

ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА ПО ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассмотрено движение космического летательного аппарата с солнечным парусом по геоцентрической орбите в центральном гравитационном поле с учетом упругости отражающей поверхности. Решена связанная задача упругости и баллистики для крупногабаритной двухлопастной конструкции солнечного паруса, лопасти которой расположены в одной плоскости и вдоль одной оси. Управление рассматриваемой системой на орбите осуществляется по “закону с половинной угловой скоростью”. Показано влияние упругих деформаций конструкции паруса на траекторию движения космического аппарата.

На любую механическую систему, движущуюся в гравитационном поле Земли, оказывается воздействие со стороны этого поля. Движение упругой системы в центральном гравитационном поле описано в работе [1]. В связи с деформацией упругой конструкции, обусловленной наличием гравитационного поля, возникает ряд вопросов, связанных с тем, на сколько существенно данное воздействие может изменить параметры орбиты космического аппарата с солнечным парусом. Цель настоящей работы — оценка изменения параметров орбиты в зависимости от жесткости конструкции солнечного паруса.

На движение космического аппарата (КА) с солнечным парусом большое влияние оказывает закон управления. Одним из таких законов, рекомендуемых для изменения геоцентрической орбиты, является закон управления “с половинной угловой скоростью”, впервые предложенный Н. Сэндсом [2] (рис. 1). В этом случае принимается, что парус имеет отражающую поверхность с обеих сторон, а управление происходит по закону

$$\theta_u = \frac{\pi}{2} - \frac{\nu}{2}.$$

Обычно деформации конструкции КА, движущегося по орбите, связанные с гравитационными воздействиями, являются незначительными. Однако конструкция КА с солнечным парусом является крупногабаритной и воздействие на нее периодической силы, обусловленной гравитационным полем, оказывается важным для расчета орбитальных перелетов.

Рассмотрим модельную задачу полета КА с упругим солнечным парусом по геоцентрической орбите. Модель, показанная на рис. 2,

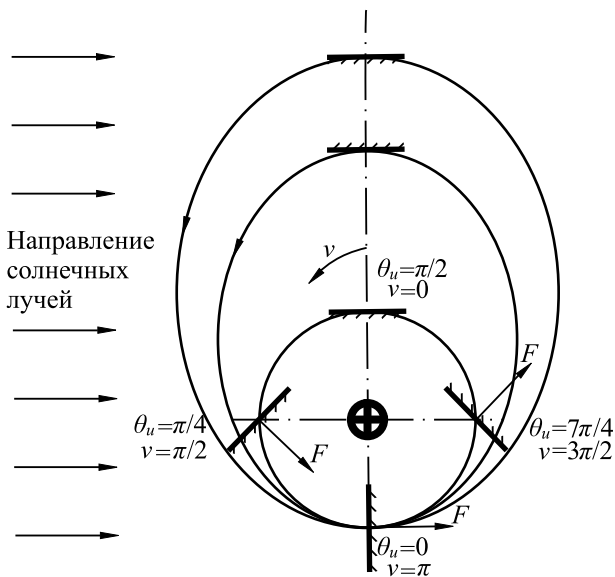


Рис. 1. Схема управления КА с солнечным парусом при геоцентрическом перелете

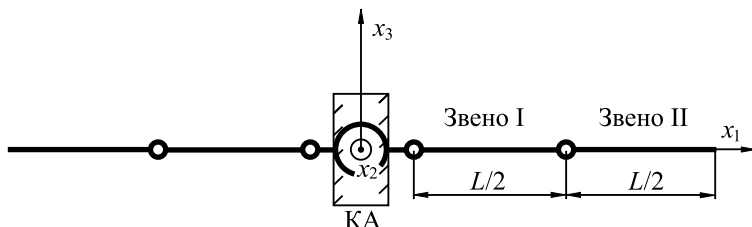


Рис. 2. Упругая модель КА

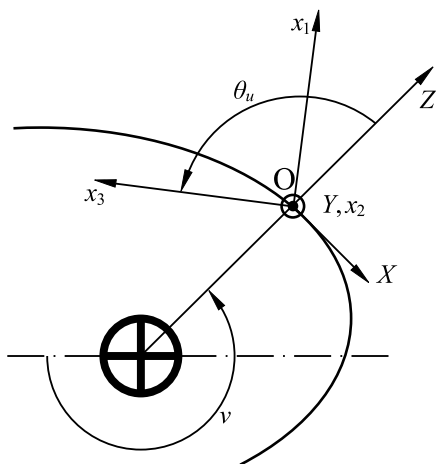


Рис. 3. Ориентация средней системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной $OXYZ$

состоит из трех основных частей: центральной, где расположена полезная нагрузка, и двух соединенных с ней лопастей, размещенных в одной плоскости. Упругая модель каждой лопасти представлена механической системой в виде двухзвенного механизма, с упруговязкими шарнирами.

