

А. В. А т т е т к о в, Н. С. Б е л я к о в,
И. К. В о л к о в

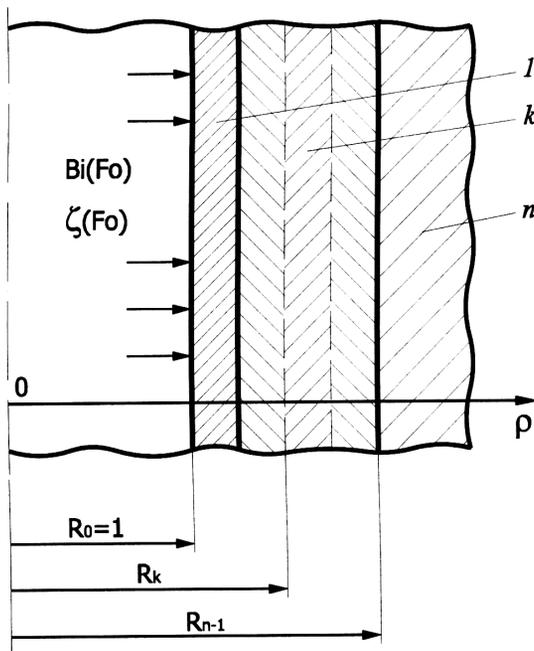
ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КАНАЛ С МНОГОСЛОЙНЫМ ПОКРЫТИЕМ, В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Разработан аналитический метод решения задачи теплопроводности для неограниченного твердого изотропного тела с цилиндрическим каналом, заполненным высокотемпературным газом и обладающим многослойным покрытием, при нестационарных режимах теплообмена в изучаемой системе. В основе метода лежит идея расщепления ядра обобщенного интегрального преобразования Вебера, применяемого по пространственной переменной.

В приложениях математической теории теплопроводности [1–4] актуальной является задача определения температурного состояния многослойной области, подверженной тепловому воздействию внешней среды [5–10]. Трудности, возникающие при ее решении аналитическими методами, хорошо известны [10]. Они еще более усугубляются, если необходимо учитывать нестационарность реализуемого режима теплообмена с внешней средой [4, 10, 11].

В работах [12, 13] предложен аналитический метод решения задачи теплопроводности для неограниченного твердого тела с цилиндрическим каналом, который может иметь теплозащитное покрытие, при изменяющихся во времени условиях теплообмена в изучаемой системе. В основе метода лежит идея расщепления ядра сингулярного интегрального преобразования, являющегося обобщением известного интегрального преобразования Вебера [1, 11, 14]. Проблематичность применения этого подхода к решению задачи нестационарной теплопроводности для изотропного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности, обусловлена, в первую очередь, отсутствием аналогов обобщенного интегрального преобразования Вебера [12, 15], хотя общая теория интегральных преобразований допускает их существование [14, 15].

Цель проведенных исследований — разработка и обоснование аналитического метода решения задачи нестационарной теплопроводности для неограниченного твердого изотропного тела с цилиндрическим каналом, заполненным высокотемпературным газом (в дальнейшем — внешней средой) и обладающим многослойным покрытием. При этом предполагается, что тепловой контакт между слоями покрытия, равно как и в системе “канал–покрытие”, является идеальным, а



Используемая расчетная схема:

l и k – слои многослойного покрытия; n – твердое тело

условия теплообмена с внешней средой изменяются во времени, т. е. являются нестационарными.

Математическая модель. При сделанных предположениях математическая модель процесса формирования температурного поля в твердом изотропном теле, содержащем цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности (рисунок), имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right], \quad \rho > R_0, \quad Fo > 0; \quad (1)$$

$$\Theta(\rho, Fo) = \begin{cases} \Theta_k(\rho, Fo), & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}, \\ \Theta_n(\rho, Fo), & R_{n-1} < \rho < +\infty; \end{cases}$$

$$a^2 = \begin{cases} a_k^2, & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}, \\ a_n^2, & R_{n-1} < \rho < +\infty; \end{cases} \quad (2)$$

$$\Theta_k(\rho, Fo) \Big|_{Fo=0} = 0, \quad k \in \{1, n\}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta_1(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0} = \Lambda_1^{-1} Bi(Fo) \left[\Theta_1(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R_0} - \zeta(Fo) \right]; \quad (4)$$

$$\Theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R_k-0} = \Theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R_k+0}, \quad k \in \{1, n-1\}; \quad (5)$$

$$\Lambda_k \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_k-0} = \Lambda_{k+1} \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_k+0}, \quad k \in \{1, n-1\}; \quad (6)$$

