

Б. С. Сарбаев

**ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЬЕЗО-
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГАСИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ**

Предлагается электромеханическая модель материала с пьезоэлектрическими свойствами. Зависимости, описывающие электромеханические эффекты в модели, аналогичны определяющим соотношениям для пьезоэлектрика. Они позволяют рассчитать перемещение и электрический заряд, обосновать возможные способы теоретического и экспериментального исследования коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрического устройства. Зависимости, описывающие собственные и вынужденные колебания такой системы, объясняют эффект демпфирования механических колебаний при использовании материалов с пьезоэлектрическими свойствами. Получено выражение для амплитудно-частотной характеристики электромеханической системы, содержащей резистор в электрическом контуре.

Разработка композиционных материалов (КМ) и применение их в изделиях современной техники способствует созданию легких и одновременно высокопрочных элементов конструкций. Вместе с тем, уровень развития материаловедения и современные технологии получения КМ позволяют добиваться не только высокой удельной прочности. С помощью специальных материалов КМ можно придать свойства, при которых он приобретет способность к преобразованию внешних термомеханических воздействий в электрические, магнитные, световые и другие сигналы. Сформированные на основе таких сигналов управляющие команды позволят диагностировать и устранять дефекты конструкции, изменять физические характеристики с целью приспособления к условиям эксплуатации, управлять деформированным состоянием, гасить колебания. В настоящее время такие композиционные материалы принято называть “интеллектуальными” [1–3].

Одно из возможных направлений создания “интеллектуальных” КМ заключается в применении материалов с пьезоэлектрическими свойствами [1]. Такие материалы перспективны при разработке конструкций с управляемым деформированным состоянием [3], при проектировании устройств для демпфирования колебаний [4–7]. В настоящее время пьезоматериалы (керамики, полимеры, пленки и др.) широко применяются в приборостроении. В этой отрасли техники накоплен значительный опыт проектирования и изготовления пьезоэлектрических конструктивных элементов, выполняющих как сенсорную, так и активную функции [8–11]. Существующие материалы, технологические про-

цессы, способы расчета и проектирования указанных элементов также могут быть использованы при разработке КМ и конструкций нового поколения.

В связи с этим актуальное значение приобретают задачи, посвященные развитию математических моделей пьезоэлектрического эффекта. Опыт показывает, что при теоретическом исследовании, в инженерной практике полезны и эффективны относительно простые наглядные модели. С их помощью можно качественно объяснить эффекты деформирования, предсказать величины электрических зарядов и токов, наметить способы экспериментального исследования свойств материалов, обосновать некоторые конструктивные решения. В настоящей работе рассматривается одно из возможных решений. С помощью электромеханической модели, содержащей упругий элемент, диполь и две тонкие пластины, образующие конденсатор, обосновываются определяющие соотношения материала с пьезоэлектрическими свойствами, показаны возможные способы теоретического и экспериментального определения коэффициента электромеханической связи — одной из основных количественных характеристик устройства на основе пьезоэффекта. Простые зависимости, описывающие собственные и вынужденные колебания сосредоточенной массы, соединенной последовательно с включенной в электрическую цепь электромеханической моделью, позволяют объяснить эффект гашения механических колебаний.

Описание модели материала. Рассмотрим призматический образец пьезоэлектрического материала длиной l и площадью поперечного сечения Ω . На плоские торцы нанесены электроды. К торцам образца приложена растягивающая сила F . Механические напряжения определяются по формуле $\sigma = F/\Omega$. Предположим, что образец помещен в однородное электрическое поле с напряженностью $E = V/l$, где V — разность потенциалов между торцами образца. Уравнения пьезоэлектрического эффекта в случае однородного механического и электрического полей имеют вид [10, 11]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= s\sigma + dE, \\ D &= \epsilon\epsilon_0 E + d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon = u/l$ — линейная деформация образца; u — относительное линейное перемещение торцов образца; d — пьезоэлектрический модуль материала; s — коэффициент упругой податливости; D — величина электрической индукции; ϵ — диэлектрическая проницаемость материала, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ ф/м — электрическая постоянная.

Для однородных электрических и механических полей определяющие соотношения (1) можно преобразовать следующим образом.