Ориентация осей координат КА с солнечным парусом относительно Земли показана на рис. 3. Здесь $OXYZ$ – орбитальная система координат, ось OZ которой направлена по радиусу-вектору, проведенному из притягивающего центра к КА;

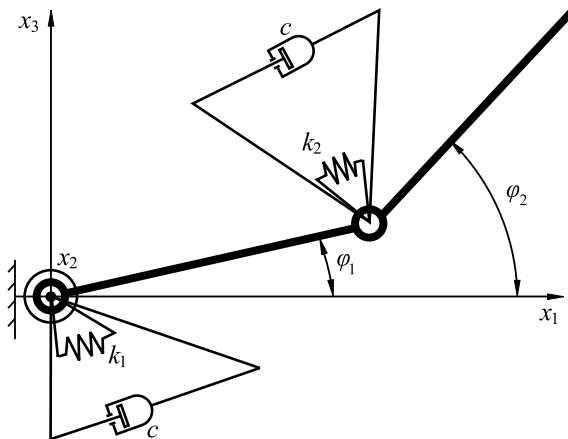


Рис. 4. Двухзвенная модель консольной лопасти

оси OY и OX — соответственно по бинормали к орбите и по ее трансверсали в сторону движения центра масс КА. На рис. 3 ось OY направлена из плоскости чертежа. Система $Ox_1x_2x_3$ — средняя система координат, она связана с упругим телом (см. рис. 2). На рис. 2 и 3 ось Ox_2 направлена из плоскости чертежа.

Рассмотрим кососимметричные формы колебаний паруса. Двухзвенная модель одной лопасти представлена на рис. 4. Уравнения движения для двухзвенной модели, приведенной на рис. 2 и 4, являются уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0,$$

где D — диссипативная функция, записываемая в виде

$$D = \frac{c\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{c(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2}{2}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия упругого тела в соответствии с методикой, изложенной в работе [1], входящая в уравнение Лагранжа для двухзвенника, определяется из уравнения

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3)$$

где $T_1 = \frac{m_l V_0^2}{2}$; $T_2 = \frac{\omega \cdot I \omega}{2}$.

Тензор инерции лопасти паруса

$$I = \begin{bmatrix} I_{x1} & -I_{x1x2} & -I_{x1x3} \\ -I_{x1x2} & I_{x2} & -I_{x2x3} \\ -I_{x1x3} & -I_{x2x3} & I_{x3} \end{bmatrix};$$

$$I = I_1 + I_2,$$

где I_1 , I_2 – тензоры инерции первого и второго звена соответственно;

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_{x_1}^{(1)} & -I_{x_1x_2}^{(1)} & -I_{x_1x_3}^{(1)} \\ -I_{x_1x_2}^{(1)} & I_{x_2}^{(1)} & -I_{x_2x_3}^{(1)} \\ -I_{x_1x_3}^{(1)} & -I_{x_2x_3}^{(1)} & I_{x_3}^{(1)} \end{bmatrix};$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{x_1}^{(2)} & -I_{x_1x_2}^{(2)} & -I_{x_1x_3}^{(2)} \\ -I_{x_1x_2}^{(2)} & I_{x_2}^{(2)} & -I_{x_2x_3}^{(2)} \\ -I_{x_1x_3}^{(2)} & -I_{x_2x_3}^{(2)} & I_{x_3}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Текущие координаты для первого звена:

$$x_{11} = x_1 - x_1 \frac{\varphi_1^2}{2};$$

$$x_{13} = x_1 \varphi_1,$$

второго звена –

$$x_{21} = l \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) + x_1 \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right);$$

$$x_{23} = l \varphi_1 + x_1 \varphi_2.$$

Пределы интегрирования для первого звена следующие:

$$z_{11} = l - l \frac{\varphi_1^2}{2}; \quad z_{12} = l \varphi_1.$$

Компоненты тензора инерции I_1 для первого звена имеют вид

$$I_{x_1}^{(1)} = b \int_0^{z_{11}} \int_0^{z_{12}} x_{13}^2 dx_3 dx_1; \quad I_{x_2}^{(1)} = b \int_0^{z_{11}} \int_0^{z_{12}} (x_{11}^2 + x_{13}^2) dx_3 dx_1;$$

$$I_{x_3}^{(1)} = b \int_0^{z_{11}} \int_0^{z_{12}} x_{11}^2 dx_3 dx_1;$$

$$I_{x_1x_2}^{(1)} = 0; \quad I_{x_1x_3}^{(1)} = b \int_0^{z_{11}} \int_0^{z_{12}} x_{11} x_{13} dx_3 dx_1; \quad I_{x_2x_3}^{(1)} = 0.$$

