

УДК 536.2

Т. В. Боровкова, В. Н. Елисеев

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕМНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ И ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Решена одномерная нестационарная задача теплопроводности пластины с внутренними источниками теплоты и граничными условиями третьего рода на ее поверхностях методом конечных интегральных преобразований. Рассмотрены частные случаи данного решения для пластины при симметричном и несимметричном нагреве.

В различных технических устройствах, применяемых в радиоэлектронной, ядерной и других отраслях техники существует проблема обеспечения требуемого теплового режима элементов конструкций при наличии внутреннего тепловыделения. Нередко именно температурное состояние указанных элементов определяет работоспособность и ресурс работы устройства в целом. Верхний достижимый уровень температур в них, как правило, ниже температуры, при которой наблюдается существенное изменение основных характеристик материала или его структуры. Во многих случаях физической моделью таких элементов конструкции может служить плоская пластина с постоянными теплофизическими свойствами, равномерно распределенными в объеме источниками теплоты, и доминирующим изменением температуры по ее толщине (рис. 1).

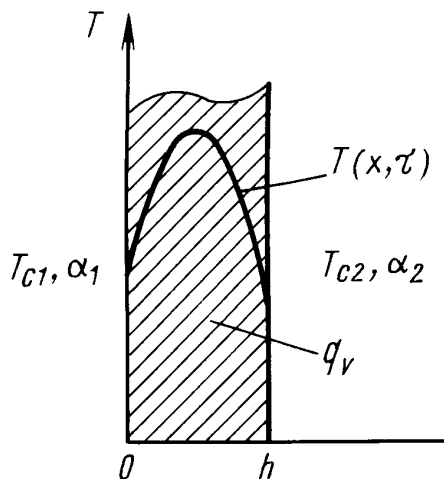


Рис. 1. К определению температуры в плоской пластине

Приведем математическую модель рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho}; \quad (1)$$

$$\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_1 [T(0, \tau) - T_{c1}]; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(h, \tau)}{\partial x} = \alpha_2 [T(h, \tau) - T_{c2}]; \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (4)$$

где $T(x, \tau)$ — температура пластины; a — температуропроводность; q_v — плотность теплового потока; c, ρ, λ и α — теплоемкость, плотность материала пластины, теплопроводность и коэффициент теплоотдачи; T_{c1}, T_{c2} — температура сред, разделяемых пластиной; T_0 — температура пластины в начальный момент времени.

Для решения задачи (1)–(4) удобно использовать ее безразмерную форму записи:

$$\frac{\partial \theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po; \quad (5)$$

$$\theta'(\xi_1, Fo) - Bi_1 \theta(\xi_1, Fo) = -Bi_1 \theta_{c1}; \quad (6)$$

$$\theta'(\xi_2, Fo) + Bi_2 \theta(\xi_2, Fo) = Bi_2 \theta_{c2}; \quad (7)$$

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad (8)$$

где $\xi = \frac{x}{h}$ — безразмерная координата; h — толщина пластины; $Fo = (a\tau)/h^2$ — число Фурье; $Po = (q_v h^2)/(\lambda T_m)$ — критерий Померанцева; $Bi = (\alpha h)/\lambda$ — критерий Био; $f(\xi) = T_0/T_m$ — функция распределения температуры в начальный момент времени; T_m — температура, выбранная для приведения системы (1)–(4) к безразмерному виду (постоянная величина, имеющая размерность температуры).

Решение близкой по постановке нестационарной задачи теплопроводности без внутренних источников теплоты содержится в работах [1–5]. Более общая формулировка аналогичных задач и их обобщенное решение для тел в виде пластин, цилиндров, сфер и стержней различной формы приведено в работе [6], в которой для получения результата использован метод конечных интегральных преобразований.