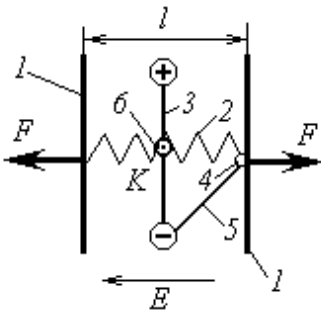


Рис. 1. Электромеханическая модель материала с пьезоэлектрическими свойствами

Первое равенство представим так:

$$u = F/K + dV, \quad (2)$$

где $K = \Omega/(sl)$ — коэффициент упругой жесткости образца. Учитывая, что $q = D\Omega$ (q — электрический заряд на торцовых электродах), второе равенство системы (1) можно записать следующим образом:

$$q = CV + dF. \quad (3)$$

В формуле (3) символом C обозначена электрическая емкость образца из пьезоэлектрического материала с электродами на плоских торцах, определяемая по формуле $C = \epsilon\epsilon_0\Omega/l$.

На основании соотношений (2) и (3) можно построить электромеханическую модель материала, обладающего пьезоэлектрическими свойствами (рис. 1). Две электропроводящие пластины 1 , массой которых пренебрегаем, с помощью электроизолирующего шарнира 4 соединены упругой пружиной 2 , коэффициент жесткости которой равен K . В исходном состоянии диполь 3 с зарядами $\pm q_0$ располагается параллельно пластинам. Под действием силы F первоначальное расстояние между пластинами 1 может изменяться на величину u . Диполь 3 , соединенный стержнем 5 из электроизолирующего материала с шарниром 4 , может поворачиваться вокруг оси шарнира 6 . Далее рассмотрим случай малых перемещений, т.е. когда $u/l \ll 1$.

Рассмотрим механическое нагружение, когда пластины соединены проводником и нагружены силой F (рис. 2, а). В этом случае следует принять $V = 0$. Относительное линейное перемещение пластин равно $u = F/K$. При этом диполь поворачивается на малый угол $\alpha = 2u/h$, где h — плечо диполя. Можно показать, что вследствие этого на пластинах наводится электрический заряд величиной $q = 2uq_0/l$, или

$$q = \frac{2q_0}{Kl} F.$$

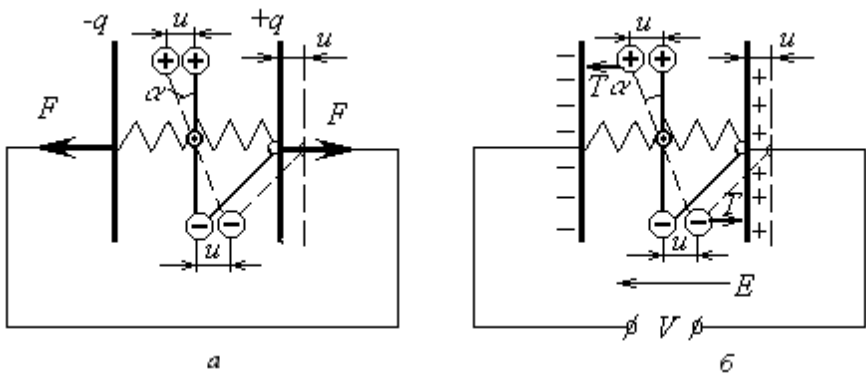


Рис. 2. Нагружение электромеханической модели:
a — механическое; *б* — электрическое

Сравнивая это равенство с равенством (3) при $V = 0$, получим, что пьезомодуль связан с параметрами электромеханической модели следующим образом:

$$d = \frac{2q_0}{Kl}. \quad (4)$$

Далее рассмотрим случай электрического нагружения, когда $F = 0$, $V \neq 0$ (рис. 2, б). Под действием силы $q_0 E$ (где $E = U/l$) диполь поворачивается на угол α . На основании принципа возможных перемещений условие равновесия для системы, состоящей из диполя 3 и стержня 5, можно записать как

$$2q_0 E \delta u = K u \delta u.$$

Отсюда следует зависимость

$$u = \frac{2q_0}{Kl} V.$$

Сопоставляя данное соотношение с равенством (2) при $F = 0$, для пьезомодуля опять получаем выражение (4). Для рассматриваемого случая (когда $u/l \ll 1$) при одновременном действии механических и электрических нагрузок суммарные перемещение и заряд определяются по формулам (2) и (3).

Описанная модель удобна при качественном анализе эффектов деформирования пьезоэлектриков. Следует отметить, что в ней присутствуют как механическая, так и электрическая составляющие. Первая характеризуется жесткостью K , а вторая — зарядом q_0 . Связь между ними описывается с помощью зависимости (4). В этом заключается отличие предлагаемой модели от электромеханической модели пьезоэлектрика, приведенной в работах [8, 9]. В указанных работах пьезоэлектрический эффект моделируется электрическим эквивалентным

устройством — “идеальным электромеханическим трансформатором”, преобразующим механическую силу в электрическое напряжение. При этом механизм преобразования не обсуждается.