$$\Theta(\rho, \text{Fo})|_{\text{Fo} > 0} \in L^2[R_0, +\infty), \quad (7)$$

где условие (7) означает, что $\Theta(\rho, \text{Fo})$ принадлежит классу функций $L^2[R_0, +\infty)$, интегрируемых с квадратом по пространственной переменной $\rho \in [R_0, +\infty)$ при каждом фиксированном значении $\text{Fo} > 0$;

$$\rho = \frac{r}{r_0}; \text{Fo} = \frac{\varkappa_n t}{r_0^2}; \Theta_k = \frac{T_k - T_0}{T_{c0} - T_0}, \quad k \in \{1, n\};$$

$$\zeta = \frac{T_c - T_0}{T_{c0} - T_0}; \text{Bi} = \frac{\alpha}{\lambda_n} r_0; R_0 = 1; R_k = \frac{r_k}{r_0}, \quad k \in \{1, n-1\};$$

$$a_k^2 = \frac{\varkappa_k}{\varkappa_n}, \quad \Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_n}, \quad k \in \{1, n-1\}; \quad a_n^2 = 1; \quad \Lambda_n = 1;$$

r — радиальная координата; t — время; T — температура; λ — коэффициент теплопроводности; \varkappa — коэффициент температуропроводности; $\alpha = \alpha(t)$ — коэффициент теплоотдачи; индекс k , $k \in \{1, n-1\}$, относится к k -му слою многослойного покрытия, индекс n — к твердому телу, индекс c — к внешней среде, индекс 0 — к начальным значениям величин. Функции $\text{Bi}(\text{Fo})$ и $\zeta(\text{Fo})$ по смыслу решаемой задачи являются неотрицательными и удовлетворяют условиям Гельдера [16].

Температурное состояние системы “твердое тело–покрытие” однозначно устанавливается заданием безразмерных симплексов a_k^2 и Λ_k , $k \in \{1, n\}$, первый из которых характеризует теплоинерционные свойства k -го слоя покрытия относительно твердого тела, а второй — относительную теплопроводность твердого тела. При $a_k^2 = 1 = \Lambda_k$, $\forall k = \overline{1:n}$, математическая модель (1)–(7) описывает процесс формирования температурного поля в неограниченном твердом теле с цилиндрическим каналом, заполненным высокотемпературным газом, при нестационарных условиях теплообмена в изучаемой системе, определяемых функциональной зависимостью $\text{Bi} = \text{Bi}(\text{Fo})$. Для этого частного случая решение задачи в аналитически замкнутом виде найдено в работе [12]. Аналогичный результат при наличии на поверхности цилиндрического канала однослойного изотропного покрытия получен в работе [13].

Условия, накладываемые на функции $\text{Bi}(\text{Fo})$ и $\zeta(\text{Fo})$, не являются жесткими и соответствуют реально существующим режимам теплообмена с внешней средой [11–13]. Заметим также, что для рассматриваемой задачи (1)–(7) выполнены все условия теоремы существования и единственности ее решения [16].

Обобщенное интегральное преобразование Вебера для неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с многослойным покрытием. Для построения аналитического решения задачи (1)–(7) найдем соответствующее ей сингулярное интеграль-

ное преобразование, применяемое по пространственной переменной ρ :

$$F(s) = V[f(\rho)] \equiv \int_{R_0}^{\infty} f(\rho) \overline{K(\rho, s)} q(\rho) d\rho; \quad (8)$$

$$f(\rho) = V^{-1}[F(s)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(s) K(\rho, s) d\sigma(s), \quad (9)$$

где $F(s)$ — изображение оригинала $f(\rho) \in L^2[R_0, +\infty)$, при этом равенство (8) понимается в смысле стандартной нормы пространства $L^2[R_0, +\infty)$ [14, 15]; $K(\rho, s)$ — ядро интегрального преобразования с параметром s , принимающим значения в поле вещественных чисел \mathbb{R} , а $\overline{K(\rho, s)}$ — комплексно-сопряженная по отношению к нему функция; $q(\rho)$ и $\sigma(s)$ — соответственно весовая и спектральная функции сингулярного интегрального преобразования (8), (9).

