Александр Ефимович Белкин родился в 1951 г., окончил в 1974 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области расчетов на прочность, механики пневматических шин.

A.E. Belkin (b. 1951) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1974. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of pneumatic tires strength analysis and mechanics.

Олег Александрович Одинцов окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2003 г. Аспирант кафедры “Динамика и прочность машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Имеет две работы по численному решению контактных задач.

O.A. Odintsov graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2003. Post-graduate of “Dynamics and Strength of Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 2 publications in the field of numerical methods of solving of contact problems.

УДК 517.947.44

О. Н. Тушев, А. В. Березовский

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ К ВАРИАЦИЯМ ПАРАМЕТРОВ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКЦИИ

Рассмотрена задача определения функций параметрической чувствительности первого и второго порядков собственных значений и векторов на основе современных пакетов прикладных программ конечно-элементного моделирования. На основе обобщенной задачи на собственные значения получены простые с вычислительной точки зрения зависимости для нахождения функций чувствительности собственных значений. Для определения функций чувствительности собственных векторов используется разложение по ортогональному базису, что позволяет избежать решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка. Анализируется влияние близких частот на сходимость вычислительных процедур. Результаты иллюстрируются примером.

Современные средства конечно-элементного анализа дают возможность с высокой точностью и достоверностью вычислить различные характеристики разрабатываемой конструкции. Однако такой анализ крайне ограничен в определении путей модификации параметров конструкции в целях совершенствования рассматриваемых характеристик. Известные конечно-элементные пакеты программ имеют недостаточно широкие возможности в этой области, зачастую наиболее приемлемый результат получается при многократном переборе конструктивных параметров. Поэтому расширение возможностей конечно-элементных пакетов программ по расчету механики конструкции на основе теории чувствительности является весьма обоснованным.

В настоящее время аппарат теории чувствительности в основном сложился и широко опубликован. Это, безусловно, относится и к задаче чувствительности собственных значений и векторов. Не задаваясь целью составить подробный обзор опубликованных работ, укажем только некоторые монографии и учебники [1–5]. Особо следует отметить две монографии [1, 2], отличающиеся общностью и систематичностью изложения, причем монография [2] посвящена задачам проектирования конструкций и основывается на конечно-элементных моделях. Несмотря на обилие результатов, определенная их часть требует корректировки для получения удобной и рациональной в вычислительном отношении методики и алгоритма. Например в работе [1], задача чувствительности рассматривается на основе соотношения $(A - E\lambda)X = 0$, где A — несимметричная матрица, что крайне неудобно для задач механики консервативных систем. В монографии [2] задача решена на основе обобщенной задачи на собственные значения. Но для определения функций чувствительности собственных векторов получены системы линейных алгебраических уравнений, порядок которых в реальных задачах оказывается весьма высоким. Хотя этот путь решения реализуем, задача может быть существенно упрощена, если воспользоваться разложением функций чувствительности по ортогональному базису собственных векторов.

Цель настоящей работы — объединение рациональных сторон существующих подходов для получения эффективной методики и алгоритма параметрического анализа собственных значений и векторов. Программная реализация этого алгоритма должна служить дополнением к существующим универсальным пакетам программ.

Конечно-элементная аппроксимация позволяет свести задачу определения частот и форм собственных колебаний упругих распределенных систем к матричной обобщенной задаче на собственные значения:

$$C(B)X_k = \lambda_k M(B)X_k, \tag{1}$$

где $C(B)$, $M(B)$ — глобальные матрицы жесткости и масс; $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\text{т}}$ — вектор параметров конструкции; X_k, λ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, — собственные векторы и собственные значения.