Рассмотрим некоторые виды нагружения электромеханической модели. В случае, когда пластины замкнуты, имеем $V = 0$. Под действием силы F получим перемещение $u = F/K$. На пластинах наводится заряд величиной $q = dF$. Для разомкнутых пластин — $q = 0$. Из уравнения (3) получим разность потенциалов $V = -dF/C$. Подставляя это соотношение в равенство (2), будем иметь зависимость $u = F/\bar{K}$. Приведенный коэффициент жесткости \bar{K} определяется следующим образом:

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - k_{эс}^2}, \quad (5)$$

где $k_{эс}^2 = Kd^2/C$ — коэффициент электромеханической связи рассматриваемой модели. Эта величина не превышает единицу. Из равенства (5) следует, что в силу пьезоэлектрического эффекта жесткость материала увеличивается. Формула для вычисления величины $k_{эс}^2$ может быть представлена в виде

$$k_{эс}^2 = \frac{\bar{K} - K}{\bar{K}}.$$

Следует заметить, что с помощью соотношений (2) и (3) можно обосновать иные способы определения коэффициента электромеханической связи. Полная потенциальная энергия электромеханической модели U , изображенной на рис. 1, складывается из энергии упругого деформирования пружины 2 и энергии заряженного конденсатора, образуемого пластинами 1:

$$U = \frac{1}{2}Fu + \frac{1}{2}qV. \quad (6)$$

Подставляя в зависимость (6) равенства (2) и (3), получим

$$U = U_e + 2U_{eel} + U_{el}.$$

Здесь U_e — потенциальная энергия упругого деформирования; U_{eel} — взаимная энергия, обусловленная пьезоэффектом; U_{el} — электрическая энергия заряженного конденсатора. Указанные энергии подсчитываются по следующим формулам:

$$U_e = \frac{F^2}{2K}; \quad U_{eel} = \frac{dVF}{2}; \quad U_{el} = \frac{CV^2}{2}.$$

Следовательно, коэффициент электромеханической связи можно определить по формуле

$$k_{эс} = \frac{U_{eel}}{\sqrt{U_e U_{el}}}.$$

Эта зависимость была предложена в работе [8]. Ее целесообразно использовать для теоретического анализа коэффициента $k_{эс}$.

Рассмотрим другие варианты энергетического способа определения коэффициента электромеханической связи. Для одного и того же перемещения u определим энергию упругого деформирования пружины для замкнутых и разомкнутых пластин. Обозначим эти энергии соответственно символами U_3 и U_p , тогда

$$U_3 = \frac{Ku^2}{2}; \quad U_p = \frac{\bar{K}u^2}{2}.$$

Отсюда вытекает следующая зависимость:

$$k_{эс}^2 = \frac{U_p - U_3}{U_p}.$$

Такой способ определения коэффициента электромеханической связи рассматривается в работах [10, 11]. При этом разность $U_p - U_3$ называют энергией, способной к обращению. При неизменном перемещении u эта энергия затрачивается на наведение электрических зарядов на пластинах конденсатора.

Можно поступить иначе. Для одной и той же силы F определим энергию упругого деформирования пружины в случае замкнутых и разомкнутых пластин. Введем обозначения для соответствующих энергий \bar{U}_3 и \bar{U}_p , тогда

$$\bar{U}_3 = \frac{F^2}{2K}; \quad \bar{U}_p = \frac{F^2}{2\bar{K}},$$

откуда

$$k_{эс}^2 = \frac{\bar{U}_3 - \bar{U}_p}{\bar{U}_3}.$$

Разность $\bar{U}_3 - \bar{U}_p$ также можно рассматривать как энергию обращения. При неизменной силе F на эту величину изменяется энергия упругого деформирования пружины при размыкании первоначально замкнутых пластин. Эта энергия затрачивается на наведение зарядов. Предложенные способы определения коэффициента электромеханической связи могут быть полезными при теоретическом анализе характеристик материалов, а также устройств, работающих на основе пьезоэффекта.

Свободные колебания электромеханической системы. Пусть электромеханическая модель является элементом электрической цепи, содержащей источник переменного электрического напряжения $U(t)$ и катушку с индуктивностью L . К модели последовательно присоединим абсолютно твердое тело массой m , перемещающееся горизонтально без трения под действием силы $P(t)$ (рис. 3). Исследуем движение этого тела и изменение заряда на пластинах. Задачу динамики решаем в линейной постановке, предполагая, что перемещение u мало по сравнению с размером l .

