УДК 532.5

В. В. Орлов

КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ ОТКРЫТОГО СОСУДА

Рассмотрена задача о собственных движениях вращающейся жидкости, частично заполняющей цилиндрический бак при наличии истечения через жесткое дно. Задача решена в квазистационарной постановке в рамках модели идеальной жидкости с учетом гидравлических потерь при протекании жидкости через дно сосуда. Исследован спектр собственных чисел и выявлены характеристики волновых движений жидкости, приведены результаты расчетов волновых чисел и комплексного коэффициента затухания.

Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость заполняет цилиндрический сосуд радиуса R_0 на глубину H и вращается вместе с ним вокруг оси OX_3 с постоянной угловой скоростью ω_0 и вытекает через поверхность слива Σ со скоростью V_Σ. Введем следующие обозначения: Ω — область, занимаемая жидкостью, S — твердая боковая стенка, Γ_0 — невозмущенная свободная поверхность. Введем подвижную систему координат $OX_1X_2X_3$ с осями, связанными с невозмущенной свободной поверхностью, т.е. вращающимися с угловой скоростью ω_0, и перемещающуюся вместе с ней со скоростью V_0.

Рассмотрим задачу о малых движениях жидкости, близких к установившемуся движению. Будем считать, что за характерное время исследуемых движений жидкости область, занимаемая жидкостью, не успевает существенно измениться. Тогда для определения поля $v = v(x,t)$ скоростей частиц жидкости относительно установившегося движения имеем следующую задачу, записанную в подвижной системе отсчета:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - 2\omega_0(\vec{v}\times\vec{k}) = -\nabla p, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{2}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \qquad \text{на } S, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p_0\cdot\vec{v} = 0 \qquad \text{на } \Gamma_0, \tag{4}$$

$$p = \gamma\vec{v}\cdot\vec{n}_\Sigma \qquad \text{на } \Sigma, \tag{5}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}^0(x). \tag{6}$$

Здесь n_Σ — нормаль к поверхности Σ; p — модифицированное давление $p = \dfrac{p'}{\rho}$, p' — отклонение давления от равновесного значения; $\gamma = \xi(V_\Sigma - V_0)$, ξ — коэффициент сопротивления поверхности слива. Условие на поверхности слива получается на основе линеаризации уравнения для перепада давления на поверхности слива и используется при расчете динамических характеристик ракет на жидком топливе [1].

Исключая переменную $\vec{v}$, уравнения (1)–(6), записанные в подвижной системе отсчета, приведем к краевой задаче, записанной в цилиндрической системе координат (x, r, η, t), для одной переменной — $p(x, r, \eta, t)$.

Формулировка краевой задачи. Получим соотношение для возмущенного давления p, исключив из уравнения (4) вектор скорости $\vec{v}$. Для этого умножим обе части уравнения (1) скалярно на ∇p_0 и после несложных преобразований получим условие на свободной поверхности, которое может быть использовано для сосудов произвольной формы, вращающихся вокруг оси OX_3 с произвольной угловой скоростью ω_0.

Тогда уравнения (1)–(6) могут быть записаны относительно переменной $p(x, r, \eta, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) + 4\omega_0^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{7}$$

$$\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\nabla p\cdot\nabla p_0}{|\nabla p_0|}\right] - \frac{1}{|\nabla p_0|}4\omega_0^2\left[-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x_3}\frac{\partial p_0}{\partial x_3}\right] =$$
$$= -2\omega_0\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\frac{\partial p_0}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}\frac{\partial p_0}{\partial x_1}\right) \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial p}{\partial r} + 2\omega_0\frac{1}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial\eta} = 0 \qquad \text{на } S, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \text{на } \Sigma, \tag{10}$$

$$p(\vec{x},0) = p^0, \quad \frac{\partial p(\vec{x},0)}{\partial t} = p_1^0, \quad \frac{\partial^2 p(\vec{x},0)}{\partial t^2} = p_2^0,$$
$$\frac{\partial^3 p(\vec{x},0)}{\partial t^3} = p_3^0, \quad \vec{x} = (x, r, \eta). \tag{11}$$

При значении коэффициента сопротивления $\gamma = \infty$ (отсутствие слива) задача (7)–(11) представляет собой задачу о движениях вращающейся жидкости, частично заполняющей круговую цилиндрическую емкость [2]–[7].

Медленное вращение. Пусть скорость вращения такова, что свободная поверхность остается почти плоской. Тогда выражение для не-возмущенного давления, p_0 вместо $p_0 = \dfrac{1}{2}\omega_0^2 r^2 - gx_3 + C$, можно использовать $p_0 = -gx_3 + C$ и соответственно $|\nabla p_0| = g$. Учитывая это допущение, соотношение (8) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g\frac{\partial p}{\partial x_3}\right] + 4\omega_0^2\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + g\frac{\partial p}{\partial x_3}\right] = 0.$$

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости. Будем искать решение в виде бегущих волн $p(r,\eta,x,t) = P(r,x)e^{(im\eta - \Omega t)}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Тогда, вместо системы (7)–(11), для каждого заданного числа m получим спектральную задачу:

$$\Omega^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}P + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + 4\omega_0^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{в } Q, \tag{12}$$

$$\left(\Omega^2 + 4\omega_0^2\right)\left(\Omega^2 P + g\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{на } \Gamma_0, \tag{13}$$

$$\Omega^2\frac{\partial P}{\partial r} - 2\omega_0\Omega i\frac{m}{r}P = 0 \qquad \text{на } S, \tag{14}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \Omega\frac{1}{\gamma}P = 0 \qquad \text{на } \Sigma, \tag{15}$$

$$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

При отсутствии свободной поверхности (условие (8) заменяется на условие $\dfrac{\partial p}{\partial x_3} = 0$ на Γ_0) получаем задачу, приведенную в работах [9, 10]. Здесь Ω — комплексный коэффициент затухания волновых движений жидкости. Если положить $Im\Omega > 0$, то число $m < 0$ будет соответствовать прямым волнам, бегущим в сторону вращения жидкости, число $m > 0$ — обратным волнам, а число $m = 0$ — случаю стоячих волн.