1. Ядро интегрального преобразования. Из равенств (1)–(7) следует, что ядро интегрального преобразования

$$K(\rho, s) = \begin{cases} K_k(\rho, s), & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}, \\ K_n(\rho, s), & R_{n-1} < \rho < +\infty \end{cases} \quad (10)$$

задается линейным дифференциальным оператором второго порядка

$$L[\cdot] \equiv a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad \rho > R_0; \quad (11)$$

условиями сопряжения; соответствующими условиям (5) и (6) при $\rho = R_k, k \in \{1, n-1\}$; граничным условием (4) при $\rho = R_0$ и условием (7) его принадлежности классу интегрируемых с квадратом функций $L^2(R_0, +\infty)$. При этом граничное условие при $\rho = R_0$, согласно равенствам (4), (10) и общей теории интегральных преобразований [14, 15], может быть представлено как

$$K_1(\rho, s) \Big|_{\rho=R_0} = R_0; \quad \frac{\partial K_1(\rho, s)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_0} = \Lambda_1^{-1} \text{Bi}(\text{Fo}) \equiv h(\text{Fo}). \quad (12)$$

Следует подчеркнуть, что, как следует из равенств (10), (12), ядро сингулярного интегрального преобразования (8), (9) зависит не только от пространственной переменной ρ и параметра $s \in \mathbb{R}$, но и от числа Фурье Fo , т.е. от времени.

Весовая функция $q(\rho)$, приводящая линейный дифференциальный оператор (11) к самосопряженному виду, определяется стандартным

методом [14, 15] и имеет вид

$$q(\rho) = \rho a^{-2} \equiv \begin{cases} \rho a_k^{-2}, & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}; \\ \rho a_n^{-2}, & R_{n-1} < \rho < +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, ядро сингулярного интегрального преобразования (8), (9) должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial K(\rho, s)}{\partial \rho} \right] + s a^{-2} K(\rho, s) = 0, \quad R_0 < \rho < +\infty, \quad (14)$$

из которого с учетом равенств (10), (12), (13) находим

$$K_k(\rho, s) = C_{1k} J_0 \left(\frac{\rho \sqrt{s}}{a_k} \right) + C_{2k} Y_0 \left(\frac{\rho \sqrt{s}}{a_k} \right), \quad k \in \{1, n\}, \quad (15)$$

где $J_0(\cdot)$ — цилиндрическая функция первого рода нулевого порядка (функция Бесселя); $Y_0(\cdot)$ — цилиндрическая функция второго рода нулевого порядка (функция Неймана). При этом коэффициенты $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n$ ядра интегрального преобразования (15) не зависят от ρ и должны определяться из условий сопряжения для ядра интегрального преобразования, соответствующих условиям (5) и (6) при $\rho = R_k$, $k \in \{1, n-1\}$.

В целях нахождения этих условий, а также проверки корректности проведенных рассуждений воспользуемся известным [14, 15] свойством сингулярных интегральных преобразований применительно к рассматриваемой задаче:

$$V[L[f(\rho)]] = -sV[f(\rho)] + R_0 h(\text{Fo}) \zeta(\text{Fo}), \quad (16)$$

где $V[\cdot]$ — оператор прямого интегрального преобразования (8), а оператор $L[\cdot]$ определяется равенством (11). Можно показать, что равенство (16) будет иметь место, если для ядра (10) интегрального преобразования (8), (9) будут выполнены следующие условия сопряжения:

$$\Lambda_k^{-1} K_k(\rho, s) \Big|_{\rho=R_k-0} = \Lambda_{k+1}^{-1} K_{k+1}(\rho, s) \Big|_{\rho=R_k+0}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial K_k(\rho, s)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_k-0} = \frac{\partial K_{k+1}(\rho, s)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_k+0}, \quad k \in \{1, n-1\}. \quad (18)$$

2. Определение коэффициентов $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n$ ядра интегрального преобразования. Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения

$$p_k = a_k^{-1} \sqrt{s}, \quad k \in \{1, n\}. \quad (19)$$

Тогда, согласно равенствам (15), (12), (17)–(19) коэффициенты $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n$, входящие в ядро (10) интегрального преобразования (8),

(9), должны удовлетворять следующим системам линейных уравнений: при $k = 1$

$$\begin{bmatrix} J_0(p_1 R_0) & Y_0(p_1 R_0) \\ J'_0(p_1 R_0) & Y'_0(p_1 R_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ p_1^{-1} h(\text{Fo}) \end{bmatrix};$$

при $k \in \{1, n-1\}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_0(p_{k+1} R_k) & Y_0(p_{k+1} R_k) \\ J'_0(p_{k+1} R_k) & Y'_0(p_{k+1} R_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,k+1} \\ C_{2,k+1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \Lambda_k^{-1} \Lambda_{k+1} & 0 \\ 0 & p_{k+1}^{-1} p_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(p_k R_k) & Y_0(p_k R_k) \\ J'_0(p_k R_k) & Y'_0(p_k R_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом известных [2, 14] свойств цилиндрических функций

$$J'_0(\cdot) = -J_1(\cdot); \quad Y'_0(\cdot) = -Y_1(\cdot);$$

$$J_\nu(\cdot) Y'_\nu(\cdot) - J'_\nu(\cdot) Y_\nu(\cdot) = 2(\pi \cdot)^{-1}, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