Улучшенная сходимость рядов, образующих решение задачи (5)–(8), достигается в результате представления искомой функции $\theta(\xi, Fo)$ в виде суммы двух составляющих:

$$\theta(\xi, Fo) = \theta^*(\xi, Fo) + \vartheta(\xi, Fo), \quad (9)$$

где $\theta^*(\xi, Fo)$ — стационарная составляющая температурного поля (число Фурье здесь служит параметром), а $\vartheta(\xi, Fo)$ — нестационарная составляющая. Первую составляющую находят из решения следующей задачи:

$$\frac{d^2 \theta^*(\xi)}{d\xi^2} + Po = 0; \quad (10)$$

$$(\theta^*(\xi_1))' - Bi_1 \theta^*(\xi_1) = -Bi_1 \theta_{c1}; \quad (11)$$

$$(\theta^*(\xi_2))' + Bi_2 \theta^*(\xi_2) = Bi_2 \theta_{c2} \quad (12)$$

и она имеет вид

$$\theta^*(\xi) = \theta_{c1} + \frac{(\theta_{c2} - \theta_{c1}) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2}\right) Po}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_2 (1 + Bi_1 \xi) - \frac{Po}{2} \xi^2. \quad (13)$$

Для определения нестационарной составляющей температурного поля $\vartheta(\xi, Fo)$ используют краевую задачу:

$$\frac{\partial \vartheta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (14)$$

$$\vartheta'(\xi_1, Fo) - Bi_1 \vartheta(\xi_1, Fo) = 0; \quad (15)$$

$$\vartheta'(\xi_2, Fo) + Bi_2 \vartheta(\xi_2, Fo) = 0; \quad (16)$$

$$\vartheta(\xi, 0) = f(\xi) - \theta^*(\xi, 0). \quad (17)$$

Применяя к дифференциальному уравнению (14) и начальному условию (17) интегральное преобразование вида

$$\bar{\vartheta}(Fo) = \int_0^1 \rho(\xi) \vartheta(\xi, Fo) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi, \quad (18)$$

получают

$$\frac{d\bar{\vartheta}(Fo)}{dFo} = -\mu_n^2 \bar{\vartheta}(Fo); \quad (19)$$

$$\bar{\vartheta}(0) = \bar{f} - \bar{\theta}^*(0), \quad (20)$$

где

$$\bar{f} = \int_0^1 \rho(\xi) f(\xi) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi; \quad (21)$$

$$\bar{\theta}^*(0) = \int_0^1 \rho(\xi) \theta^*(\xi, 0) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi \quad (22)$$

($\rho(\xi)$ — весовая функция, μ_n — собственные числа).

В рассматриваемом случае (плоская пластина) весовая функция $\rho(\xi) = 1$ [7], а ненормированное ядро интегрального преобразования $k(\mu_n, \xi)$ находят из решения граничной задачи Штурма–Лиувилля

$$k''(\mu_n, \xi) + \mu_n^2 k(\mu_n, \xi) = 0; \quad (23)$$

$$k'(\mu_n, \xi_1) - \text{Bi}_1 k(\mu_n, \xi_1) = 0; \quad (24)$$

$$k'(\mu_n, \xi_2) + \text{Bi}_2 k(\mu_n, \xi_2) = 0, \quad (25)$$

где $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 1$.

Решая уравнение (23) совместно с граничным условием (24), находим ненормированное ядро интегрального преобразования. С точностью до постоянной интегрирования решение имеет вид

$$k(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi). \quad (26)$$

Нормирование ядра $k(\mu_n, \xi)$ проводится в соответствии с формулой

$$\bar{k}(\mu_n, \xi) = \frac{k(\mu_n, \xi)}{\sqrt{N}}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \int_0^1 k^2(\mu_n, \xi) d\xi = \int_0^1 \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \left(\frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + \frac{2}{\text{Bi}_1} \sin^2 \mu_n \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля получается в результате подстановки решения (26) в граничное условие (25):

$$\text{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n^2 - \text{Bi}_1 \cdot \text{Bi}_2}{\mu_n (\text{Bi}_1 + \text{Bi}_2)}. \quad (29)$$