В дальнейшем нас не будут интересовать решения, при которых $\Omega = 2\omega_0 i$. Поэтому граничное условие (13) можно переписать в виде $\Omega^2 P + g\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$.

Вывод характеристических уравнений задачи. Пусть R_0 — характерный размер. Введем безразмерные параметры $\zeta, \xi, \lambda, \bar\gamma, \varepsilon$ при помощи соотношений

$$\zeta = \mu R_0;\ \xi = kR_0;\ \lambda = \Omega\sqrt{\frac{R_0}{g}};\ \bar\gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{gR_0}};\ \varepsilon = 2\omega_0\sqrt{\frac{R_0}{g}},$$

где безразмерные параметры ζ и ξ характеризуют движения жидкости соответственно в осевом и радиальном направлениях и связаны с собственным числом λ спектральной задачи (12)–(15) формулой

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2}. \tag{16}$$

Используя метод разделения переменных, будем искать решение задачи (12)–(15) в виде

$$P(x,r) = X(x)R(r).$$

Разделяя переменные, получим две задачи для определения функций $X(x)$ и $R(r)$:

$$\begin{cases} -X'' = -\zeta^2 X, \\ X' + \lambda^2 X = 0 \qquad (\bar{x} = 0), \\ X' = -\dfrac{1}{\bar{\gamma}}\dfrac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}X \qquad \left(\bar{x} = -\bar{H} = -\dfrac{H}{R_0}\right), \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} -\left(R'' + \dfrac{1}{\bar{r}}R' - \dfrac{m^2}{\bar{r}^2}R\right) = \xi^2 R, \\ i\dfrac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}R' = mR \qquad \bar{r} = 1, \end{cases} \tag{18}$$

где символ $'$ означает производную от функции по соответствующей безразмерной координате. Отметим, что используя формулу (16), задачи (17), (18) всегда можно переписать в другом виде для определения любых двух параметров из трех неизвестных — ζ, ξ, λ.

Решением уравнения (17) будет являться следующая функция: $X(x) = C_1 \cosh \zeta \dfrac{x}{R_0} + C_2 \sinh \zeta \dfrac{x}{R_0}$.

Решением уравнения (18) с учетом его ограниченности в нуле является функция $R(r) = J_m\left(\xi \dfrac{r}{R_0}\right)$.

Подставив указанные функции в граничные условия задач (17) и (18) на поверхности слива Σ и на боковой поверхности S, получим трансцендентные уравнения для определения безразмерных волновых чисел ζ, ξ и собственного числа λ:

$$\bar{\gamma} - \frac{1}{\lambda} + \left(-\frac{\lambda}{\zeta} + \frac{\zeta}{\lambda^2}\bar{\gamma}\right)\tanh \zeta \frac{H}{R_0} = 0; \tag{19}$$

$$\frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} = \frac{m}{\xi}\left(1 + i\frac{\varepsilon}{\lambda}\right); \tag{20}$$

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2\zeta^2}{\xi^2 - \zeta^2}\,. \tag{21}$$

Исследование трансцендентных уравнений. В уравнениях (19)–(21) целые функции $\tanh \zeta \bar{H}$, $f_1(\xi) = J_{m-1}(\xi)/J_m(\xi)$ являются трансцендентными мероморфными функциями комплексных переменных ξ и ζ. Следовательно, можно предположить, что уравнения (19)–(21) будут иметь комплексные решения $\zeta = \zeta^{(r)} + i\zeta^{(i)}$, $\xi = \xi^{(r)} + i\xi^{(i)}$ и $\lambda = \lambda^{(r)} + i\lambda^{(i)}$.

Получение аналитических выражений для собственных чисел ζ, ξ, λ — корней системы трансцендентных уравнений (19)–(21) — представляет определенные трудности, поэтому воспользуемся подходом, описанным в работе [10] для решения нелинейных уравнений. Сначала запишем уравнения (19)–(21) в виде системы двух уравнений, выразив ζ через λ и ξ:

$$\bar{\gamma} - \frac{1}{\lambda} + \left(-\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}{\xi} + \bar{\gamma} \frac{\xi}{\lambda\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} \right) \tanh \frac{\xi\lambda}{\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}} \frac{H}{R_0} = 0, \qquad (22)$$

$$\frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} = \frac{m}{\xi}\left(1 + i\frac{\varepsilon}{\lambda}\right). \qquad (23)$$

При численном решении, чтобы найти каждую пару корней, необходимо задать их первые приближения.

В случае $m = 0$ решение системы сводится к решению первого уравнения с использованием корней ξ, полученных из решения второго уравнения системы, сводящегося к уравнению $J_1(\xi) = 0$, которое, как известно из работы [8], имеет счетное множество действительных корней ξ_n, $n = 1 \ldots \infty$. Для одного оставшегося неизвестного λ первое приближение можно получить из графического решения аналогично тому, как это было описано в работе [10]. Для этого приведем уравнения (22) и (23) к одному уравнению относительно λ и построим диаграммы