Будем считать, что $X_k \forall k$ ортонормированы следующим образом:

$$(X_s, MX_k) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = s; \\ 0 \text{ при } k \neq s, \end{cases} \tag{2}$$

тогда

$$(X_s, CX_k) = \begin{cases} \lambda_k \text{ при } k = s; \\ 0 \text{ при } k \neq s. \end{cases} \tag{3}$$

Вектор B представляет собой набор параметров элементов, из которых формируется конечно-элементная модель (для балочных элементов — это характеристики сечения, свойства материала, размер элемента; для оболочечных — толщина и т.д.). В качестве предварительной операции необходимо определить матрицы чувствительности массы и жесткости типовых конечных элементов, которые используются при формировании расчетной модели. Эта операция может быть проведена аналитически или численно. Из полученных матриц составляются соответствующие глобальные матрицы:

$$\frac{\partial C}{\partial b_i}; \quad \frac{\partial M}{\partial b_i}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial b_i \partial b_j}; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j}.$$

Будем считать, что глобальные матрицы масс и жесткости, M и C, симметричны, положительно определены и дифференцируемы по параметрам. Таким образом, собственные значения $X_k \forall k$ являются простыми и их, как и собственные векторы, можно представить в виде разложений в ряд Тейлора:

$$\begin{gathered} \lambda_k(B + \Delta B) = \lambda_k(B) + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \nu_{ij}^{(k)} \Delta b_i \Delta b_j + \ldots; \\ X_k(B + \Delta B) = X_k(B) + \sum_{i=1}^{m} Q_i^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} R_{ij}^{(k)} \Delta b_i \Delta b_k j + \ldots, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\lambda_k(B)$, $X_k(B)$ — номинальные (базовые) решения; $\Delta B = (\Delta b_1, \Delta b_2, \ldots, \Delta b_m)^{\text{т}}$ — вектор конечных вариаций параметров;

$$u_i^{(k)} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial b_i}; \quad Q_i^{(k)} = \frac{\partial X_k}{\partial b_i}, \quad \nu_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial b_i \partial b_j}, \quad R_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial b_i \partial b_j} \ -$$

скалярные и векторные функции чувствительности собственных значений и векторов первого и второго порядков.

Продифференцируем уравнение (1) по b_i и умножим полученное соотношение скалярно на собственный вектор X_k:

$$u_i^{(k)}(MX_k,\, X_k) = \left(\left(\frac{\partial C}{\partial b_i} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_i}\right)X_k,\, X_k\right) + ((C - \lambda_k M)Q_i^{(k)},\, X_k). \tag{5}$$

Поскольку второе слагаемое в правой части выражения (5) равно нулю, получим

$$u_i^{(k)} = \left(\left(\frac{\partial C}{\partial B_i} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_i}\right)X_k,\, X_k\right).$$

Для нахождения функции чувствительности собственного вектора заменим в соотношении (5) второй сомножитель во всех произведениях X_k на X_s ($s \neq k$):

$$((C - \lambda_k M)Q_i^{(k)},\, X_s) = -\left(\left(\frac{\partial C}{\partial b_i} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_i}\right)X_k,\, X_s\right) + u_i^{(k)}(MX_k,\, X_s). \tag{6}$$

Преобразовав соотношение (6) с учетом того, что $CX_s = \lambda_s MX_s$, получим в итоге неполную систему уравнений для определения элементов вектора чувствительности первого порядка $Q_i^{(k)}$:

$$(Q_i^{(k)},\, MX_s) = \gamma_{is}^{(k)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n; \quad s \neq k), \tag{7}$$

где

$$\gamma_{is}^{(k)} = \left[\left(\left(\frac{\partial C}{\partial b_i} - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_i}\right)X_k,\, X)_s\right)\right] \Big/ (\lambda_k - \lambda_s).$$

Для получения недостающего уравнения при $s = k$, продифференцируем условие нормирования (2) по b_i. После несложных преобразований имеем

$$(Q_i^{(k)},\, MX_k) = \gamma_{ik}^{(k)}, \tag{8}$$

где

$$\gamma_{ik}^{(k)} = -\frac{1}{2}\left(X_k,\, \frac{\partial M}{\partial b_i}X_k\right).$$

Выражения (7) и (8) представляют собой полную систему линейных алгебраических уравнений, как правило высокого порядка, с целиком заполненной матрицей коэффициентов. Задача существенно упрощается, если искать вектор чувствительности $Q_i^{(k)}$ в виде разложения по ортогональному базису $X_k \forall k$:

$$Q_i^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} \varphi_{ip}^{(k)} X_p, \tag{9}$$

где $\varphi_{ip}^{(k)}$ — скалярные коэффициенты.