Функции \bar{f} и $\bar{\theta}^*(0)$ в правой части начального условия (20) находят из выражений:

$$\bar{f} = \int_0^1 \theta_0 \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \int_0^1 \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] d\xi = \\ = \frac{\theta_0}{\sqrt{N}} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right); \quad (30)$$

$$\bar{\theta}^*(0) = \int_0^1 \theta^*(\xi, 0) \bar{k}(\mu_n, \xi) d\xi = \\ = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ L + L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\text{Po}}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\}, \quad (31)$$

где

$$L_1 = \frac{(\theta_{c2} - \theta_{c1}) + \text{Po} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right)}{\text{Bi}_1 + \text{Bi}_1 \text{Bi}_2 + \text{Bi}_2} \text{Bi}_2; \quad (32)$$

$$L = (\theta_{c1} + L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right). \quad (33)$$

Подставляя функции \bar{f} и $\bar{\theta}^*(0)$ из формул (30) и (31) в начальное условие (20), последнее преобразуют к виду

$$\bar{\vartheta}(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c1} - L_1) \left[\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right] - \right. \\ - L_1 \text{Bi}_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\ - \frac{\text{Po}}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\}. \quad (34)$$

Решая уравнение (19) с начальным условием (20), получают

$$\bar{\vartheta}(\text{Fo}) = \bar{\vartheta}(0) e^{(-\mu_n^2 \text{Fo})}. \quad (35)$$

Используя формулу обращения изображения для определения оригинала функции

$$\vartheta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\vartheta}(Fo) \overline{k}(\mu_n, \xi)$$

совместно с формулами (26), (27) и (34), получим выражение для нестационарной составляющей температурного поля в виде

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c1} - L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) - \right. \\ - L_1 Bi_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{Bi_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{Bi_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\ - \frac{Po}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\ \left. \left. \frac{Bi_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\} \times \\ \times \frac{1}{N} \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] e^{(-\mu_n^2 Fo)} \quad (36) \end{aligned}$$

Общее решение задачи (5)–(8) в соответствии с формулой (9) равно сумме функций $\theta^*(\xi)$ и $\vartheta(\xi, Fo)$. Таким образом, подставляя в функцию (9) выражения для $\theta^*(\xi)$ из уравнения (13) и для $\vartheta(\xi, Fo)$ из уравнения (36), получим

$$\begin{aligned} \theta(\xi, Fo) = \theta_{c1} + L_1 (1 + Bi_1 \xi) - \frac{Po}{2} \xi^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left\{ (\theta_0 - \theta_{c1} - L_1) \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) - \right. \\ - L_1 Bi_1 \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{Bi_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{Bi_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\ - \frac{Po}{2} \left[-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\ \left. \left. + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right] \right\} \times \\ \times \left[\cos(\mu_n \xi) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \xi) \right] e^{(-\mu_n^2 Fo)} \quad (37) \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (37) значение L_1 из уравнения (32) и переходя к размерной форме записи температуры, получим

$$\begin{aligned}
 T = T_{c1} + & \frac{(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{q_v h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_2 \left(1 + Bi_1 \frac{x}{h} \right) - \frac{q_v h^2 x^2}{2\lambda h^2} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 Fo} \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) \times \right. \\
 & \times \left(T_0 - T_{c1} - \frac{(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{q_v h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_2 \right) - \\
 & - \frac{(T_{c2} - T_{c1}) + \frac{q_v h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi_2} \right)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_1 Bi_2 \times \\
 & \times \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{Bi_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{Bi_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right) - \\
 & - \frac{q_v h^2}{2\lambda} \left(-\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} \left(\cos \mu_n - \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n} - \frac{2 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{2}{\mu_n^2} \right) \right) \Big] \times \\
 & \times \left(\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin \left(\mu_n \cdot \frac{x}{h} \right) \right), \quad (38)
 \end{aligned}$$

где N определяется по формуле (28).