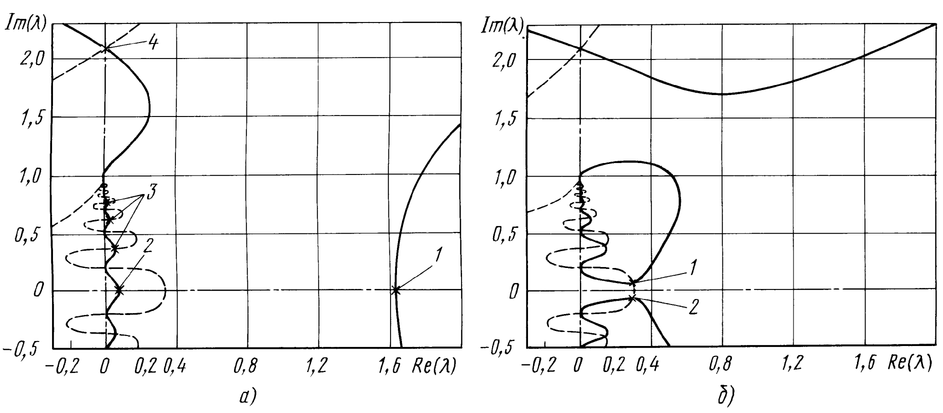

Рис. 1. Графическое решение уравнений (22) и (23) в плоскости комплексного переменного λ: $m = 0$, $\bar{H} = 2$, $\xi_1 = 3{,}83$, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0{,}5$ (*а*) и $\gamma = 0{,}275$ (*б*)

равенства нулю его действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая кривая) части (рис. $1, a$). Пересечение линий дает корень λ. Рассмотрим подробно графическое решение, построенное для уравнения (22) при $\xi_1 = 3{,}83$ (см. рис. $1, a$). Следует отметить, что каждому числу ξ_n соответствует бесконечное количество корней λ и, соответственно, ζ. Можно выделить четыре группы корней, различающихся по их расположению на комплексной плоскости. Введем дополнительный индекс l и условимся, что $l = -1$ будет соответствовать большим по величине действительным корням λ (точка *1*, см. рис. $1, a$). Действительным корням, располагающимся вблизи точки O, присвоим индекс $l = -2$ (точка *2*, см. рис. 1), индекс 0 будет соответствовать корню с модулем $|\lambda| > \varepsilon$, лежащему вблизи мнимой оси (точка *4*, см. рис. $1, a$). Группе корней *3*, лежащей вблизи мнимой оси с модулем $0 < |\lambda| < \varepsilon$ присвоим индексы $l = 1 \ldots \infty$. Тогда решение системы (12)–(15) можно записать в виде

$$P = \sum_{l=-2}^{\infty} P_{0nl}.$$

Простым корням λ уравнений (22) и (23) соответствуют различные формы колебаний, для их идентификации воспользуемся выражением для вертикальной составляющей скорости малых возмущений жидкости, полученным из системы (12)–(15), при этом компонент скорости зависит от времени по закону $v = Ve^{im\eta - \Omega t}$, т.е.

$$V = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{24}$$

С учетом равенства (24) выражение для V_{0nl} можно записать в виде

$$V_{0nl} = -\frac{1}{R_0}\frac{\zeta_{nl}}{\lambda_{nl}} J_0\left(\xi_n \frac{r}{R_0}\right)\left[\cos\zeta_{nl}^{(i)}\frac{x}{R_0}\left(\cosh\zeta_{nl}^{(r)}\frac{x}{R_0} + \sinh\zeta_{nl}^{(r)}\frac{x}{R_0}\right) + \right.$$
$$\left. + i\sin\zeta_{n}^{(i)}\frac{x}{R_0}\left(\tanh\zeta_{nl}^{(r)}\frac{x}{R_0} + \coth\zeta_{nl}^{(r)}\frac{x}{R_0}\right)\right] e^{-\lambda_{nl}t}.$$

Действительным корням уравнений (22) и (23) отвечают волновые апериодические движения жидкости. Амплитуда этих движений больше на поверхности слива. Мы назовем их волнами слива. Такие же решения были получены и для полностью заполненного сосуда [10].

Наличие свободной поверхности, по сравнению с полностью заполненным сосудом, приводит к появлению еще одной группы волновых движений — волн на свободной поверхности жидкости, для которых $|\lambda| > \varepsilon$. На рис. 1 им соответствует точка *4*. Наличие слива переводит волновые движения на свободной поверхности из колебаний с постоянной амплитудой в колебания с малым декрементом затухания (действительная часть корня — точка *4*).

Группе корней *3*, располагающейся вблизи отрезка $[0, \varepsilon i]$ (см. рис. 1, a, точки *3*) соответствуют волновые движения, амплитуда которых принимает максимальные значения в глубине жидкости. Это внутренние волны. Решения, соответствующие внутренним волнам, образуют двухиндексное множество для каждого фиксированного числа m. В данном случае из-за наличия слива внутренние волны — это затухающие колебания с малым декрементом затухания.

Графическое решение, построенное для того же значения $\xi = 3{,}83$, но при $\gamma = 0{,}275$ (см. рис. 1, *б*) показывает, что может существовать такая комбинация параметров задачи, при которой не существует ни одного действительного решения и, соответственно, чисто апериодические движения невозможны. Вместо действительных корней (точки *1* и *2* на рис. 1, a) появляются пары комплексно-сопряженных чисел, отвечающих быстро затухающим волновым движениям (точки *1* и *2*, см. рис. 1, *б*).