После умножения выражения (9) скалярно на $MX_s \forall s$, получим

$$\varphi_{ip}^{(k)} = \gamma_{ip}^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

В практических задачах, как правило, требуется знание относительно небольшого количества низших собственных частот и векторов, для которых сумма в формуле (9) быстро сходится.

Схема получения функций чувствительности второго порядка аналогична изложенной. Условие (1) дифференцируется по параметрам b_i и b_j, полученное соотношение скалярно умножается на собственный вектор X_k. Затем после громоздких, но простых преобразований функция чувствительности собственного значения λ_k второго порядка $\nu_{ij}^{(k)}$ выражается в следующем виде:

$$\nu_{ij}^{(k)} = (T_{ij}^{(k)} X_k,\, X_k) + (L_i^{(k)} Q_j^{(k)},\, X_k) + (L_j^{(k)} Q_i^{(k)},\, X_k), \qquad (10)$$

где

$$T_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2 C}{\partial b_i \partial b_j} - u_i^{(k)} \frac{\partial M}{\partial b_j} - u_j^{(k)} \frac{\partial M}{\partial b_i} - \lambda_k \frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j},$$

$$L_i^{(k)} = \frac{\partial C}{\partial b_i} - u_i^{(k)} M - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_i},$$

$$L_j^{(k)} = \frac{\partial C}{\partial b_j} - u_j^{(k)} M - \lambda_k \frac{\partial M}{\partial b_j}.$$

Преобразуем соотношения (9) к более удобной и рациональной в вычислительном отношении форме. Для этого необходимо продифференцировать условие нормирования (2) и следствие (3) по b_i, после чего подставить в полученные соотношения разложение (9). В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}
\left(X_s, \frac{\partial M}{\partial b_i} X_k\right) &= -\gamma_{ik}^{(s)} - \gamma_{is}^{(k)};\\
\left(X_k, \frac{\partial C}{\partial b_i} X_k\right) &= -u_i^{(k)} - 2\lambda_k \gamma_{ik}^{(k)};\\
\left(X_s, \frac{\partial M}{\partial b_i} X_k\right) &= -\lambda_k \gamma_{ik}^{(s)} - \lambda_s \gamma_{is}^{(k)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Подставляя соотношения (9) и (11) в выражение (10), получим $\nu_{ij}^{(k)}$ в следующем виде:

$$\nu_{ij}^{(k)} = \left(\left(\frac{\partial^2 C}{\partial b_i \partial b_j} - \lambda_k \frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j}\right) X_k,\, X_k\right) +$$

$$+ 2u_i^{(k)} \gamma_{jk}^{(k)} + 2u_j^{(k)} \gamma_{ik}^{(k)} + 2 \sum_{s=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_s) \gamma_{is}^{(k)} \gamma_{js}^{(k)}. \qquad (12)$$

Для определения вектора чувствительности $R_{ij}^{(k)}$ вторую производную уравнения (1) по b_i, b_j необходимо скалярно умножить на собственный вектор X_s $(s \neq k)$. Затем после преобразований, аналогичных производимым при нахождении $Q_i^{(k)}$, получим незамкнутую систему уравнений:

$$(R_{ij}^{(k)},\, MX_s) = \chi_{ijs}^{(k)} \quad (\forall s \neq k), \tag{13}$$

где

$$\chi_{ijs}^{(k)} = [(T_{ij}^{(k)}X_k,\, X_s) + (L_i^{(k)}Q_j^{(k)},\, X_s) + (L_j^{(k)}Q_i^{(k)},\, X_s)]\big/(\lambda_k - \lambda_s). \tag{14}$$