Уравнение движения тела запишем следующим образом:

$$m\ddot{u} = P(t) - F_y, \quad (7)$$

где F_y — сила, обусловленная упругим деформированием пружины. Для электрической цепи в соответствии со вторым законом Кирхгофа сумму падений электрических напряжений в контуре запишем так [12]:

$$V = U(t) - LI'. \quad (8)$$

Здесь V — падение напряжения на конденсаторе, I — электрический ток в цепи. В уравнениях (7) и (8) точка над символом обозначает операцию дифференцирования по времени t . Преобразуем эти уравнения с учетом зависимостей (2) и (3).

Из равенства (2) исключим величину V . В соответствии с формулой (3) $V = (q - dF)/C$. Подставляя эту зависимость в уравнение (2), после преобразований получим

$$F = \bar{K} \left(u - \frac{dq}{C} \right). \quad (9)$$

В равенстве (3) исключим силу F . Из соотношения (2) следует, что $F = Ku - KdV$. Воспользовавшись этим выражением, зависимость

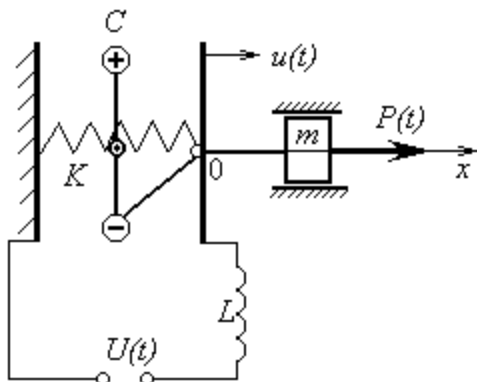


Рис. 3. Электромеханическая система с двумя степенями свободы

(3) можно преобразовать к виду

$$V = \frac{q - K du}{\bar{C}}, \quad (10)$$

где \bar{C} — приведенная емкость конденсатора, $\bar{C} = C(1 - k_{\text{эс}}^2)$.

На основании полученных зависимостей (9) и (10), а также соотношения $I = \dot{q}$ можно заключить, что уравнения (7) и (8) образуют следующую систему линейных, обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} + \omega_1^2 \left(u - \frac{dq}{C} \right) &= \frac{P(t)}{m}, \\ \ddot{q} + \omega_2^2 \left(q - K du \right) &= \frac{U(t)}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\omega_{01}^2}{1 - k_{\text{эс}}^2}; & \omega_{01}^2 &= \frac{K}{m}; \\ \omega_2^2 &= \frac{\omega_{02}^2}{1 - k_{\text{эс}}^2}; & \omega_{02}^2 &= \frac{1}{LC}. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (11) можно рассматривать как уравнения вынужденных колебаний электромеханической системы с двумя степенями свободы. Эти уравнения описывают взаимосвязанные динамические процессы в механической и электрической составляющих системы. Для анализа колебательных процессов в ней можно использовать способы, разработанные для исследования движения механических систем с двумя степенями свободы [13, 14].

Уравнения собственных колебаний электромеханической системы, изображенной на рис. 3, получаются, когда $P(t) = 0$ и $U(t) = 0$. Рассматривая гармонические колебания, при которых $u = u_0 \sin(pt + \varphi)$, $q = q_0 \sin(pt + \varphi)$, где p — круговая частота собственных колебаний, φ — начальная фаза колебаний, из системы (11) получим следующее уравнение:

$$p^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)p^2 + (1 - k_{\text{эс}}^2)\omega_1^2\omega_2^2 = 0. \quad (13)$$

Отсюда следуют выражения для частот собственных колебаний

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_{\text{эс}}^2\omega_1^2\omega_2^2} \right). \quad (14)$$

Из зависимостей (12) и (14) видно, что в динамическом процессе именно коэффициент электромеханической связи количественно определяет взаимное влияние механической и электрической составляющих пьезоэлектрического устройства. На основании равенств (12)–(14) можно получить такую формулу для коэффициента электромеханической связи:

$$k_{\text{эс}}^2 = \frac{p_1^2 p_2^2 - \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{p_1^2 p_2^2}.$$

При малых перемещениях и $k_{\text{эс}} = 0$, т.е. при $d = 0$, будем иметь две независимые системы с одной степенью свободы, совершающие гармонические колебания с частотами ω_{01} и ω_{02} . В соответствии с формулой (4) для электромеханической модели пьезоэлектрический эффект отсутствует, когда $q_0 = 0$. Можно показать [9], что при отсутствии пьезоэффекта взаимная связь механических и электрических составляющих может иметь место при перемещениях u , соизмеримых с длиной l , т.е. при решении задачи в геометрически нелинейной постановке.