Асимптотика больших индексов. **Волны слива**. Асимптотическое поведение волн слива и внутренних волн при больших индексах получим, если воспользуемся асимптотическими выражениями для функций Бесселя:

$$\begin{aligned} J_m(\xi r_0) &\asymp \sqrt{\frac{2}{\pi r_0 \xi}}\left(\cos\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) - \right.\\ &\left. - \frac{1}{8}\frac{4m^2-1}{\xi r_0}\sin\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)\right); \qquad (25)\\ Y_m(\xi r_0) &\asymp \sqrt{\frac{2}{\pi r_0 \xi}}\left(\sin\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) + \right.\\ &\left. + \frac{1}{8}\frac{4m^2-1}{\xi r_0}\cos\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Подстановка этих разложений в условие на боковой поверхности приводит к следующему асимптотическому уравнению для чисел ξ и λ:

$$\tan(\xi - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{4m^2\lambda + 3\lambda + 8i\varepsilon m\xi}{-8\lambda\xi + 4i\varepsilon m^3 - i\varepsilon m}. \qquad (26)$$

Граничное условие на свободной поверхности при больших значениях ζ запишется в виде

$$\bar{\gamma} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\zeta} + \bar{\gamma}\frac{\zeta}{\lambda^2} = 0,$$

откуда находим $\zeta = \dfrac{\lambda}{\bar{\gamma}}$ и получаем выражение для λ:

$$\lambda = \sqrt{\xi^2\bar{\gamma}^2 - \varepsilon^2}.$$

Решая с учетом этого выражения уравнение (26), получим окончательно

$$\xi_{mq} = \xi_q - \frac{1}{8}\frac{3\bar{\gamma} + 8i\varepsilon m + 4m^2\bar{\gamma}}{\xi_q\bar{\gamma}},$$

$$\lambda_{mq} = \sqrt{\xi_{mq}^2\bar{\gamma}^2 - \varepsilon^2}.$$

где $\xi_q = (q-1)\pi + \dfrac{1}{2}m\pi + \dfrac{1}{4}\pi, \qquad q \to \infty.$

Волны на свободной поверхности. Для получения приближенного решения для поверхностных волн воспользуемся приближением малости вращения $\varepsilon \to 0$:

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1.$$

Выражение для ξ_1 может быть получено в следующем виде:

$$\xi_1 = im\frac{J_m(\xi_0)}{\lambda(\xi_0)\xi_0\left(\dfrac{m}{\xi_0^2}J_m(\xi_0) + J'_{m-1}(\xi_0)\right)}. \tag{27}$$

Для нахождения λ воспользуемся выражением, полученным из граничного условия на свободной поверхности:

$$1 - \frac{\beta}{\lambda} - \left(\beta\frac{\lambda}{\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda^2}\right)\tanh(\zeta\bar{H}) = 0; \tag{28}$$

здесь $\beta = 1/\bar{\gamma}$. Учитывая малость слива ($\beta \to 0$), будем искать λ как

$$\lambda = \lambda_0 + \beta\lambda_1.$$

Подставляя это выражение в уравнение (28) и группируя слагаемые по параметру β, получим уравнение для нахождения λ_1:

$$-\zeta + 2\zeta\lambda_1 - \tanh(\zeta\bar{H})\lambda_0^2 = 0.$$

Учитывая, что $\lambda_0 = \sqrt{-\xi_0\tanh(\xi_0\bar{H})}$, а $\zeta = \xi_0$, выражение для λ запишется в виде

$$\lambda = \sqrt{-\xi_0\tanh(\xi_0\bar{H})} + \frac{1}{2}\beta(1 - \tanh(\xi_0\bar{H})^2).$$

После подстановки выражения для λ и разложения (25) в (27) и преобразований, учитывающих малость слива и приближение больших индексов, можно записать выражение для поправки ξ_1:

$$\xi_1 = -\frac{m\sqrt{\xi_q}}{-m+\xi_q^2},$$

и соответственно,

$$\xi_{mq} = \xi_q - \varepsilon\frac{m\sqrt{\xi_q}}{-m+\xi_q^2}.$$

Быстрое вращение. Рассмотрим случай быстрого вращения, который реализуется, когда величина центробежного ускорения значительно больше ускорения сил тяжести ($\omega_0^2 r_0 \gg g$) или в случае вращения с любой угловой скоростью в условиях невесомости. Сделаем допущение, что при этом свободная поверхность жидкости принимает форму цилиндра радиуса r_0, коаксиально расположенного по отношению к боковой поверхности, между плоскостями $x = 0$ и $x = -H$.

В случае быстрого вращения граничное условие на свободной поверхности (8) можно записать в виде

$$\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{\partial^4 p}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{|\nabla p_0|}4\omega_0^2\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 2\omega_0\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right).$$

Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, получим характеристическую систему трансцендентных уравнений для определения волновых чисел ξ, ζ и собственного числа λ:

$$D_m(\xi) - \frac{4(\lambda^2+1)}{r_0}E_m(\xi) = 0; \tag{29}$$

$$\lambda = \bar{\gamma}\zeta\tanh(\zeta\bar{H}); \tag{30}$$

$$\lambda^2 = \frac{\zeta^2}{\xi^2-\zeta^2}, \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
D_m(\xi) &= D_m[J,1]D_m[Y,r_0] - D_m[Y,1]D_m[J,r_0];\\
E_m(\xi) &= D_m[J,1]Y_m(\xi r_0) - D_m[Y,1]J_m(\xi r_0);\\
D_m[J,r_0] &= -m\left(1+\frac{i}{\lambda}\right)\frac{1}{r_0}J(\xi r_0) + \xi J_{m-1}(\xi r_0);\\
D_m[Y,r_0] &= -m\left(1+\frac{i}{\lambda}\right)\frac{1}{r_0}Y(\xi r_0) + \xi Y_{m-1}(\xi r_0).
\end{aligned}$$

Для изучения поверхностных волн и получения приближенных асимптотических решений, удобнее воспользоваться предыдущей системой несколько другого вида. Перейдем от функций Бесселя J и Y к модифицированным функциям Бесселя I и K. Пусть $\alpha = i\xi$.