получаем

$$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} R_0 p_1 \begin{bmatrix} -R_0 Y_1(p_1 R_0) & -Y_0(p_1 R_0) \\ R_0 J_1(p_1 R_0) & J_0(p_1 R_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ p_1^{-1} h(\text{Fo}) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{1,k+1} \\ C_{2,k+1} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{2} R_k p_{k+1} \begin{bmatrix} -R_k Y_1(p_{k+1} R_k) & -Y_0(p_{k+1} R_k) \\ R_k J_1(p_{k+1} R_k) & J_0(p_{k+1} R_k) \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} \Lambda_k^{-1} \Lambda_{k+1} & 0 \\ 0 & p_{k+1}^{-1} p_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(p_k R_k) & Y_0(p_k R_k) \\ -R_k J_1(p_k R_k) & -R_k Y_1(p_k R_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

3. Спектральная функция. Для завершения процедуры построения сингулярного интегрального преобразования (8), (9) с ядром $K(\rho, s)$ и весовой функцией $q(\rho)$, которые полностью определены равенствами (10), (15), (19), (20) и (13) соответственно, необходимо найти спектральную функцию $\sigma(s)$. Для этого определим функцию

$$\chi(\rho, s) = \begin{cases} \chi_k(\rho, s), & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}; \\ \chi_n(\rho, s), & R_{n-1} < \rho < +\infty, \end{cases} \quad (21)$$

которая удовлетворяет уравнению (14), условиям сопряжения (17), (18) и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \chi_1(\rho, s)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = -R_0; \quad \chi_1(\rho, s) \Big|_{\rho=R_0} = h(\text{Fo}),$$

а также сопряженным граничным условиям (12). Непосредственно проверяя, можно убедиться в том, что

$$\chi_k(\rho, s) = v_{1k} J_0(p_k \rho) + v_{2k} Y_0(p_k \rho), \quad k \in \{1, n\}; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} &= \frac{\pi}{2} R_0 p_1 \begin{bmatrix} -R_0 Y_1(p_1 R_0) & -Y_0(p_1 R_0) \\ R_0 J_1(p_1 R_0) & J_0(p_1 R_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(\text{Fo}) \\ -p_1^{-1} R_0 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} v_{1,k+1} \\ v_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \frac{\pi}{2} R_k p_{k+1} \begin{bmatrix} -R_k Y_1(p_{k+1} R_k) & -Y_0(p_{k+1} R_k) \\ R_k J_1(p_{k+1} R_k) & J_0(p_{k+1} R_k) \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \Lambda_k^{-1} \Lambda_{k+1} & 0 \\ 0 & p_{k+1}^{-1} p_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(p_k R_k) & Y_0(p_k R_k) \\ -R_k J_1(p_k R_k) & -R_k Y_1(p_k R_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{bmatrix}, \quad (23) \\ k &\in \{1, n-1\}, \end{aligned}$$

где $\{p_k\}_{k=1}^n$ – параметры, связанные с параметром $s \in \mathbb{R}$ сингулярного интегрального преобразования (8), (9) равенствами (19).

Теперь можно определить функцию

$$V(\rho, s) = \chi(\rho, s) + m(s)K(\rho, s), \quad R_0 < \rho < +\infty,$$

где $m(s)$ – функция Вейля–Титчмарша [14], связанная со спектральной функцией $\sigma(s)$ и определяемая из условия принадлежности $V(\rho, s)$ классу функций $L^2[R_0, +\infty)$, интегрируемых с квадратом по пространственной переменной $\rho \in [R_0, +\infty)$ при каждом фиксированном значении параметра s . Поскольку из равенств (10), (15), (20)–(22) следует, что при каждом фиксированном значении параметра s

$$V(\rho, s)|_{R_0 \leq \rho \leq R_{n-1}} \in L^2[R_0, R_{n-1}],$$

то функция $m(s)$ должна определяться из условия

$$V(\rho, s)|_{R_{n-1} \leq \rho < +\infty} = \{\chi_n(\rho, s) + m(s)K_n(\rho, s)\} \in L^2[R_{n-1}, +\infty)$$

при любом фиксированном значении параметра s .