Собственные колебания рассматриваемой системы с двумя степенями свободы описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u &= u_{01} \sin(p_1 t + \varphi_1) + u_{02} \sin(p_2 t + \varphi_2); \\ q &= q_{01} \sin(p_1 t + \varphi_1) + q_{02} \sin(p_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

В этих равенствах амплитудные значения, характеризующие формы собственных колебаний, связаны зависимостями

$$\frac{q_{01}}{u_{01}} = \frac{\alpha_{11} C}{\omega_1^2 d}; \quad \frac{q_{02}}{u_{02}} = \frac{\alpha_{21} C}{\omega_1^2 d}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{2} \left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_{\text{эс}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right); \\ \alpha_{21} &= \frac{1}{2} \left(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_{\text{эс}}^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right). \end{aligned}$$

Используя формулы (15), можно записать условие ортогональности форм собственных колебаний рассматриваемой системы в виде

$$m u_{01} u_{02} + L q_{01} q_{02} = 0.$$

Вынужденные колебания электромеханической системы. Пусть на систему (см. рис. 3) действуют внешние факторы, изменяющиеся по гармоническому закону, т.е.

$$P(t) = P_0 \cos \beta t; \quad U(t) = U_0 \cos \beta t,$$

где β — заданная круговая частота; P_0 и U_0 — известные амплитудные значения силы и электрического напряжения. Решение системы уравнений (11) будем искать в виде $u(t) = u_0 \cos \beta t$, $q(t) = q_0 \cos \beta t$. Подставляя эти равенства в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (11), приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд u_0 и q_0 :

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^2 - \beta^2)u_0 - \frac{d\omega_1^2}{C}q_0 &= \frac{P_0}{m}; \\ -dK\omega_2^2 u_0 + (\omega_2^2 - \beta^2)q_0 &= \frac{U_0}{L}. \end{aligned} \right\}$$

Решая данную систему уравнений, получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{(\omega_2^2 - \beta^2)}{m\Delta}P_0 + \frac{d\omega_1^2\omega_{02}^2}{\Delta}U_0; \\ q_0 &= \frac{d\omega_{01}^2\omega_2^2}{\Delta}P_0 + \frac{(\omega_1^2 - \beta^2)}{L\Delta}U_0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Delta = \beta^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\beta^2 + (1 - k_{\text{эс}}^2)\omega_1^2\omega_2^2. \quad (17)$$

Учитывая уравнение (13), заметим, что при $\beta = p_1$ и $\beta = p_2$ возникает резонанс. При этом неограниченно возрастают как перемещения тела массой m , так и электрический заряд на пластинах. В частном случае, когда $\beta = 0$, из формул (16) и (17) следует, что $\bar{u}_0 = P_0/K + dU_0$, $\bar{q}_0 = CU_0 + dP_0$. Эти значения перемещения и электрического заряда соответствуют статическому нагружению электромеханической модели.

Рассмотрим случай электрического нагружения модели при $P_0 = 0$, $U_0 \neq 0$. Из формул (16) получим

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\omega_1^2\omega_{02}^2}{\Delta}dU_0; \\ q_0 &= \frac{(\omega_1^2 - \beta^2)\omega_{02}^2}{\Delta}CU_0. \end{aligned}$$

Видно, что при частоте возбуждающего воздействия $\beta = \omega_1$ величина заряда на пластинах равна нулю. При испытаниях образцов пьезоэлектрического материала эту частоту называют частотой антирезонанса [10, 11]. Обозначим ее символом ω_a . Тогда получим зависимость

$$\omega_a^2 = \frac{\omega_{01}^2}{1 - k_{\text{эс}}^2}. \quad (18)$$

Из формул (14) и (18) вытекает следующее соотношение между частотами резонанса и антирезонанса:

$$p_1^2 < \omega_{01}^2 < \omega_a^2 < p_2^2.$$

Для меньшей частоты собственных колебаний примем $p_1^2 = \omega_r^2$ и введем положительную величину $\kappa < 1$, вычисляемую по формуле

$$\kappa = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2},$$

Воспользовавшись для частот резонанса и антирезонанса выражениями (14) и (18) и преобразовав их, получим следующее равенство:

$$k_{\text{эс}}^2 = \kappa[1 - \alpha^2(1 - \kappa)]. \quad (19)$$

Параметр α определяется по формуле

$$\alpha^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} = CL\omega_{01}^2.$$

Заметим, что зависимость (19) с помощью равенств (14) можно представить так:

$$k_{\text{эс}}^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2} \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_r^2}{\omega_2^2}. \quad (20)$$

Формулы (19), (20) позволяют рассчитать коэффициент электромеханической связи, учитывая заданные параметры электрической цепи. В частном случае, когда $L = 0$, т.е. при электрическом возбуждении механических колебаний тела массой m , получим известную формулу У. Мэзона [8–11]:

$$k_{\text{эс}}^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}.$$

Такой динамический способ определения коэффициента электромеханической связи удобен при экспериментальном исследовании свойств пьезоматериалов [15]. Соответствующая схема нагружения показана на рис. 4. При этом частота $\omega_r = \omega_{01}$ рассматривается как резонансная частота колебаний механической системы с одной степенью свободы с замкнутыми пластинами.