Окончательно система примет вид для случая $m = 0$

$$F_0(\alpha) + \frac{4\alpha^2}{r_0(\mu_l^2 - \alpha^2)} G_0(\alpha) = 0, \tag{32}$$

где

$$F_0(\alpha) = \alpha[K_1(\alpha)I_1(r_0\alpha) - K_1(r_0\alpha)I_1(\alpha)];$$
$$G_0(\alpha) = K_0(r_0\alpha)I_1(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(r_0\alpha).$$

Случай стоячих волн, $m = 0$. Исключая λ из уравнений (29)–(31), получим систему трансцендентных уравнений относительно неизвестных ξ и ζ:

$$\begin{aligned} &\xi[J_1(\xi)Y_1(\xi r_0) - Y_1(\xi)J_1(\xi r_0)]- \\ &- \frac{4\xi^2}{r_0(\xi^2 - \zeta^2)}[Y_1(\xi)J_0(\xi r_0) - J_1(\xi)Y_0(\xi r_0)] = 0; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\tanh(\zeta \bar{H}) = \frac{\beta}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2}}, \qquad \beta = \frac{1}{\bar{\gamma}}. \tag{34}$$

Эту систему можно представить в виде одного комплексного уравнения относительно комплексной переменной ζ, выразив ξ через ζ из второго уравнения $\left(\xi = \sqrt{\zeta^2 + \dfrac{\beta^2}{\tanh^2 \zeta \bar{H}}}\right)$. Графическое решение этой системы уравнений позволяет выделить несколько групп корней в зависимости от их расположения на комплексной плоскости (рис. 2). Можно

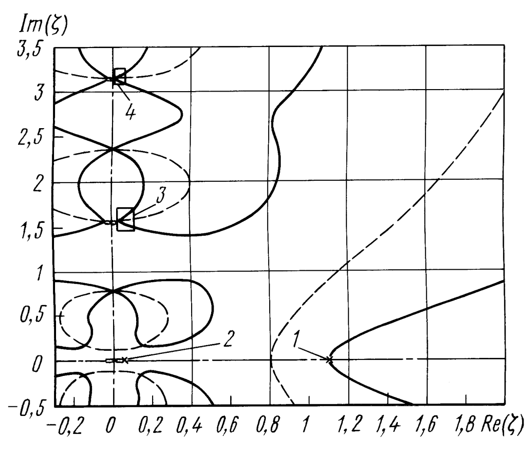

Рис. 2. Графическое решение уравнений (33) и (34) в плоскости комплексного переменного ζ: $m = 0, \bar{H} = 2, r_0 = 0{,}1; \beta = 0{,}1$

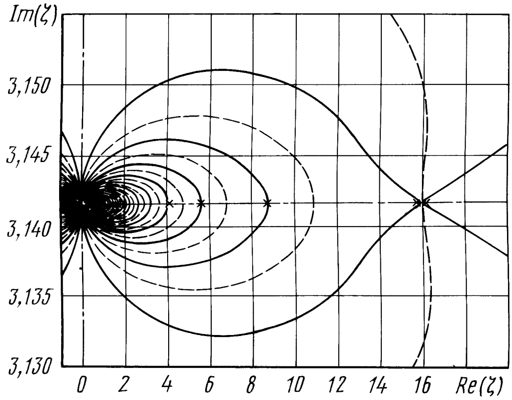

Рис. 3. Графическое решение уравнений (33) и (34) для внутренних волн и волн на свободной поверхности: $m = 0, \bar{H} = 2, r_0 = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$

отметить, что качественно это решение сходно с решением для коаксиального цилиндра, за исключением дополнительной группы корней, отвечающей поверхностным волнам. При данном соотношении исходных параметров существуют две группы действительных решений — стремящихся к бесконечности и к 0 (точки *1* и *2*, см. рис. 2). Внутренние и поверхностные волны характеризуются комплексными числами, группирующимися вдоль мнимой оси ζ (области *3* и *4*, см. рис. 2, и корни, отмеченные знаком “*”, на рис. 3), с точкой накопления $i\dfrac{l\pi}{\bar{H}}$. Численные значения решений приведены в табл. 1–4 (при $m = 0$; $\bar{H} = 2$; $\beta = 0{,}1$).

Таблица 1

Волны слива ($\mathrm{Re}(\zeta) \to \infty$)**.**
Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$	$R_0 = 0,5$
1	ζ	1,09723	1,74562	2,71861
	ξ	1,10201	1,74849	2,72044
	λ	10,7032	17,4238	27,1850
2	ζ	4,97777	6,56750	9,29099
	ξ	4,97877	6,56827	9,29153
	λ	49,7777	65,6750	92,9099
3	ζ	8,55366	11,1199	15,6278
	ξ	8,55424	11,1204	15,6282
	λ	85,5366	111,199	156,278

Таблица 2

Волны слива ($\mathrm{Re}(\zeta) \to 0$)**.**
Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$
1	ζ	0,0487210	0,0329412
	ξ	1,03065	1,520410
	λ	0,0473251	0,0216711
2	ζ	0,0103548	0,00834263
	ξ	4,82940	5,99388
	λ	0,00214412	0,00139186
3	ζ	0,00600572	0,00487969
	ξ	8,32581	10,24691
	λ	0,000721338	0,000476212

Таблица 3

Внутренние волны. Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$	$R_0 = 0,5$
1	ζ	0,0279198 + 1,57113i	0,0245503 + 1,57097i	0,0204681 + 1,57086i
	ξ	0,863014 + 0,00659767i	1,29873 + 0,00763185i	1,87263+ 0,00709264i
	λ	0,00516172 + 0,876588i	0,00672802 + 0,770817i	0,00634404 + 0,642719i
2	ζ	0,00987228 + 1,57080i	0,00810693 + 1,57080i	0,00628810 + 1,57080i
	ξ	4,81564 + 0,0001715985i	5,96474 + 0,000297711i	7,79526 + 0,000251168i
	λ	0,00177154 + 0,310109i	0,00124098 + 0,254665i	0,000766023+ 0,197536i
3	ζ	0,00590634 + 1,57080i	0,00482942 + 1,57080i	0,00364465 + 1,57080i
	ξ	8,31887 + 0,0000519953i	10,2337 + 0,0000805366i	13,6288 + 0,0000466642i
	λ	0,000674767 + 0,185545i	0,000456881 + 0,151716i	0,000262569 + 0,114498i