Пользуясь выражением (38), можно найти решения для задач с другими граничными условиями. Рассмотрим в качестве примера пластину, изолированную с одной стороны и нагреваемую газом с другой. Примем $Pe = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, $T_{c2} = T_\Gamma$ (рис. 2).

Тогда решение, получаемое с помощью выражения (38), имеет вид

$$\frac{T(x, \tau) - T_\Gamma}{T_0 - T_\Gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\mu_n^2 Fo} \cos(\mu_n \xi),$$

где $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$.

Аналогичное решение для рассматриваемого частного случая было получено в работе [3].

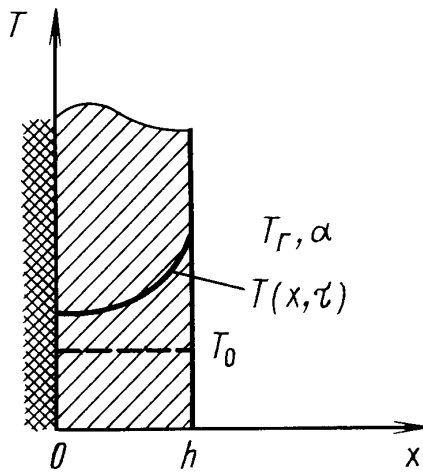


Рис. 2. Распределение температуры в изолированной пластине, нагреваемой горячим газом, $q_v = 0$

С помощью выражения (38) можно найти решение задачи для пластины, не имеющей внутренних источников теплоты и нагреваемой с двух сторон. Примем $Po = 0$.

Если пластина размещена в среде с постоянной температурой ($T_{c1} = T_{c2} = T_c$ и $Bi_1 = Bi_2 = Bi$), формула (38) принимает вид

$$\frac{T(x, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\mu_n^2 Fo)} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{Bi}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) \times \left(\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \right), \quad (39)$$

если температуры с разных сторон пластины различны и равны соответственно T_{c1} и T_{c2} , то решение имеет другой вид:

$$T = T_{c1} + \frac{(T_{c2} - T_{c1})}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} Bi_2 \left(1 + Bi_1 \frac{x}{h} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\mu_n^2 Fo)} \frac{1}{N} \left\{ \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{Bi_1}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) \times \left(T_0 - T_{c1} - \frac{(T_{c2} - T_{c1}) Bi_2}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} \right) - \frac{(T_{c2} - T_{c1}) Bi_1 Bi_2}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\mu_n^2} - \frac{\text{Bi}_1 \cos \mu_n}{\mu_n^2} + \frac{\text{Bi}_1 \sin \mu_n}{\mu_n^3} \right\} \times \\
 \times \left(\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) + \frac{\text{Bi}_1}{\mu_n} \sin \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \right). \quad (40)$$

Норма N в выражениях (39) и (40) определяется по формуле (28).

Из найденного решения (38) следуют и некоторые другие, хорошо известные, частные решения рассмотренной задачи [8–11].

Полученные решения могут быть использованы для расчета нестационарного температурного поля в целом ряде практически важных случаев. Для иллюстрации приведем результаты, полученные по формуле (38) для следующих исходных данных: пластина толщиной $h = 0,02$ м выполнена из материала с плотностью $\rho = 1750$ кг/м³, теплоемкостью $c = 700$ Дж/(кг·К), теплопроводностью $\lambda = 23$ Вт/(м·К). В пластине действуют внутренние источники теплоты мощностью $q_v = 1,2 \cdot 10^8$ Вт/м³; начальная температура пластины $T_0 = 300$ К.

Рассмотрим два варианта расчета.

1. Пластина имеет коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 4 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) и помещена в среду с температурой $T_{c1} = T_{c2} = T_c = 673$ К.

2. Пластина разделяет среды: одну — с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1 = 3 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К), температурой $T_{c1} = 723$ К и другую — с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_2 = 5 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К), температурой $T_{c2} = 823$ К.