Воспользовавшись известными [2, 14, 15] равенствами, связывающими цилиндрические функции первого, второго и третьего родов:

$$J_\nu(\cdot) = \frac{1}{2} \{H_\nu^{(1)}(\cdot) + H_\nu^{(2)}(\cdot)\};$$

$$Y_\nu(\cdot) = \frac{1}{2i} \{H_\nu^{(1)}(\cdot) - H_\nu^{(2)}(\cdot)\},$$

где $H_\nu^{(1)}(\cdot)$, $H_\nu^{(2)}(\cdot)$ – функции Ганкеля первого и второго рода порядка ν соответственно, с учетом равенств (15), (19), (22), получаем

$$\begin{aligned} \chi_n(\rho, s) + m(s)K_n(\rho, s) &= \\ &= \frac{1}{2} \{(v_{1n} - iv_{2n}) + m(s)(C_{1n} - iC_{2n})\} H_0^{(1)}(p_n \rho) + \\ &+ \frac{1}{2} \{(v_{1n} + iv_{2n}) + m(s)(C_{1n} + iC_{2n})\} H_0^{(2)}(p_n \rho). \end{aligned}$$

Согласно работам [14, 15] при каждом фиксированном значении параметра s

$$H_0^{(1)}(p_n \rho) \in L^2[R_{n-1}, +\infty);$$

$$H_0^{(2)}(p_n \rho) \notin L^2[R_{n-1}, +\infty),$$

поэтому функция $m(s)$ должна удовлетворять уравнению

$$(v_{1n} + iv_{2n}) + m(s)(C_{1n} + iC_{2n}) = 0.$$

Отсюда находим функцию Вейля–Титчмарша

$$m(s) = -\frac{v_{1n} + iv_{2n}}{C_{1n} + iC_{2n}}, \quad (24)$$

где коэффициенты $\{C_{jn}\}_{j=1}^2$ и $\{v_{jn}\}_{j=1}^2$ зависят от параметра s интегрального преобразования (8), (9) и определяются равенствами (19), (20) и (23) соответственно. Нетрудно также убедиться в том, что функция $m(s)$ не имеет особых точек.

Дифференциал спектральной функции $\sigma(s)$ согласно общей теории интегральных преобразований [14, 15] определяется как

$$d\sigma(s) = \frac{\text{Im } m(s)}{\pi R_0 [h^2(\text{Fo}) + R_0^2]} ds.$$

При любом фиксированном значении параметра $s \geq 0$ согласно равенствам (19), (20), (23) и свойствам цилиндрических функций [2, 14] коэффициенты $\{C_{jn}\}_{j=1}^2$ и $\{v_{jn}\}_{j=1}^2$ вещественны. Поэтому имеем

$$(s \geq 0) \Rightarrow \text{Im } m(s) = -\frac{C_{1n}v_{2n} - C_{2n}v_{1n}}{C_{1n}^2 + C_{2n}^2}. \quad (25)$$

Можно также показать, что при любом $s < 0$ функции $C_{1n} + iC_{2n}$ и $v_{1n} + iv_{2n}$ в правой части равенства (24) остаются вещественными. Поэтому получаем

$$(s < 0) \Rightarrow \text{Im } m(s) = 0.$$

Таким образом, дифференциал спектральной функции $\sigma(s)$ имеет вид

$$d\sigma(s) = \begin{cases} \frac{\text{Im } m(s)}{\pi R_0 [h^2(\text{Fo}) + R_0^2]} ds, & s \geq 0; \\ 0, & s < 0, \end{cases} \quad (26)$$

где мнимая часть функции $m(s)$ определяется равенством (25), а функция $h(\text{Fo})$ — равенством (12).

4. Сингулярное интегральное преобразование. Для удобства практического использования введем новые параметры $\{p_k\}_{k=1}^n$ полученного интегрального преобразования, воспользовавшись равенствами (19). В этом случае согласно равенствам (8)–(10), (13), (15), (25),

(26) получаем

$$\begin{aligned}
 F(p) &= V[f(p)] \equiv \int_{R_0}^{\infty} f(\rho) K(p, \rho) q(\rho) d\rho; \\
 f(\rho) &= V^{-1}[F(p)] \equiv \int_0^{\infty} f(p) K(p, \rho) d\sigma(p); \\
 p &= \begin{cases} p_k, & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}; \\ p_n, & R_{n-1} < \rho < +\infty; \end{cases} \\
 q(\rho) &= \begin{cases} \rho a_k^{-1}, & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}; \\ \rho a_n^{-1}, & R_{n-1} < \rho < +\infty; \end{cases} \\
 K(p, \rho) &= \begin{cases} K_k(p_k, \rho), & R_{k-1} < \rho < R_k, \quad k \in \{1, n-1\}; \\ K_n(p_n, \rho), & R_{n-1} < \rho < +\infty; \end{cases} \\
 K_k(p_k, \rho) &\equiv \overline{K_k(p_k, \rho)} = \operatorname{Re} \left\{ (C_{1k} - iC_{2k}) H_0^{(1)}(p_k \rho) \right\} = \\
 &= C_{1k} J_0(p_k \rho) + C_{2k} Y_0(p_k \rho), \quad k \in \{1, n\}; \\
 d\sigma(p) &= \frac{2a_n^2 \{C_{2n} v_{1n} - C_{1n} v_{2n}\}}{\pi R_0 \{C_{1n}^2 + C_{2n}^2\}} \frac{p_n dp_n}{h^2(\text{Fo}) + R_0^2},
 \end{aligned} \tag{27}$$