Таблица 4

Волны на свободной поверхности.
Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$
2	ζ	0,0161210 + 3,14167i
	ξ	0,0140764 + 0,494303i
	λ	0,000600129 + 1,01261i

Случай бегущих волн, $m \neq 0$. Для дальнейшего решения удобно привести систему (29)–(31) к одному уравнению относительно комплексного переменного ζ:

$$D_m\left(\sqrt{\zeta\left(\frac{1}{(\bar{\gamma}\zeta\tanh(\zeta\bar{H}))^2}+1\right)}\right) - \\ -\frac{4((\bar{\gamma}\zeta\tanh(\zeta\bar{H}))^2+1)}{r_0}E_m\left(\sqrt{\zeta\left(\frac{1}{\left(\bar{\gamma}\zeta\tanh(\zeta\bar{H})\right)^2}+1\right)}\right)=0. \tag{35}$$

Здесь, как и в случае с закрытым крышкой сосудом, можно отметить существование двух групп бегущих волн — совпадающих с направлением вращения жидкости и противоположных ему, т.е. прямых и

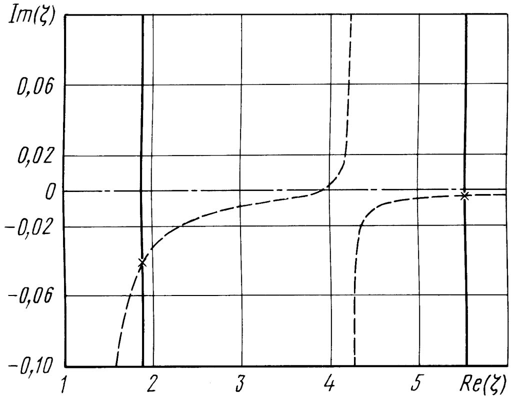

Рис. 4. Графическое решение уравнения (57) для волн слива: $m = 1$, $\bar{H} = 2$, $\beta = 0{,}1$

обратных волн. В случае бегущих волн действительные решения, отвечающие волнам на поверхности слива, становятся комплексными. Это хорошо видно на рис. 4 и из табл. 5–7 (при $m = 1$; $\bar{H} = 2$; $\beta = 0{,}1$).

Таблица 5

Волны слива ($\mathrm{Re}(\zeta) \to \infty$). Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$	$R_0 = 0,5$
1	ζ	1,87826 – 0,0411437i	2,19093 – 0,0352369i	2,97048 – 0,0252734i
	ξ	1,88093 – 0,0410845i	2,19321 – 0,0352000i	2,97216 – 0,0252591i
	λ	18,7624 – 0,414350i	21,9025 – 0,353222i	29,7043 – 0,252772i
2	ζ	5,53129 – 0,00360453i	6,78825 – 0,00309701i	9,393623 – 0,00227862i
	ξ	5,53219 – 0,00360394i	6,78899 – 0,00309667i	9,39416 – 0,00227849i
	λ	55,3129 – 0,0360453i	67,8825 – 0,0309701i	93,9362 – 0,0227862i
3	ζ	8,97410 – 0,00136230i	11,2614 – 0,00112431i	15,6907 – 0,000813715i
	ξ	8,97465 – 0,00136222i	11,2619 – 0,00112427i	15,6910 – 0,000813699i
	λ	89,7410 – 0,0136230i	112,614 – 0,0112431i	156,907 – 0,00813715i

Асимптотика больших индексов. **Поверхностные волны.** Получим здесь асимптотические формулы для определения волновых чисел и частот поверхностных волн и волн слива соответственно при $l \to \infty$ и $n \to \infty$. Используя асимптотические разложения [11] для $I_m(z)$ и $K_m(z)$, имеем

$$K_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \frac{4m^2 - 1^2}{1!\,8z} + \ldots \right\}; \tag{36}$$

$$I_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{z} \left\{ 1 - \frac{4m^2 - 1^2}{1!\,8z} + \ldots \right\}. \tag{37}$$

Таблица 6

Внутренние волны. Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$	$R_0 = 0,5$
1	ζ	0,00976087 + 1,57081i	0,00842577 + 1,57080i	0,006514116 + 1,57080i
	ξ	4,87639 - 0,00247590i	5,72309 - 0,00224120i	7,51363 - 0,00180837i
	λ	0,00158510 + 0,306612i	0,00122389 + 0,264680i	0,000765900 + 0,204636i
2	ζ	0,00592207 + 1,57080i	0,00489403 + 1,57080i	0,00364647 + 1,57080i
	ξ	8,29599 - 0,00157110i	10,0954 - 0,00120547i	13,6219 - 0,000752314i
	λ	0,000643097 + 0,186039i	0,000449768 + 0,153746i	0,000256196 + 0,114555i
3	ζ	0,00422871 + 1,57080i	0,00342540 + 1,57080i	0,00251605 + 1,57080i
	ξ	11,7194 - 0,00111749i	14,5123 - 0,000751635i	19,8104 - 0,000386185i
	λ	0,000338876 + 0,132846i	0,000226437 + 0,107610i	0,000124287 + 0,0790434i