В другом случае, когда $\alpha = 1$, т.е. $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2$, из соотношения (19) следует

$$k_{\text{эс}}^2 = \frac{\omega_a^2 - \omega_r^2}{\omega_a^2}.$$

При этом равенства (14) для частот собственных колебаний электромеханической системы упрощаются и принимают вид

$$p_1^2 = \frac{\omega_{10}^2}{1 + k_{эс}}; \quad p_2^2 = \frac{\omega_{01}^2}{1 - k_{эс}}.$$

Отсюда можно получить еще одну формулу для расчета коэффициента электромеханической связи, а именно:

$$k_{эс} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_2^2 + p_1^2}.$$

Таким образом, в общем случае при динамическом способе определения коэффициента электромеханической связи следует учитывать характеристики электрической цепи, в частности ее индуктивность.

Пьезоэлектрический гаситель колебаний. С помощью предложенной электромеханической модели пьезоэлектрика можно качественно объяснить принципы функционирования пьезоэлектрических устройств. Рассмотрим пассивный пьезоэлектрический гаситель колебаний, который может быть использован в авиационной технике, в прецизионных космических конструкциях [4]. Одна из возможных принципиальных схем такого устройства показана на рис. 5, а. К телу массой m приложена возбуждающая сила $P(t)$. Электромеханическая модель включена в электрический контур, содержащий катушку с индуктивностью L . Полагая в формулах (16) $U_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{(\omega_2^2 - \beta^2)}{m\Delta} P_0; \\ q_0 &= \frac{d\omega_{01}\omega_2^2}{\Delta} P_0. \end{aligned} \quad (21)$$

Видно, что при $k_{эс} = 0$, т.е. при $d = 0$, амплитуда установившихся колебаний u_0 определяется по формуле

$$u_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \beta^2} \cdot \frac{P_0}{K}. \quad (22)$$

Эта величина соответствует амплитуде колебаний механической системы с одной степенью свободы с частотой собственных колебаний $\omega_1 = \omega_{01}$. При этом заряд на пластинах не индуцируется.

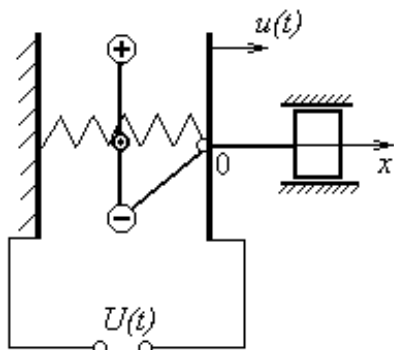


Рис. 4. Схема нагружения электромеханической системы при определении коэффициента электромеханической связи

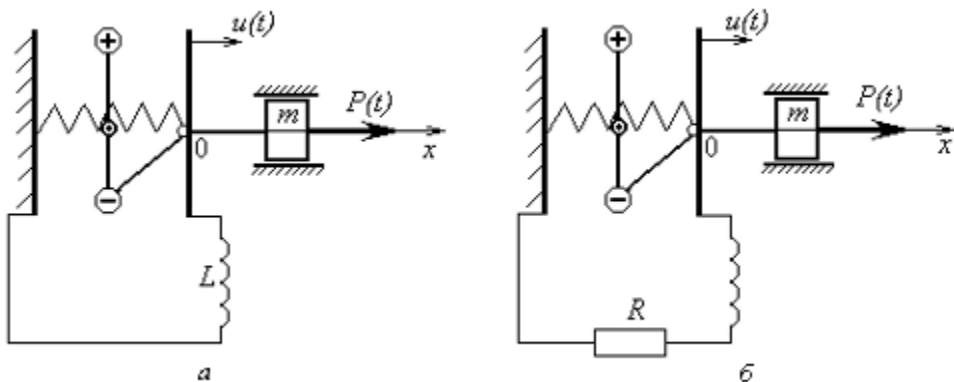


Рис. 5. Схема пьезоэлектрического гасителя колебаний без демпфирующего элемента и с демпфирующим элементом в электрической цепи

Из равенств (21) следует, что гашение механических колебаний происходит тогда, когда частота возбуждающей силы β постоянна и равна ω_2 . Пьезоэлектрический гаситель колебаний должен быть настроен так, чтобы выполнялось условие

$$LC = \frac{1}{\beta^2(1 - k_{эс}^2)}.$$

Тогда в соответствии с зависимостью (17) получим $\Delta = -k_{эс}^2\omega_1^2\omega_2^2$. Из соотношений (21) также следует, что в этом случае на пластинах наводится заряд величиной

$$q_0 = -\frac{1 - k_{эс}^2}{k_{эс}^2} dP_0.$$

Создаваемая этим зарядом напряженность электрического поля между пластинами обеспечивает неподвижность рассматриваемого тела массой m .