В отсутствие источников теплоты ($q_v = 0$) распределение температуры в пластине для 1-го варианта находят по формуле (39), для 2-го варианта — по формуле (40). В работе [3] приведено решение для установившегося режима теплообмена для условий, аналогичных рассмотренному второму случаю, но при одинаковой температуре с двух сторон пластины, при этом распределение температуры стенки зависит от координаты x , что противоречит физическому смыслу. Рис. 3 и 4 иллюстрируют изменение температуры для 1-го и 2-го вариантов.

Наличие внутренних источников теплоты немного усложняет решение. Если $q_v \neq 0$, то для первого случая распределение температуры будет таким:

$$T = T_c + \frac{q_v h^2}{2\lambda \text{Bi}} \left(1 + \text{Bi} \frac{x}{h} \right) - \frac{q_v h^2 x^2}{2\lambda h^2} + \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\mu_n^2 \text{Fo})} \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} + \frac{\text{Bi}}{\mu_n^2} (1 - \cos \mu_n) \right) \times \right. \\
 \left. \times \left(T_0 - T_c - \frac{q_v h^2}{2\lambda \cdot \text{Bi}} \right) + \frac{q_v h^2}{2\lambda} \left(\frac{\cos \mu_n}{\mu_n^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu_n^2} + \frac{(Bi - 2) \sin \mu_n}{\mu_n^3} + \frac{2Bi \cos \mu_n}{\mu_n^4} - \frac{2Bi}{\mu_n^4} \right) \times$$

$$\times \left(\cos \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) + \frac{Bi}{\mu_n} \sin \left(\mu_n \frac{x}{h} \right) \right).$$

Этому решению соответствует рис. 5. А для 2-го варианта, если $q_v \neq 0$, решение получается на основе формулы (38) (рис. 6).

Метод конечных интегральных преобразований, использованный при решении задачи, имеет ряд существенных преимуществ перед методом Фурье, которым также пользуются для решения задач этого же класса. Наиболее существенными достоинствами можно считать простоту получения решений и возможность применения метода к однородным и неоднородным краевым задачам. Однако он применяется только к линейным дифференциальным уравнениям с линейными граничными условиями при решении задач теплопроводности для тел канонической формы.

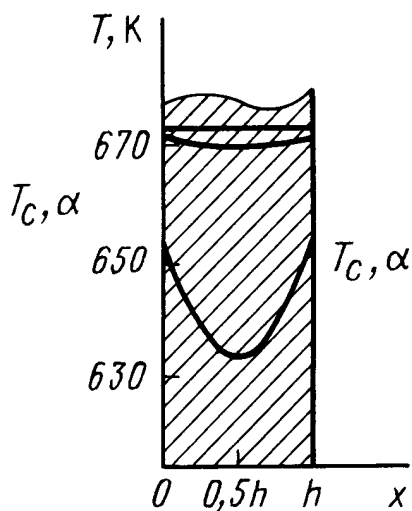


Рис. 3. Нагрев пластины, не имеющей внутренних источников теплоты, помещенной в среду с температурой $T_{c1} = T_{c2} = T_c = 673$ К и коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 4 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) (линии на рисунке соответствуют моментам времени 12 с, 24 с, 72 с)

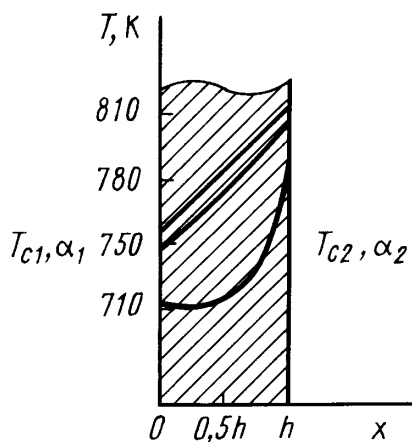


Рис. 4. Нагрев пластины, не имеющей внутренних источников теплоты и разделяющей среду на две части: одну — с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_1 = 3 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) и температурой $T_{c1} = 723$ К и другую — с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_2 = 5 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К) и температурой $T_{c2} = 823$ К (зависимости даны для моментов времени 12 с, 24 с, 72 с)