Таблица 7

Волны на свободной поверхности. Результаты вычисления ζ, ξ и λ

n		$R_0 = 0,1$	$R_0 = 0,3$
1	ζ	0,0382638 + 1,57172i	0,0363305 + 1,57156i
	ξ	0,0217781 + 0,870696i	0,0231992 + 0,755479i
	λ	0,000354586 + 1,20116i	0,00260097 + 1,140456i
	χ	–0,832527 – 0,000245764i	–0,876838 – 0,00199975i
2	ζ	0,0192853 + 3,14171i	0,0193741 + 3,14170i
	ξ	0,0111619 + 1,77266i	0,0129395 + 1,78989i
	λ	8,95222e–005 + 1,21122i	0,000621260 + 1,21678i
	χ	–0,825615 – 6,10218e–005i	–0,821837 – 0,000419609i

Подставим эти выражения в уравнения (29) и (32). Рассмотрим сначала асимптотику поверхностных волн при $m = 0$. После алгебраических преобразований получим асимптотическое уравнение

$$x^3 + \frac{A\delta}{8}x^2 - x\left(\frac{B}{8}\delta^2 + 1\right) - \frac{D}{8}\delta = 0, \qquad (38)$$

где $x = \dfrac{\alpha}{\mu_l}$; $A = 35 - 3r_0$; $B = 4(3r_0 + 1)$; $D = 3(1 - r_0)$; $\delta = \dfrac{1}{\mu_l}$ — бесконечно малая величина. Используя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$x = 1 - 2\delta + 3\delta^2 - \frac{D}{8}\delta^3,$$

откуда асимптотику волнового числа α_{ml} и асимптотическую формулу для частоты поверхностных волн можно представить как

$$\alpha_{ml} = \mu_l \left(1 - \frac{2}{\mu_l} + \frac{3}{\mu_l^2} - \frac{D}{8}\frac{1}{\mu_l^3}\right) + O(\mu_l^{-3}) \qquad (l \to \infty);$$

$$\lambda_{ml} = \frac{1}{2} i \mu_l^{1/2} \left(1 + \frac{5}{4}\mu_l^{-1} - \frac{3}{2}\mu_l^{-2} + \frac{9}{8}\mu_l^{-3}\right) + O(\mu_l^{-3}) \qquad (l \to \infty).$$

При выводе асимптотических формул в случае $m \neq 0$ ограничимся главным членом в асимптотических выражениях (36) и (37). Тогда, вместо асимптотического уравнения (38), получим уравнение

$$x^3 + \frac{m^2}{L_0}\delta^2 x^3 + \left(m + \frac{m}{L_0} + 4\right)\delta x^2 + \frac{4m - m^2}{L_0}\delta^2 x - x +$$
$$+ m\frac{L_0 - 1}{L_0}\delta x^2\sqrt{1 - x^2} - \frac{4m}{L_0}\delta^2 x\sqrt{1 - x^2} + m\frac{1 - L_0}{L_0}\delta\sqrt{1 - x^2} -$$
$$- m\frac{1 + L_0}{L_0}\delta = 0.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, находим

$$x = 1 - 2\delta + 2(1 + m)\delta^2 - 2m^2\delta^3.$$

Откуда определяем асимптотические выражения для волнового числа α и частоты λ:

$$\alpha = \mu_l \left(1 - \frac{2}{\mu_l} + 2\frac{1 + m}{\mu_l^2} - \frac{2m^2}{\mu_l^3}\right) + O(\mu_l^{-3});$$
$$\lambda = \frac{1}{2} i \mu_l^{1/2} \left(1 + \frac{2 + m}{2\mu_l} - \frac{1 + m}{\mu_l^2} - \frac{(1 + m)^2}{2\mu_l^3}\right) + O(\mu_l^{-3}).$$

Полученные асимптотические формулы показывают, что частоты поверхностных прямых волн ($m < 0$) меньше, чем частоты поверхностных обратных волн ($m > 0$).

Волны слива. Выражение, описывающее асимптотическое поведение волн слива и внутренних волн, можно получить, если воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Бесселя:

$$J_m(\xi r_0) \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi r_0 \xi}} \left(\cos\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\frac{4m^2 - 1}{\xi r_0}\sin\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right)\right);$$

$$
Y_m(\xi r_0) \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi r_0 \xi}} \left(\sin\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) + \right.
$$
$$
\left. + \frac{1}{8} \frac{4m^2 - 1}{\xi r_0} \cos\left(\xi r_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \right).
$$

Подставляя эти разложения в уравнение (29), получим следующее асимптотическое уравнение для чисел ξ и ζ:

$$
\tan(\xi(r_0 - 1)) = \Phi(\xi, \zeta, m, \bar{\gamma}, r_0) + i\bar{\gamma}^{-1}\Psi(\xi, \zeta, m, \bar{\gamma}, r_0), \qquad (39)
$$

где Φ и Ψ — дробно-рациональные функции волновых чисел ξ, ζ, m. В случае отсутствия слива ($\bar{\gamma} \to \infty$), волновые числа ζ оказываются равны $\zeta = i\dfrac{\pi l}{\bar{H}}$, $l = 1, 2, \ldots$, а трансцендентное уравнение (39) имеет только действительные решения, определяющие волновые числа ξ внутренних волн.

Решение уравнения (39) в комплексной плоскости ξ представим в виде

$$
\xi = \xi_0 + \varepsilon, \qquad (40)
$$

где $\xi_0 = \dfrac{2q-1}{2}\dfrac{\pi}{1-r_0}$, $q = q_0, q_0 + 1, \ldots$ — корни уравнения $\cot(\xi_0(1 - r_0)) = 0$. Подставив выражение (40) в уравнение (39), определим поправку ε и окончательное асимптотическое выражение для ξ:

$$
\xi = \xi_q \left(1 + \frac{A}{\xi_q^2 C} + i\frac{m}{\xi_q^3 \bar{\gamma}(r_0 - 1)} \right), \qquad q \to \infty,
$$

где $A = 4m^2\bar{\gamma}^2(r_0 - 1) + \bar{\gamma}^2 + 2r_0^2 + 3r_0\bar{\gamma}^2$, $C = 8r_0\bar{\gamma}^2(r_0 - 1)$.