Пределы интегрирования для второго звена следующие:

$$z_{21} = l \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) + l \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right); \quad z_{22} = l(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Компоненты тензора инерции I_2 для второго звена имеют вид

$$I_{x_1}^{(2)} = b \int_0^{z_{21}} \int_0^{z_{22}} x_{23}^2 dx_3 dx_1; \quad I_{x_2}^{(1)} = b \int_0^{z_{21}} \int_0^{z_{22}} (x_{21}^2 + x_{23}^2) dx_3 dx_1;$$

$$I_{x_3}^{(2)} = b \int_0^{z_{21}} \int_0^{z_{22}} x_{21}^2 dx_3 dx_1;$$

$$I_{x_1 x_2}^{(2)} = 0; \quad I_{x_1 x_3}^{(2)} = b \int_0^{z_{21}} \int_0^{z_{22}} x_{21} x_{23} dx_3 dx_1; \quad I_{x_1 x_2}^{(2)} = 0;$$

$$T_3 = \frac{ml^3}{2} \left(\frac{4\dot{\varphi}_1^2}{3} + \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_2^2}{3} \right).$$

Потенциальную энергию, руководствуясь работой [1], можно записать в виде суммы

$$P = P_1 + P_2, \quad (4)$$

где P_1 — энергия упругих деформаций, P_2 — энергия, обусловленная наличием сил гравитации:

$$P_1 = \frac{k_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2};$$

$$P_2 = -\frac{\mu m_l}{r} - \frac{\mu}{2r^3} (I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3}) + \frac{3\mu}{2r^3} (\gamma I \gamma).$$

В уравнение для потенциальной энергии P_2 входит радиус-вектор, связывающий КА с притягивающим центром планеты (в данном случае Земли). При изменении параметров орбиты солнечным парусом величина r меняется с течением времени.

В уравнения движения солнечного паруса, полученные в работе [2], входит функция ν — угол, характеризующий ориентацию плоскости солнечного паруса относительно направления на Солнце, который отсчитывается от апоцентра планеты в направлении движения КА. При своем движении КА половину времени находится в тени планеты. Функция тени $f_t = 1$, когда КА находится на освещенной части траектории и $f_t = 0$, когда он попадает в тень. Функция f_t раскладывается в ряд Фурье:

$$f_t = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{2 \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)}{j\pi} \cos\left(j\left(\nu + \frac{3\pi}{2}\right)\right),$$

где принимается $n = 11$.

Подставив f_t в уравнения движения солнечного паруса, полученные в работе [2], получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= -\frac{a_0 \cdot f_t}{2} \left| \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \right| \sin(\nu); \\ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\nu}{dt} + r \frac{d^2\nu}{dt^2} &= a_0 f_t \left| \sin^3\left(\frac{\nu}{2}\right) \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (5) справедлива для абсолютно жесткого паруса. Если в расчетах учитывается упругость конструкции солнечного паруса, то угол между желаемым и истинным направлениями на Солнце зависит от жесткости конструкции, т.е. от углов φ_1 и φ_2 . В данном случае необходимо рассматривать связанную задачу баллистики и упругости, решая систему (5) дифференциальных уравнений движения солнечного паруса на геоцентрической орбите, полученных в работе [2], совместно с уравнениями Лагранжа (1) для двухзвенника. Такая система имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d^2r(t)}{dt^2} - r \left(\frac{d\nu(t)}{dt}\right)^2 + \frac{\mu}{r(t)^2} = \\ &= -\frac{a_0 f_t}{2} \left(\left| \sin\left(\frac{\nu(t) + \varphi_1(t)}{2}\right) \right| \cdot \sin(\nu(t) + \varphi_1(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \left| \sin\left(\frac{\nu(t) + \varphi_2(t)}{2}\right) \right| \cdot \sin(\nu(t) + \varphi_2(t)) \right); \\ &2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\nu(t)}{dt} + r(t) \frac{d^2\nu(t)}{dt^2} = \\ &a_0 f_t \left(\left| \sin^3\left(\frac{\nu(t) + \varphi_1(t)}{2}\right) \right| + \left| \sin^3\left(\frac{\nu(t) + \varphi_2(t)}{2}\right) \right| \right); \\ &\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \dot{\varphi}_1(t)} \right) - \frac{\partial T(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \varphi_1(t)} + \\ &\quad + \frac{\partial P(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), r(t))}{\partial \varphi_1(t)} + \frac{\partial D(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \dot{\varphi}_1(t)} = 0; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \dot{\varphi}_2(t)} \right) - \frac{\partial T(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \varphi_2(t)} + \\ + \frac{\partial P(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), r(t))}{\partial \varphi_2(t)} + \frac{\partial D(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial \dot{\varphi}_2(t)} = 0,$$

