\};
 \end{aligned}$$

расстояние центра вихревой плотности от передней кромки —

$$x_d(\alpha) = \frac{M_z(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{A_0(\alpha) + 0,5A_2(\alpha)}{A_0(\alpha) + 0,5A_1(\alpha)} \right);$$

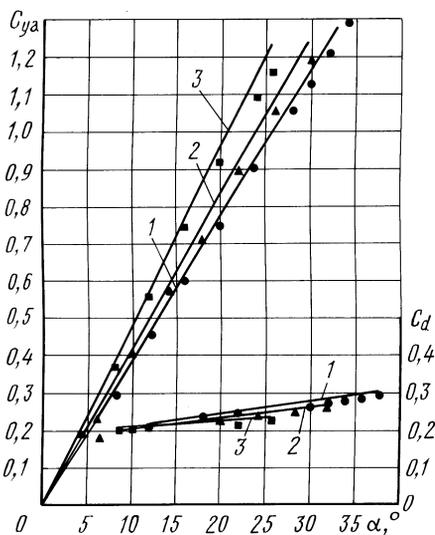
относительное положение центра вихревой плотности, приближенно отождествляемое с центром давления —

$$C_d(\alpha) = \frac{x_d(\alpha)}{b} = 0,25 \left( 2 - \frac{A_0(\alpha) + 0,5A_2(\alpha)}{A_0(\alpha) + 0,5A_1(\alpha)} \right).$$

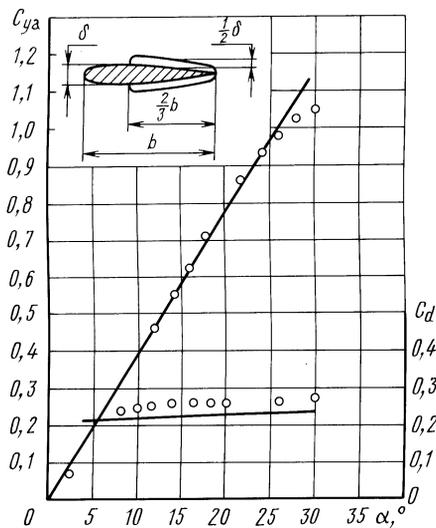
По предлагаемой схеме были выполнены расчеты для прямоугольных в плане крыльев с относительным удлинением  $\lambda = 0,8; 1,0$  и шайбами различной относительной толщины. Результаты расчетов в сравнении с экспериментом представлены на рис. 5 и 6.

**Вывод.** Предлагаемая схема позволяет рассчитывать указанные аэродинамические характеристики крыльев больших и малых относительных удлинений с шайбами, причем имеется возможность учитывать влияние их формы, размеров и положения по хорде крыла.

В заключение следует заметить, что при исследовании несущей системы такого рода мы пренебрегали влиянием на циркуляцию горизонтальных скоростей, индуцируемых вертикальными участками несущих



**Рис. 5.** Сравнение расчетов по предлагаемой схеме для пластины с данными эксперимента для крыла с относительным удлинением  $\lambda = 0,8$  с полнопрофильными торцовыми шайбами: 1 —  $h = 2\delta$ ; 2 —  $h = 3\delta$ ; 3 —  $h = 5\delta$ ; ● —  $h = 2\delta$ ; ▲ —  $h = 3\delta$ , ■ —  $h = 5\delta$  (данные эксперимента)



**Рис. 6.** Сравнение расчетов по предлагаемой схеме с данными эксперимента для крыла с относительным удлинением  $\lambda = 1,0$  с шайбами, перекрывающими заднюю часть крыла: сплошная линия — расчет, ○ — эксперимент

вихрей, что оправдывается удовлетворительным совпадением расчетных результатов с экспериментальными.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курцес Я. М. Теория крыльев с концевыми шайбами при гипотезе П-образных вихрей. — М.: Изд-во ВВА им. Н.Е. Жуковского, 1947.
2. Курцес Я. М. Вихревая теория крыла с концевыми симметричными по высоте шайбами. — М.: Изд-во ВВА им. Н.Е. Жуковского, 1948.
3. Пастухов А. И. Вихревое математическое моделирование обтекания тел потоком сплошной среды. Нелинейная вихревая теория несущей поверхности. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.

Статья поступила в редакцию 6.02.03

Анатолий Иванович Пастухов родился в 1918 г., окончил в 1941 г. Высшее военное инженерное училище им. Ф.Э. Дзержинского. Д-р техн. наук, профессор кафедры "Теоретическая механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области аэродинамики (теория крыла и тела вращения).

A.I. Pastukhov (b. 1918) graduated from the Naval Higher Engineering School n.a.F.E. Dzerzhinsky in 1941. D. Sc. (Eng.), professor of "Theoretical Mechanics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 publications in the field of aerodynamics (theory of wing and body of rotation).