где $f(\rho)$ — функция-оригинал, т.е. $f(\rho) \in L^2[R_0, +\infty)$; коэффициенты $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n, \{v_{jn}\}_{j=1}^2$ определяются равенствами (20) и (23) соответственно. Кроме того, если линейный дифференциальный оператор $L[\cdot]$ определяется равенствами (11), (2), то с учетом равенств (16), (19) имеем

$$V[L[f(\rho)]] = -p_n^2 a_n^2 V[f(\rho)] + R_0 h(\text{Fo}) \zeta(\text{Fo}).$$

Заметим, что сингулярное интегральное преобразование (27) можно рассматривать как аналог обобщенных интегральных преобразований Фурье и Вебера, соответственно использованных при нахождении аналитического решения задачи теплопроводности для экранированного полупространства [11] и неограниченного твердого тела с цилиндрическим каналом, имеющим покрытие [13], в условиях нестационарного теплообмена с внешней средой.

Определение температурного поля в твердом изотропном теле, содержащем цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности. Специфика исходной задачи (1)–(7) приводит к трудностям принципиального характера при нахождении ее решения как при применении интегрального преобразования Лапласа [1–3, 14] по временной переменной Fo , так и при применении сингулярного интегрального преобразования (27) по пространственной переменной ρ . В первом случае это, в основном, обусловлено наличием функциональной зависимости $\text{Vi} = \text{Vi}(\text{Fo})$, что во втором случае приводит к

зависимости ядра сингулярного интегрального преобразования (27) от числа Фурье, вследствие чего

$$V \left[\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right] \neq \frac{\partial}{\partial Fo} V [\Theta(\rho, Fo)].$$

Для преодоления возникших трудностей воспользуемся подходом, в основе которого лежит идея расщепления ядра сингулярного интегрального преобразования, применяемого по пространственной переменной [11–13].

Пусть далее

$$u(p, Fo) = V[\Theta(\rho, Fo)] \quad (28)$$

— изображение сингулярного интегрального преобразования (27) решения $\Theta(\rho, Fo)$ задачи (1)–(7). Вводя обозначения

$$A_k(p_k, Fo) = \frac{1}{a_k^2} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \Theta(\rho, Fo) H_0^{(1)}(p_k \rho) \rho d\rho, \quad k \in \{1, n-1\};$$

$$A_n(p_n, Fo) = \frac{1}{a_n^2} \int_{R_{n-1}}^{\infty} \Theta(\rho, Fo) H_0^{(1)}(p_n \rho) \rho d\rho; \quad (29)$$

$$\omega_k(p_k, Fo) = C_{1k} - iC_{2k}, \quad k \in \{1, n\},$$

где функции $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n$ определены равенствами (20), с учетом равенств (27) приходим к следующему представлению изображения (28) сингулярного интегрального преобразования:

$$u(p, Fo) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left\{ \omega_k(p_k, Fo) A_k(p_k, Fo) \right\}. \quad (30)$$

При этом справедливы тождества

$$V \left[\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \right] \equiv \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_k(p_k, Fo) \frac{dA_k(p_k, Fo)}{dFo} \right\};$$

$$V \left[\frac{a^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right) \right] \equiv$$

$$\equiv -p_n^2 a_n^2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_k(p_k, Fo) A_k(p_k, Fo) \right\} + R_0 h(Fo) \zeta(Fo). \quad (31)$$

Таким образом, согласно равенствам (27)–(30) решение исходной задачи (1)–(7) найдено, если известны функции $\{A_k(p_k, Fo)\}_{k=1}^n$. В свою очередь, эти функции согласно равенствам (1)–(7) и (27)–(31)

являются решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с параметрами $\{p_k\}_{k=1}^n$:

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_k(p_k, \operatorname{Fo}) \left[\frac{dA_k(p_k, \operatorname{Fo})}{d\operatorname{Fo}} + p_n^2 a_n^2 A_k(p_k, \operatorname{Fo}) \right] \right\} = \\ = R_0 h(\operatorname{Fo}) \zeta(\operatorname{Fo}), \operatorname{Fo} > 0; \quad (32)$$

$$A_k(p_k, 0) = 0, k \in \{1, n\}.$$

В соответствии с исходными допущениями, существует единственное решение $\Theta(\rho, \operatorname{Fo})$ задачи (1)–(7) и, как следствие, согласно равенствам (27), (28), существует единственная функция $u(p, \operatorname{Fo})$ — изображение сингулярного интегрального преобразования (27) этого решения. Поэтому из равенства (30) следует, что любое решение $\{A_k(p_k, \operatorname{Fo})\}_{k=1}^n$ задачи (32) позволяет найти искомое изображение $u(p, \operatorname{Fo})$. При этом из вещественности функций $h(\operatorname{Fo})$ и $\zeta(\operatorname{Fo})$ следует, что задача Коши

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(p_k, \operatorname{Fo}) \left[\frac{dA_k(p_k, \operatorname{Fo})}{d\operatorname{Fo}} + p_n^2 a_n^2 A_k(p_k, \operatorname{Fo}) \right] = \\ = R_0 h(\operatorname{Fo}) \zeta(\operatorname{Fo}), \operatorname{Fo} > 0; \quad (33)$$

$$A_k(p_k, 0) = 0, k \in \{1, n\},$$

является частным случаем задачи Коши (32) и, как следствие, любое ее решение — решение задачи Коши (31).

Для упрощения дальнейших рассуждений представим задачу (33) в матричной форме:

$$[\omega_1(p_1, \operatorname{Fo}) \dots \omega_n(p_n, \operatorname{Fo})] \left\{ \frac{d}{d\operatorname{Fo}} \begin{bmatrix} A_1(p_1, \operatorname{Fo}) \\ \dots \\ A_n(p_n, \operatorname{Fo}) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + p_n^2 a_n^2 \begin{bmatrix} A_1(p_1, \operatorname{Fo}) \\ \dots \\ A_n(p_n, \operatorname{Fo}) \end{bmatrix} \right\} = R_0 h(\operatorname{Fo}) \zeta(\operatorname{Fo}), \operatorname{Fo} > 0; \\ \begin{bmatrix} A_1(p_1, 0) \\ \dots \\ A_n(p_n, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, воспользовавшись математическим аппаратом псевдообратных матриц [17], преобразуем ее к следующему виду:

$$\frac{d}{d\operatorname{Fo}} \begin{bmatrix} A_1(p_1, \operatorname{Fo}) \\ \dots \\ A_n(p_n, \operatorname{Fo}) \end{bmatrix} + p_n^2 a_n^2 \begin{bmatrix} A_1(p_1, \operatorname{Fo}) \\ \dots \\ A_n(p_n, \operatorname{Fo}) \end{bmatrix} =$$

$$= R_0 h(\text{Fo}) \zeta(\text{Fo}) \left[\sum_{k=1}^n |\omega_k(p_k, \text{Fo})|^2 \right]^{-1} \begin{bmatrix} \overline{\omega_1(p_1, \text{Fo})} \\ \dots \\ \overline{\omega_n(p_n, \text{Fo})} \end{bmatrix}, \text{Fo} > 0;$$

$$\begin{bmatrix} A_1(p_1, 0) \\ \dots \\ A_n(p_n, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\overline{\omega_k(p_k, \text{Fo})}$ — комплексно-сопряженная по отношению к $\omega_k(p_k, \text{Fo})$ функция.

Таким образом, при любом $k \in \{1, n\}$ имеем

$$A_k(p_k, \text{Fo}) = R_0 \int_0^{\text{Fo}} \left[\sum_{k=1}^n |\omega_k(p_k, \tau)|^2 \right]^{-1} \overline{\omega_k(p_k, \tau)} \times \\ \times h(\tau) \zeta(\tau) \exp \{ -p_n^2 a_n^2 (\text{Fo} - \tau) \} d\tau$$

и с учетом равенства (30) решение исходной задачи (1)–(7) в изображениях (28) сингулярного интегрального преобразования (27) можно представить в виде

$$u(p, \text{Fo}) = R_0 \int_0^{\text{Fo}} \sum_{k=1}^n \text{Re} \left\{ \omega_k(p_k, \text{Fo}) \overline{\omega_k(p_k, \tau)} \right\} \times \\ \times \left[\sum_{k=1}^n |\omega_k(p_k, \tau)|^2 \right]^{-1} h(\tau) \zeta(\tau) \exp \{ -p_n^2 a_n^2 (\text{Fo} - \tau) \} d\tau,$$

где согласно равенствам (29) при любом $k \in \{1, n\}$

$$|\omega_k(p_k, \tau)|^2 = \sum_{j=1}^2 C_{jk}^2(p_k, \tau);$$

$$\text{Re} \left\{ \omega_k(p_k, \text{Fo}) \overline{\omega_k(p_k, \tau)} \right\} = \sum_{j=1}^2 C_{jk}(p_k, \text{Fo}) C_{jk}(p_k, \tau),$$

а функции $\{C_{1k}, C_{2k}\}_{k=1}^n$ определяются равенствами (20).