Подстановка формул (9) и (11) в соотношение (14) приводит к следующему результату:

$$\chi_{ijs}^{(k)} = \Bigg[\left(\left(\frac{\partial^2 C}{\partial b_i \partial b_j} - \lambda_k \frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j}\right) X_k,\, X_s\right) +$$

$$+ u_i^{(5)}\gamma_{j5}^{(k)} + u_j^{(k)}\gamma_{jk}^{(5)} + u_j^{(5)}\gamma_{i5}^{(k)} + u_j^{(k)}\gamma_{ik}^{(5)} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n}(-\lambda_5\gamma_{j5}^{(p)} - \lambda_p\gamma_{jp}^{(5)} + \lambda_k\gamma_{j5}^{(p)} + \lambda_k\gamma_{jp}^{(5)})\gamma_{ip}^{(k)} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n}(-\lambda_p\gamma_{ip}^{(s)} - \lambda_s\gamma_{is}^{(p)} + \lambda_k\gamma_{ip}^{(s)} + \lambda_k\gamma_{is}^{(p)})\gamma_{jp}^{(k)}\Bigg]\Big/(\lambda_k - \lambda_5).$$

Для получения недостающего уравнения при $s = k$ опять используем условия нормирования, продифференцировав его по параметрам b_i и b_j:

$$(R_{ij}^{(k)}, MX_k) + \left(Q_i^{(k)}, \frac{\partial M}{\partial b_j} X_k\right) + (Q_i^{(k)}, MQ_j^{(k)}) + \left(Q_j^{(k)}, \frac{\partial M}{\partial b_i} X_k\right) +$$

$$+ \left(X_k, \frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j} X_k\right) + \left(X_k, \frac{\partial M}{\partial b_i} Q_j^{(k)}\right) + (Q_j^{(k)}, MQ_i^{(k)}) +$$

$$+ \left(X_k, \frac{\partial M}{\partial b_j} Q_j^{(k)}\right) + (X_k, MR_{ij}^{(k)}) = 0.$$

Проделав необходимые подстановки и преобразования, получим

$$(R_{ij}^{(k)}, MX_k) = \chi_{ijk}^{(k)}, \tag{15}$$

где

$$\chi_{ijk}^{(k)} = \left(\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M}{\partial b_i \partial b_j}\right) X_k, X_k\right) + \sum_{s=1}^{n}(\gamma_{jk}^{(s)}\gamma_{is}^{(k)} + \gamma_{js}^{(k)}\gamma_{is}^{(k)} + \gamma_{ik}^{(s)}\gamma_{js}^{(k)}).$$

Уравнения (15) и (13) являются полной системой, решение которой также целесообразно представить в форме разложения по ортогональному базису:

$$R_{ij}^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} \psi_{ijp}^{(k)} X_p. \tag{16}$$

Умножение выражения (10) скалярно на $MX_s \forall s$ дает возможность определить все скалярные коэффициенты:

$$\psi_{ip}^{(k)} = \chi_{ip}^{(k)} \quad (p = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Условие сходимости (16) такое же, как и для разложения (9).

Согласно принятой постановке задачи, кратные собственные значения отсутствуют, что практически всегда имеет место в реальных конструкциях. Но при этом следует иметь в виду, что для ряда конструкций, например для некоторых типов крупногабаритных космических летательных аппаратов, спектр собственных частот в определенных диапазонах может оказаться достаточно плотным. Таким образом, появление близких собственных значений является вполне реальным, что может повлиять на сходимость разложений (9) и (16).

Не касаясь теоретических вопросов сходимости решений в окрестности кратных собственных значений, остановимся на аспектах практических вычислений. С этой позиции важно не попасть в область такой близости собственных значений, при которой происходит катастрофическая потеря точности. В конкретных задачах, рассматриваемых авторами, границы этой области не превышали $1\ldots2\,\%$ от кратного собственного значения (близкого к кратному). Если все же какие-то собственные значения оказались слишком близкими, можно предложить следующий простой прием. Необходимо задать небольшие вариации параметров модели ΔB, чтобы раздвинуть указанные собственные значения и выйти, таким образом, из критической области. Каким именно параметрам следует дать приращения можно определить по величинам функций чувствительности этих собственных значений. Такая операция с инженерной точки зрения вполне корректна по следующим причинам:

— небольшие изменения параметров практически всегда можно осуществить, оставаясь в пределах точности задания исходных данных расчетной модели;

— приближаться в определенной мере к опасной области в окрестности исходного вектора B можно из точки $B + \Delta B$ с помощью полученных разложений (4) по вариациям параметров. Далее предлагаемые рекомендации будут продемонстрированы на конкретном примере.