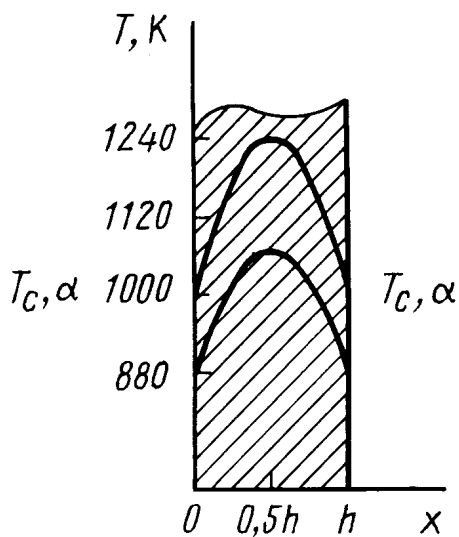


Рис. 5. Распределение температуры в пластине при условии симметричного нагрева:

$T_{c1} = T_{c2} = T_c = 673$ К, коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 4 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К), $q_v \neq 0$ (рисунок отражает изменение температуры по пластине через 12 с и 72 с после начала нагрева)

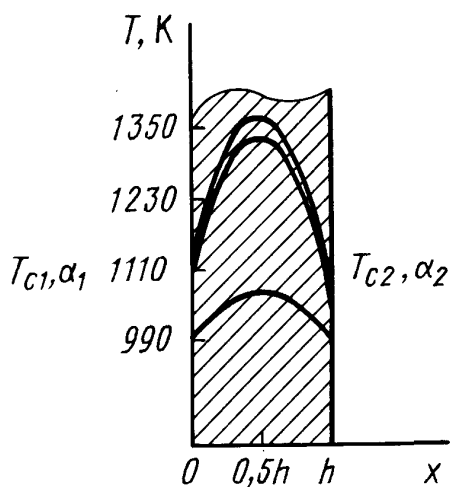


Рис. 6. Распределение температуры в пластине с $q_v \neq 0$, разделяющей среду на две части (см. подпись к рис. 4)

С целью исследования сходимости полученного решения было проанализировано распределение температуры по толщине пластины (формула (38)) для материалов с существенно различными свойствами.

1. Материал со следующими теплофизическими свойствами: $\rho = 1750$ кг/м³, $c = 700$ Дж/(кг·К), $\lambda = 23$ Вт/(м·К).

2. Медь, для которой $\rho = 8728$ кг/м³, $c = 425,1$ Дж/(кг·К), $\lambda = 388$ Вт/(м·К).

3. Висмут, для которого $\rho = 9560$ кг/м³, $c = 134,6$ Дж/(кг·К), $\lambda = 13,5$ Вт/(м·К).

Условия, общие для всех трех вариантов, — это граничные условия (см. 1-й вариант расчета), а начальное — температура пластины $T_0 = 300$ К. Для приведенных условий было определено количество членов ряда в правой части формулы (38), достаточное для получения результата, отличающегося от точного не более чем на 1%. Результаты исследования для 1, 2 и 3-го материалов соответственно приведены на рис. 7, а, б и в соответственно.

Вертикальные черточки на рис. 7 а–в — это интервалы значений числа Фурье, для которого при соответствующем числе членов ряда