где выражения для T , P , D вычисляются по формулам (3), (4), (2) соответственно.

Система дифференциальных уравнений (6) была решена в настоящей работе численно. Механические параметры модели, рассмотренной в исследовании, следующие. Длина каждой лопасти $l = 500$ м, ширина лопасти $b = 1$ м. Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^9$ Па. Коэффициенты жесткости, входящие в уравнение для потенциальной энергии упругих деформаций, $k_1 = 2,635 \cdot 10^6$ и $k_2 = 4,737 \cdot 10^4$ получены по методике, описанной в работе [3]. Коэффициент демпфирования, входящий в уравнение для диссипативной функции, $c = 10^3$. Масса полезной нагрузки КА $m_{ka} = 1000$ кг. Масса лопасти паруса $m_l = 48$ кг, площадь паруса $S = 1000$ м². Парусность $\sigma = \frac{S}{m_{ka} + 2m_l} \approx 10^3 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$.

Опорная орбита принята круговой с радиусом $R_0 = 7200$ км. Приняты следующие начальные условия: $\varphi_1(0) = 0,1$ рад, $\varphi_2(0) = 0,1$ рад, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ рад/с, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$ рад/с, $r(0) = R_0$, $\dot{r}(0) = 0$ м/с, $\dot{\nu}(0) = \frac{V_0}{R_0}$, где $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$.

В уравнениях (6) не было учтено влияние светового давления на деформацию конструкции солнечного паруса. Это допущение объясняется тем, что в рассматриваемом случае величина гравитационного воздействия превосходит силу светового давления на шесть порядков.

Найденные из решения системы (5) зависимости $r(t)$ (радиуса-вектора абсолютно жесткого паруса) и $\tilde{r}(t)$ (радиуса-вектора упругого паруса) получены для трех витков орбиты. Введем замену переменных: $r(t)^* = r(t) - R_0$, $\tilde{r}(t)^* = \tilde{r}(t) - R_0$. Зависимости $r(t)^*$ и $\tilde{r}(t)^*$ показаны на рис. 5. Величина $\Delta r = \tilde{r} - r$ возрастает с увеличением числа витков КА вокруг притягивающего центра. Очевидно, что даже малые отличия упругой модели от абсолютно жесткой при продолжительном полете могут вызвать существенную ошибку значений радиуса-вектора, как показано на рис. 6.

Зависимости интегралов энергии $h^* = h + h_0$ и $\tilde{h}^* = \tilde{h} + h_0$ от времени для четырех витков траектории для исследуемой модели показаны на рис. 7, где $h_0 = 5,53605 \cdot 10^7$, \tilde{h} — интеграл энергии упругого паруса,

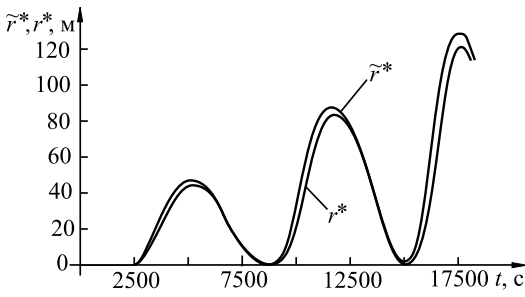


Рис. 5. Радиус-вектор $r(t)^*$ КА с солнечным парусом и радиус-вектор $\tilde{r}(t)^*$ того же КА при учете упругости конструкции зеркала паруса

Видно, что зависимость величины Δh от размеров лопасти паруса — нелинейна. Для малых размеров лопастей паруса величина Δh чрезвычайно мала, но при увеличении размеров лопастей влияние упругости на рабочие характеристики паруса становится существенным.