Разработанный аппарат был программно реализован в пакете Matlab как дополнение по параметрическому анализу к конечно-элементным пакетам. В качестве тестовой задачи использована модель

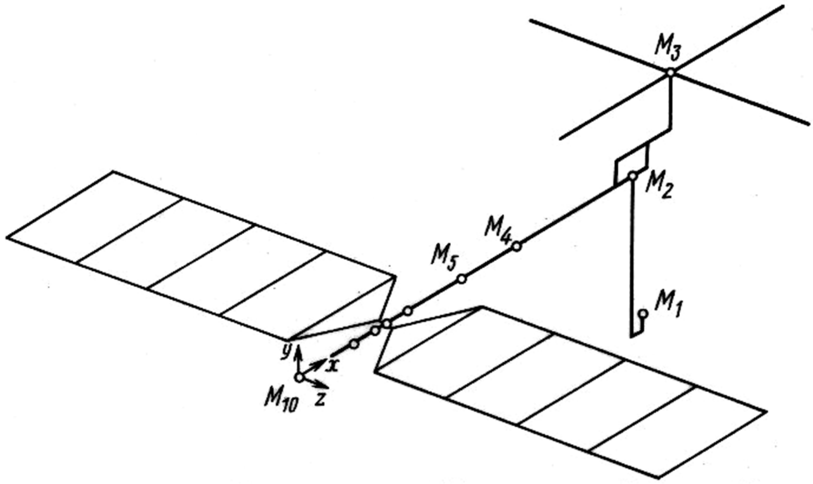

Рис. 1. Рис. 1. Конечно-элементная модель космического аппарата: —— — балочные элементы; ○ — сосредоточенные массы

реального космического летательного аппарата, состоящая из балочных элементов с упругими связями и сосредоточенными массами (см. рис. 1). Модель имеет 2478 степеней свободы и 139 параметров.

По всем параметрам были вычислены функции чувствительности первого и второго порядков для низших пяти тонов упругих колебаний модели. На рис. 2, *а* и *б* изображены безразмерные и нормированные относительно наибольших значений величины функций чувствительности ("столбики") первого порядка для собственных чисел (см. рис. 2, *а*) и норм собственных векторов (см. рис. 3, *б*) для группы наиболее влияющих параметров. Такие диаграммы удобно использовать для анализа иерархии влияния в первом приближении вариаций параметров на исследуемые динамические характеристики.

На рис. 3, *а* и *б* показана сходимость сумм в разложениях (9) и (16) для первых пяти тонов в зависимости от количества слагаемых. Для примера выбраны векторы чувствительности для наиболее влияющего параметра. По вертикальным осям отложены относительные ошибки следующего вида:

$$\Delta_{1k} = \frac{\|\tilde{Q}_h^{(k)} - Q_h^{(k)}\|}{\|\tilde{Q}_h^{(k)}\|}; \quad \Delta_{2k} = \frac{\|\tilde{R}_{hh}^{(k)} - R_{hh}^{(k)}\|}{\|\tilde{R}_{hh}^{(k)}\|},$$

где $\tilde{Q}_h^{(k)}$, $\tilde{R}_{hh}^{(k)}$ — точные значения функций чувствительности векторов; h — номер наиболее влияющего параметра.

Для всех других векторов чувствительности картины сходимости аналогичны.

На рис. 4 приведены оценки точности разложений (4) для рассматриваемого примера. При этом совместно варьировались два наиболее