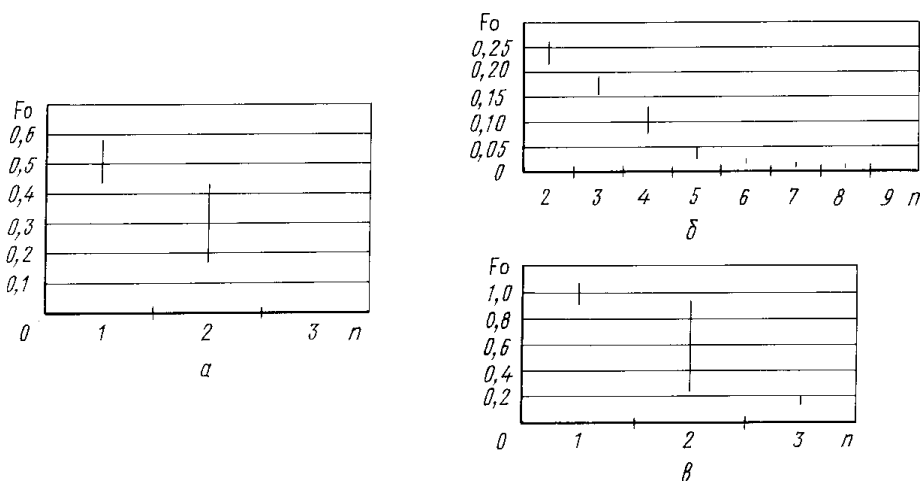


Рис. 7. Зависимость числа n членов ряда, достаточного для получения точного решения задачи, от числа Fo :

a — $Bi_1 = 0,2609$ и $Bi_2 = 0,4348$; b — $Bi_1 = 0,1546$ и $Bi_2 = 0,2577$; c — $Bi_1 = 4,4444$ и $Bi_2 = 7,4074$

обеспечивается точное решение задачи. Во всех этих случаях учет трех членов ряда позволяет получить решение с указанной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарубин В. С. Расчет и оптимизация термоизоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
4. Карташев Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
5. Ozisik M. N. Boundary Value Problems of Heat Conduction, Intern. Textbook Company, Scranton, Pennsylvania, USA, 1968.
6. Елисеев В. Н. К расчету радиационно-кондуктивного теплообмена в системе, замкнутой частично прозрачной оболочкой // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73. – № 1. – С. 107–112.
7. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
8. Теория тепломассообмена / С.И. Исаев, И.А. Кожинов, В.И. Кофанов, А.И. Леонтьев и др. Под ред. А.И. Леонтьева. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 684 с.
9. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике: Учебник для вузов / В.С. Авдучевский, Б.М. Галицкий, Г.А. Глебов и др. М.: – Машиностроение, 1992. – 519 с.
10. Шорин С. Н. Теплопередача. – М.: Высшая школа, 1964. – 490 с.

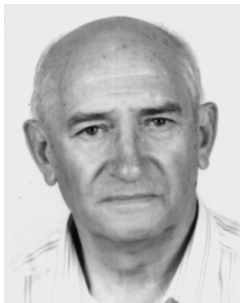
Татьяна Владимировна Боровкова родилась в 1981 г., студентка VI курса кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теплообмена в конструкциях летательных аппаратов.

Borovkova T.V. (b.1981). Student of the “Spacecraft and Launch Vehicles” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of heat transfer in spacecraft constructions.



Виктор Николаевич Елисеев родился в 1931 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1954 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области теплообмена в конструкциях летательных аппаратов.

Yeliseev V.N. (b. 1931) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1954. D.Sc.(Eng), professor of the “Spacecraft and Launch Vehicles” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of heat transfer in spacecraft constructions.



УДК 629.1.028

А. А. Полунгян, А. Б. Фоминых

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТРАНСМИССИИ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ТВЕРДОЙ НЕРОВНОЙ ДОРОГЕ

Приведена математическая модель, описывающая динамику трансмиссии и системы поддрессоривания при движении колесной машины по твердой дороге с несимметричными неровностями по бортам.

Одним из путей, позволяющих повысить качество и надежность элементов трансмиссии существующих и вновь проектируемых колесных машин, является создание и совершенствование методов расчета, дающих возможность определить динамическую нагруженность трансмиссий таких машин в сложных дорожных условиях. Особенно это касается (в силу своего назначения) полноприводных колесных машин. Характерной особенностью работы колесной машины в таких условиях эксплуатации служит несимметричное пространственное нагружение, приводящее к большим нагрузкам в несущей системе, трансмиссии и в системе поддрессоривания.