Как и в случае механического гасителя колебаний, для гашения колебаний при частоте возбуждающей силы, равной частотам собственных колебаний системы с двумя степенями свободы, целесообразно использовать демпфирующие элементы [13, 14]. Рассмотрим случай, когда в электрическую цепь включен резистор с величиной сопротивления R (рис. 5, б). Учитывая, что в этом случае выполняется равенство $V + RI = U(t) - LI\dot{}$, систему уравнений (11) преобразуем к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u} + \omega_1^2(u - \frac{dq}{C}) &= \frac{P(t)}{m}; \\ \ddot{q} + 2r\dot{q} + \omega_2^2(q - Kdu) &= \frac{U(t)}{L}, \end{aligned} \right\}$$

где $2r = R/L$. Для решения полученной системы уравнений целесообразно воспользоваться методом комплексных амплитуд [14]. После преобразований амплитудные значения перемещения тела u_0 и электрического тока в цепи I_0 можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{P_0/K} &= \frac{1}{\alpha^2} \times \\ &\times \sqrt{\frac{[1 - \alpha^2(1 - k_{\text{эс}}^2)\bar{\beta}^2]^2 + 4\rho^2\bar{\beta}^2\alpha^4(1 - k^2)^2}{(1 - k_{\text{эс}}^2)^2(\bar{\beta}^2 - \bar{p}_1^2)(\bar{\beta}^2 - \bar{p}_2^2)^2 + 4\rho^2\bar{\beta}^2[1 - \bar{\beta}^2(1 - k_{\text{эс}}^2)]^2}}; \\ \frac{I_0}{\omega_{01}dP_0} &= \\ &= \frac{\bar{\beta}}{\alpha^2\sqrt{(1 - k_{\text{эс}}^2)^2(\bar{\beta}^2 - \bar{p}_1^2)(\bar{\beta}^2 - \bar{p}_2^2)^2 + 4\rho^2\bar{\beta}^2[1 - \bar{\beta}^2(1 - k^2)]^2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь приняты такие обозначения:

$$\rho = \frac{R}{2L\omega_{01}}; \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega_{01}}; \quad \bar{p}_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{\omega_{01}}.$$

Формулы (23) показывают, что амплитудно-частотные характеристики определяются параметрами системы α , ρ , $k_{\text{эс}}$. При $\rho = 0$ получим рассмотренный ранее случай, описываемый зависимостями (21). Для разомкнутой цепи, т.е. при $\rho \rightarrow \infty$, будем иметь зависимость (22) для механической системы с одной степенью свободы. При этом частота ее собственных колебаний равна ω_1 . При отсутствии пьезоэффекта, т.е. при $k_{\text{эс}} = 0$, также получим амплитуду вынужденных колебаний для механической системы с одной степенью свободы, но с частотой собственных колебаний ω_{01} .

Амплитудно-частотные характеристики пьезоэлектрического гасителя колебаний, построенные на основе зависимостей (23), приведены на рис. 6. Расчеты проведены при следующих значениях параметров: $\alpha = 1$; $\rho = 0, 1/2, 1, 5$; $k_{\text{эс}}^2 = 0,8$. Штриховой линией показано изменение амплитуды для системы с одной степенью свободы в случае разомкнутых пластин. При расчете гасителя колебаний основная задача — это рациональный выбор параметров α , ρ , $k_{\text{эс}}$.

Следует заметить, что аналогом приведенной электромеханической модели пьезоэлектрического гасителя колебаний является механическая модель с двумя степенями свободы, содержащая единственный демпфирующий элемент (рис. 7). Аналогами катушки с индуктивностью L , конденсатора с емкостью C и сопротивления R являются соответственно дополнительная масса m_d , дополнительный упругий эле-