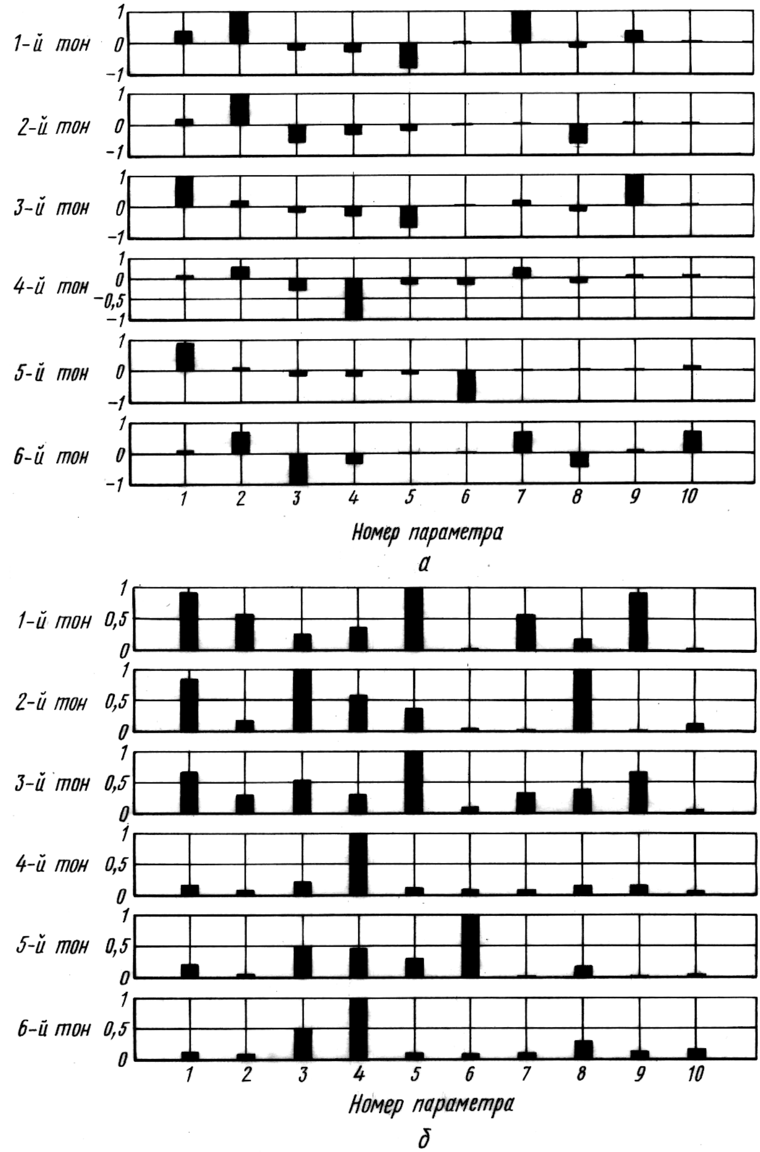

Рис. 2. Функции чувствительности первого порядка собственных чисел (*а*) и норм собственных векторов (*б*)

влияющих параметра. По горизонтальной оси отложена безразмерная вариация параметров (одинаковая для обоих).

По вертикальным осям располагаются относительные ошибки вида $\delta_k = \dfrac{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k}{\tilde{\lambda}_k}$, где $\tilde{\lambda}_k$ — точные значения собственного числа.

Штриховая кривая (см. рис. 4) соответствует линейному приближению, сплошная — квадратическому.

Из рис. 4 хорошо видно, что для рассматриваемой модели в диапазоне изменения параметров до 50 % с помощью функций чувстви-