Для завершения проведенных исследований достаточно воспользоваться формулой обращения из сингулярного интегрального преобразования (27)

$$\Theta(\rho, \text{Fo}) = V^{-1}[u(p, \text{Fo})], \rho \geq R_0, \text{Fo} \geq 0,$$

где при каждом фиксированном значении $\text{Fo} \geq 0$ равенство понимается в смысле стандартной нормы пространства $L^2[R_0, +\infty)$.

Выводы. 1. При $a_k^2 = 1 = \Lambda_k$, $k \in \{1, n\}$, из сингулярного интегрального преобразования (27) может быть получено обобщенное интегральное преобразование Вебера [12], а при $a_k^2 = 1 = \Lambda_k$, $k \in \{1, n\}$, и $V_i = \infty$, что соответствует наличию в задаче (1)–(7) граничного условия $\Theta(R_0, F_0) = \zeta(F_0)$, — известное интегральное преобразование Вебера [1, 14, 15]. Поэтому сингулярное интегральное преобразование (27) можно рассматривать как обобщение интегрального преобразования Вебера для математической модели (1)–(7) процесса формирования температурного поля в неограниченном твердом теле, содержащем цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности.

2. Разработанный аналитический метод решения задачи нестационарной теплопроводности для твердого изотропного тела с цилиндрическим каналом, заполненным высокотемпературной внешней средой и обладающим многослойным покрытием, может быть использован при математическом моделировании процессов теплопереноса в режимах нагрева, сопровождаемых временным изменением условий теплообмена с внешней средой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
3. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
4. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 2. – С. 171–195.
5. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
6. Пудовкин М. А., Волков И. К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1978. – 188 с.
7. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
8. Ройзен Л. И. Приближенный метод исследования задач теплопроводности многослойных тел // Теплофизика высоких температур. – 1981. – Т. 19, № 4. – С. 821–831.
9. Кудин В. А. Аналитические методы решения краевых задач для многослойных конструкций (Обзор) // Известия РАН. Энергетика. – 1999. – № 5. – С. 86–106.
10. Формалев В. Ф., Колесник С. А., Миканев С. В. Моделирование теплового состояния композиционных материалов // Теплофизика высоких температур. – 2003. – Т. 41, № 6. – С. 935–941.
11. Аттетков А. В., Волков И. К. Аналитический метод решения задач теплопроводности для полупространства с покрытием в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2000. – № 1. – С. 18–28.

12. Аттетков А. В., Волков И. К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической полостью // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Машиностроение". – 1999. – № 1. – С. 49–56.
13. Аттетков А. В., Волков И. К. Аналитический метод решения задачи нестационарной теплопроводности для тела с двухслойным цилиндрическим каналом // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Машиностроение". – 2001. – № 1. – С. 3–14.
14. Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. – 228 с.
15. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
16. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.
17. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М. : Наука, 1977. – 224 с.

Статья поступила в редакцию 16.01.2006

Александр Владимирович Аттетков родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э.Баумана в 1979 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э.Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор около 100 научных работ в области физики горения и взрыва, химической физики и математического моделирования.

A.V. Attetkov (b. 1955) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1979. Ph. D. (Eng.), senior researcher, ass. professor of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 publications in the field of physics of combustion and explosion, chemical physics and mathematical simulation.

Игорь Куприянович Волков родился в 1946 г., окончил Казанский государственный университет в 1970 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э.Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 100 научных работ в области математической физики, математического моделирования и математической генетики.

I.V. Volkov (b. 1946) graduated from the Kazan State University in 1970. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of "Mathematical Simulation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Winner of the RF Government Prize for Science and Technology. Author of more than 100 publications in the field of mathematical physics, mathematical simulation and mathematical genetics.

Николай Сергеевич Беляков родился в 1984 г., студент кафедры "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э.Баумана. Специализируется в области математического моделирования.

N.S. Belyakov (b. 1984) studies in "Applied Mathematics" Department of Bauman Moscow State Technical University, specializes in the field of mathematical simulation.