Для случая $m = 0$ имеем приближенное решение

$$
\xi_q = \xi_q^{(0)} - \frac{r_0(1 - r_0)}{4\bar{\gamma}^2 \xi_q^{(0)}}.
$$

Обсуждение результатов решения. При анализе полученных результатов следует отметить появление решений, не встречающихся в задачах без слива, а также изменение традиционных решений под влиянием наличия слива. Прежде всего, наличие поверхности слива определяет возможность появления на ней волновых движений — волн слива. Причины их появления впервые рассматривались в работе [9]. Волны слива характеризуются волновыми и собственными числами — решениями соответствующих систем уравнений. В общем случае, это апериодические затухающие волновые движения. Появление в системе поверхности слива также отражается и на существующих в ней колебательных движениях. Внутренние волны и волны на свободной поверхности превращаются в затухающие волновые движения.

Медленное вращение. В случае стоячих волн ($m = 0$) получаем действительные решения для волн слива двух групп — с действительными волновыми числами ζ, стремящимися к 0 и к ∞. Это означает наличие на поверхности слива апериодических решений, быстро затухающих по времени и вглубь жидкости. При этом увеличение слива приводит с увеличению степени затухания. Соотношение между скоростью вращения и степенью сопротивления сливу также может приводить к появлению кратных корней для низших тонов колебаний, а затем и комплексно-сопряженных решений для соответственного тона. Таким же образом уменьшение сопротивления сливу увеличивает затухание внутренних волн и волн на свободной поверхности. В случае бегущих волн ($m \neq 0$) — поверхностных, внутренних и волн слива — получаем две группы решений — прямые и обратные волны, отличающиеся направлением распространения и основными волновыми параметрами. Наличие поверхности слива в этом случае также приводит к появлению на ней волн слива, но уже не являющихся апериодическими, как в случае осесимметричных колебаний. Волны слива становятся быстрозатухающими колебательными движениями, степень затухания которых зависит от скорости слива. Поверхностные и внутренние волны, как и в случае стоячих волн, являются затухающими колебательными движениями. Степень их затухания также зависит от скорости слива. При этом для всех групп волн при определенной скорости вращения прямые волны могут не существовать.

Быстрое вращение. В отличие от медленного вращения свободная поверхность располагается параллельно оси вращения. Здесь, также как и в случае медленного вращения, наличие слива приводит к появлению волновых движений на его поверхности. В случае стоячих волн обе группы поверхностных волн (с ζ, стремящимся к 0 и к ∞) являются аперидическими движениями с действительным коэффициентом затухания λ. Бегущие волны — это затухающие колебательные движения с колебательной составляющей, более выраженной для поверхностных и внутренних волн, и затухающей составляющей, более выраженной для волн слива.

Автор выражает признательность канд.физ.-мат.наук А.Н. Темнову за плодотворные консультации по всем вопросам, обсуждаемым в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К о л е с н и к о в К. С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. – М.: Машиностроение, 1971. – 260 с.
2. С о б о л е в С. Л. О движениии симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1960. – № 3. – С. 20–55.

3. Г р и г о р ь е в Ю. Н. О спектре пучка операторов задачи С.Л. Соболева // Динамика сплошной среды, Новосибирск. – 1974. – № 17. – С. 12–18.

4. К о п а ч е в с к и й Н. Д., Р а д я к и н Н. К. О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. // Вопросы вычислительной математики и техники. – Киев: Наукова думка, 1976. С. 3–25.

5. Г о н т к е в и ч В. С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах // Гидромеханика. Республ. межвуз. сб. – Киев, 1972. – Вып. 20. – С. 52–58.

6. Р в а л о в Р. В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Известия АН СССР, МЖГ. – 1973. – № 4. – С. 81–88.

7. К о п а ч е в с к и й Н. Д. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких жидкостей. – Харьков: Физико-технический институт низких температур, препринт, 1978. Препринт № 33–77. – 60 с.

8. В а т с о н Т. И. Теория Бесселевых функций. Ч.1. – М.: И.И.Л.,1949. – 797 с.

9. О р л о в В. В., Т е м н о в А. Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака. // Современные методы теории функций и смежные проблемы. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997.

10. О р л о в В. В., Т е м н о в А. Н.: Колебания вращающейся жидкости, вытекающей из закрытого сосуда // ИФЖ, Минск, 2000. – С. 165–173

11. С п р а в о ч н и к по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 01.06.2003

Владимир Владимирович Орлов родился в 1967 г., окончил в 1990 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 2 научных работ в области динамики жидкости.

V.V. Orlov (b. 1967) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1990. Author of 2 publications in the field of fluid dynamics.

УДК 533.6

А. И. П а с т у х о в, Е. К. Г а л е м и н,
В. А. Д е н и с о в

К РАСЧЕТУ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛЬЕВ С КОНЦЕВЫМИ ШАЙБАМИ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ

Задача расчета аэрогидродинамических характеристик тонких крыльев с концевыми шайбами решена на основе нелинейной теории непрерывной вихревой поверхности. Предлагаемый метод применим для крыльев больших и малых относительных удлинений, он учитывает размеры шайб и положение их по хорде крыла.

Состояние вопроса и описание эксперимента. Вопрос о применении концевых шайб для улучшения аэрогидродинамических характеристик (АГДХ) крыла конечного размаха, вообще говоря, не является новым. Опубликованные исследования относятся в основном