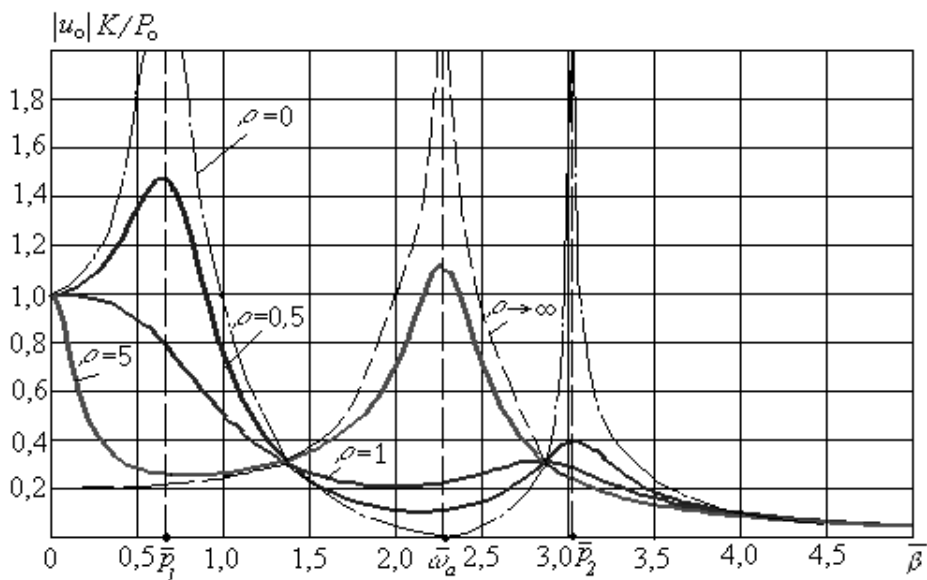


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика пьезоэлектрического гасителя колебаний

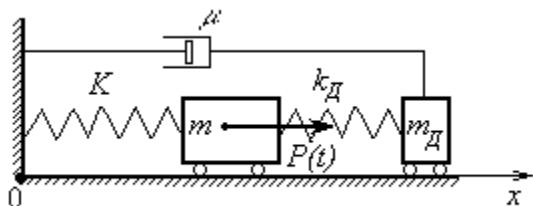


Рис. 7. Механический аналог пьезоэлектрического гасителя колебаний с демпфирующим элементом в электрической цепи

мент с жесткостью k_D и демпфирующий элемент с коэффициентом вязкости μ .

Рассмотренный способ гашения колебаний может быть развит и применен для демпфирования продольных и изгибных колебаний тонкостенных конструктивных элементов из многослойных материалов. В этом случае должны быть предусмотрены накладки, слои, изготовленные из материала с пьезоэлектрическими свойствами. Их оптимальные электрофизические и механические параметры, конфигурация, размеры и местоположение — предмет отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crawley E. F., Javier de Luis. Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures // AIAA Journal. – 1987. – V. 25. – № 10. – P.1373–1385.
2. Crawley E. F. Intelligent Structures for Aerospace: A Technology Overview and Assessment// AIAA Journal. – 1994. – V. 32. – № 8. – P. 1689–1699.

3. Молодцов Г. А., Биткин В. Е., Симонов В. Ф., Урманов В. Ф. Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 2000. – 352 с.
4. Bogue Adam, Mulcahey Brian D., Spangler Ronald L. Jr. Piezoceramic Application for Product Vibration Control // Sound and Vibration. – 1998/ – № 10. – P. 24–26; 28–30.
5. Hagood N. W., von Flotow A. Damping of Structural vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks // J. of Sound and Vibration. – 1991. – V. 146. – № 2. – P. 243–268.
6. Saravanos D. A. Passively Damped Laminated Piezoelectric Shell Structures with Integrated Electric Networks // AIAA Journal. – 2000. – V. 37. – № 7. – P. 1260–1268.
7. Koshigoe S., Murdock W. A unified analysis of both active and passive damping for a plate with piezoelectric transducers // J. Acoust. Soc. Am. – 1993. – V. 93. – № 1. – P. 346–355.
8. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы / Под. ред. У. Мэзона. – Т. 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. – М.: Мир, 1966. – С. 204–324.
9. Харкевич А. А. Избранные труды. Т. 1. Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы. – М.: Наука, 1973. – 397 с.
10. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
11. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 276 с.
12. Калашников С. Г. Электричество. – М.: Физматгиз, 1985. – 576 с.
13. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
14. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
15. Рогачева Н. Н. Зависимость коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрических элементов от положения и размера электродов // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65. – Вып. 2. – С. 323–332.

Статья поступила в редакцию 23.10.2002

Борис Сафиулович Сарбаев родился в 1954 г., окончил в 1977 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области механики композитов, теории пластичности, нелинейного деформирования композитных материалов и конструкций, выполненных из них.

B.S. Sarbaev (b. 1954) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1977. D. Sc. (Eng.), professor of “Spacecrafts and Rocket Carriers” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 30 publications in the field of mechanics of composites, plasticity theory, nonlinear deformation of composites and composite constructions.