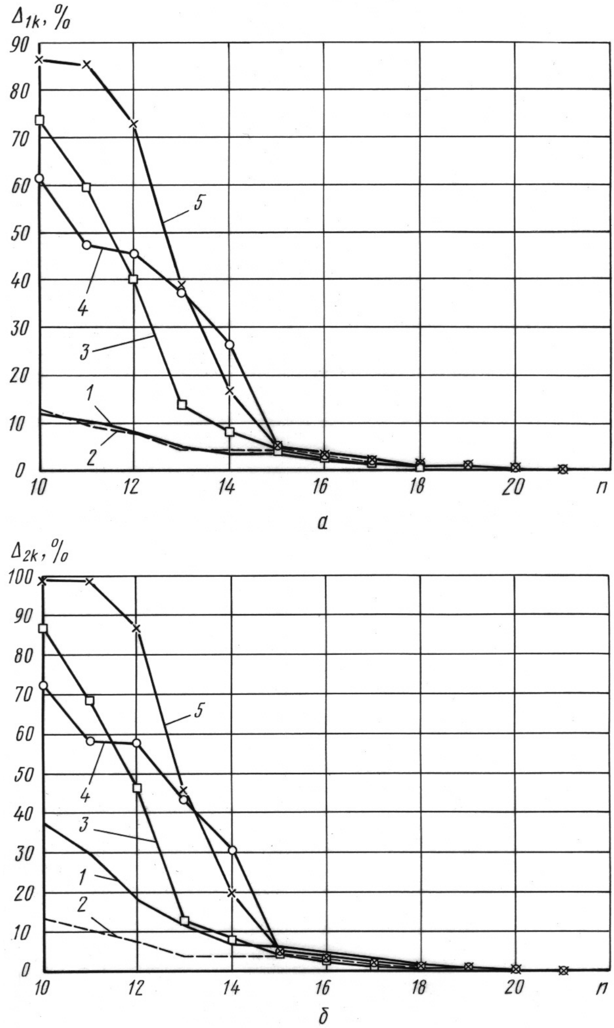

Рис. 3. Сходимость функций чувствительности собственных векторов первого (*а*) и второго (*б*) порядка

тельности можно вычислить динамические характеристики модели с хорошей точностью.

Рассмотренная модель для случая реальных параметров не имеет в спектре настолько близких частот, чтобы сходимость разложений (9) и (16) была нарушена. Для того чтобы проиллюстрировать сложность, связанную с появлением почти кратных собственных значений, часть параметров изменялась в соответствии с полученной иерархией их влияния таким образом, чтобы в результате происходило сближение определенных собственных значений. В данном случае этот эффект наблюдался для λ_7 и λ_8.

На рис. 5 изображена зависимость нормы вектора $Q_h^{(k)}$ от $\varepsilon_k = \dfrac{|\lambda_7 - \lambda_8|}{\lambda_8}$, где h — номер наиболее влияющего параметра, $k = 7$.

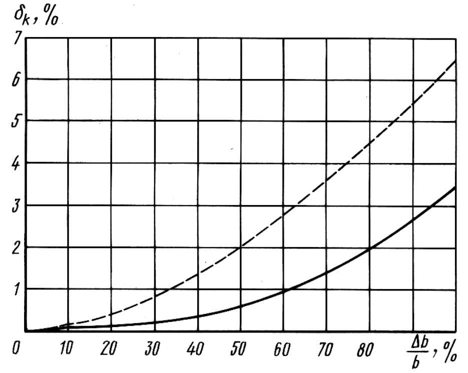

Рис. 4. Погрешность в определении динамических характеристик через функции чувствительности

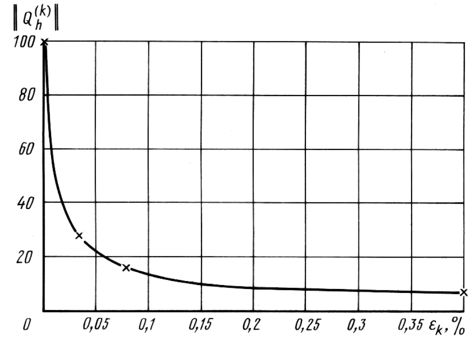

Рис. 5. Погрешность в определении функций чувствительности собственных векторов при сближении частот

Видно, что катастрофическая потеря точности происходит в достаточно малой окрестности кратной частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
2. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. – М.: Мир, 1988. – 428 с.
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет МЦНМО, 1998. – 320 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1982. – 561 с.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Мир, 1982. – 367 с.

Статья поступила в редакцию 15.09.2006

Олег Николаевич Тушев родился в 1943 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 88 научных работ в области динамики конструкций.

O.N. Tushev (b. 1943) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 88 publications in the field of dynamics of constructions.

Андрей Валерьевич Березовский родился в 1979 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2002 г. Начальник сектора отдела динамической прочности ФГУП НПО “Машиностроения” (г. Реутов МО).

A.V. Berezovsky (b. 1979) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Head of sector of department for dynamical strength of the Federal State Unitary Enterprise of the Scientific and Production Association “Mashinostroenie”.