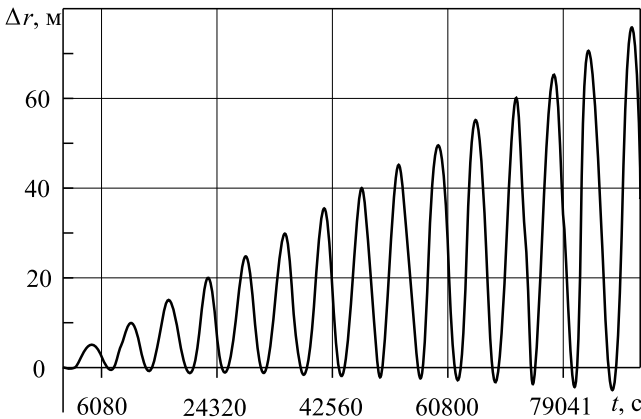


Рис. 6. Разница между радиусами-векторами КА с жестким и с упругим парусами

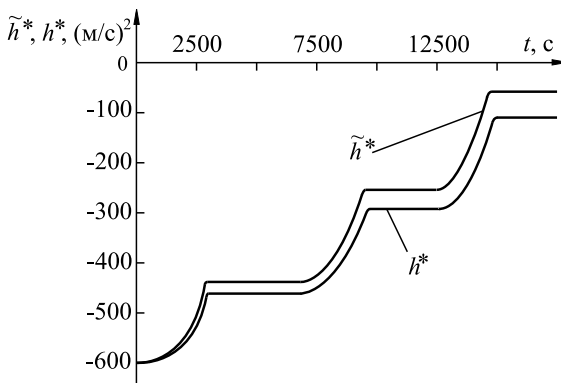


Рис. 7. Зависимость интегралов энергии h^* и \tilde{h}^* от времени

h — интеграл энергии абсолютно жесткого паруса. Разность между ними $\Delta h = \tilde{h} - h$. Из рис. 7 видно, что величина Δh возрастает с увеличением числа рассматриваемых витков.

На рис. 8 показана зависимость разности интегралов энергии $\Delta h = \tilde{h} - h$, полученных для пяти витков орбиты, для разных длин лопастей,

Выводы. 1. Рассмотрена связанная задача баллистики КА с солнечным парусом в центральном гравитационном поле с учетом упругости конструкции паруса.

2. Показано, что упругость солнечного паруса оказывает влияние на траекторию. В рассмотренном случае на пятнадцати витках траектории расхождение в расчете жесткого и упругого парусов составило 70 м.

3. Показано, что влияние упругости при расчете траектории становится существенным при больших размерах солнечного паруса.

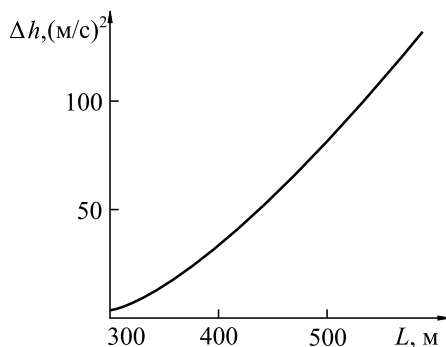


Рис. 8. Зависимость разности интегралов энергии Δh от длины лопасти паруса для пяти витков орбиты

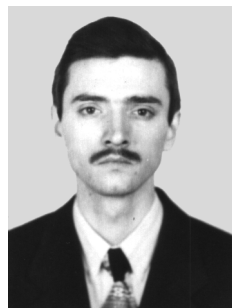
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а н и н ч у к Н. В., К а р п о в И. И. и др. Механика больших космических конструкций. – М.: Факториал, 1997.
2. S a n d s N. Escape from planetary gravitational fields by use of solar sail. ARS J 1961. – V. 31. – № 4. – P. 527–531.
3. А р и н ч е в С. В. Теория колебаний неконсервативных систем. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – С. 321–328, 332–336.

Статья поступила в редакцию 18.01.2005

Александр Сергеевич Попов родился в 1977 г., окончил в 2001 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ассистент кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области динамики и прочности космических летательных аппаратов.

A.S. Popov (b. 1977) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2001. Assistant of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializea in the field of dynamics and strength of spacecrafts.



Георгий Александрович Щеглов родился в 1972 г., окончил в 1996 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 21 научной работы в области динамики и прочности космических летательных аппаратов.

G.A. Shcheglov (b. 1972) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1996. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 21 publications in the field of dynamics and strength of spacecrafts.

