

Г. А. Щ е г л о в

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОПОР
УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА, ВЫДВИГАЕМОГО
В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПОТОК**

Рассмотрена модельная задача о выдвигании в плоскопараллельный поток несжимаемой среды упругого элемента, соединенного с основанием при помощи податливых подвижных опор. Проведено прямое численное моделирование переходного режима. Для расчета нестационарных гидродинамических нагрузок использован метод вихревых элементов. Проведено сравнение результатов, полученных для разных расчетных схем.

Задача определения нагрузок на опоры элементов, выдвигаемых в поток движущейся среды, является актуальной для многих отраслей техники, например: авиации, ракетостроения, энергетики, строительства. Уточнение нестационарных нагрузок позволяет исключить заклинивание выдвигаемого элемента при минимальных зазорах между ним и основанием. Совершенство технических решений во многом определяется возможностями анализа взаимодействия выдвигаемого упругого тела с потоком среды. При этом важно учитывать интерференцию выдвигаемого тела с основанием. Наибольшую сложность представляет моделирование явлений, обусловленных отрывом потока с поверхности гладких деформируемых тел. Поскольку проведение экспериментальной отработки указанных узлов является сложным и дорогостоящим процессом, то на ранних этапах проектирования изделий необходима компьютерная модель, пригодная для инженерного анализа конструкции.

Прямое численное моделирование переходного режима в гидроупругой системе, геометрические и динамические характеристики которой существенно изменяются во времени, требует интеграции в одном алгоритме методов вычислительной гидродинамики и методов анализа динамики упругих систем. При этом желательно, чтобы затраты вычислительных ресурсов, необходимые для моделирования течения и расчета нестационарных гидродинамических нагрузок, были минимальны или сопоставимы с затратами на расчет динамики конструкции. Существующие программные комплексы вычислительной гидродинамики, позволяющие проводить достаточно подробные исследования сеточными методами, оказываются в этом отношении неэффективными, поскольку расчет конструкций с переменной геометрией чрезвычайно длительный. Поэтому для эффективного решения инженерных задач весьма актуально использование вихревых бессеточных методов расчета отрывных течений с использованием упрощенных моделей среды [1, 2]. Важно, что вместо вычисления скорости

и давления в каждой узловой точке сетки, построенной в ограниченной расчетной области, можно решать задачу во всем пространстве, сосредоточив вычислительные ресурсы на расчетах сравнительно небольшой области вихревого следа, где завихренность отлична от нуля. Это дает возможность при решении задач гидроупругости получать с приемлемой для инженерных расчетов точностью нестационарные нагрузки при меньших по сравнению с сеточными методами вычислительных затратах.

Вихревые методы применялись для решения задач гидроупругости разными авторами. Обзор литературы по этой тематике можно найти в книге [3], результаты прямого численного моделирования колебаний и вращения конструкции в плоскопараллельном потоке — в работах [4, 5]. Случай выдвижения жесткой конструкции в плоскопараллельный поток рассмотрен в докладе [6]. Результаты моделирования переходных режимов в опорах конструкции, выдвигаемой со стороны экрана, выполненного с использованием метода вихревых элементов, приведены в работе [7].

В настоящей статье рассмотрены переходные режимы, протекающие при выдвижении упругого элемента конструкции в плоскопараллельный поток. Проведено сравнение различных моделей основания: непроницаемого экрана и замкнутого профиля. Цель настоящей работы — изучение влияния интерференции выдвигаемого в плоскопараллельный поток элемента, соединенного с основанием, на перемещения в опорах.

Постановка задачи. Плоскопараллельный поток несжимаемой среды обтекает неподвижный профиль-основание B с постоянной скоростью \vec{v}_∞ . В начальный момент времени t_0 из профиля-основания начинает выдвигаться профиль b , как показано на рис. 1. Введем подвижную систему координат $O'US$, связанную с профилем b . Положение профиля b в неподвижной системе координат OXY задается координатой Y_0 и скоростью v_{0Y} , направленной вдоль оси OY .

Элементом, воспринимающим нестационарную гидродинамическую нагрузку $q(s, t)$, является упругая ось профиля $O'L$, которая

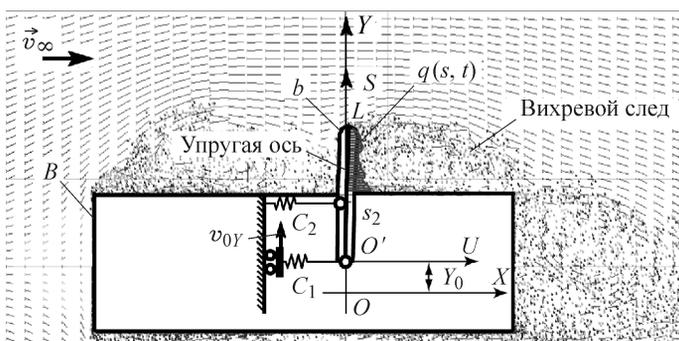


Рис. 1. Расчетная схема

работает на изгиб как балка длиной L с постоянным поперечным сечением. Изгибная жесткость упругой оси равна EJ , а погонная масса — ρ . Рассмотрим поперечные прогибы упругой оси $u(s, t)$. В предлагаемой модели считается, что профиль b деформируется вместе с упругой осью таким образом, что для деформированного профиля b выполняется гипотеза плоских сечений.

Профиль b закреплен на опорах, которые крепятся к упругой оси на идеальных шарнирах (см. рис. 1). Первая опора установлена на краю упругой оси ($s_1 = 0$) и имеет жесткость C_1 . Она движется вместе с профилем и неподвижна в связанной системе координат. Вторая опора жесткостью C_2 остается неподвижной в системе координат OXY . В связанной системе координата данной опоры $s_2 = l(t)$, ($0 < l(t) < L$). Прогибы упругой оси в местах установки опор в связанной системе координат обозначены как U_1 и U_2 .

Исследуем переходный режим с начальными условиями $Y_0(0) = 0$, $\dot{Y}_0(0) = v_{0Y}$, $u(x, 0) = 0$; $\dot{u}(x, 0) = 0$, протекающий до момента времени $t = t_K = Y_{0\max}/v_{0Y}$, где $Y_{0\max}$ — ход профиля b .

Постановка связанной задачи гидроупругости включает в себя уравнение неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, уравнение Навье–Стокса и уравнение динамики профиля с граничными условиями на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_\infty = \text{const}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p(\vec{r}, t) = p_\infty = \text{const}$$

и на объединенном профиле $B_0 = B \cup b$

$$\vec{v}(\vec{r}_K, t) = \vec{v}_K(\vec{r}_K, t),$$

где $\vec{v}(\vec{r}, t)$ — скорость среды, $\vec{v}_K(\vec{r}_K, t)$ — скорость движения точки с радиусом-вектором \vec{r}_K на профиле.

При использовании вихревого метода уравнения движения среды записываются для вектора завихренности $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$, который для плоскопараллельного течения направлен перпендикулярно плоскости потока (единичный орт \vec{k}) и имеет модуль $|\vec{\Omega}| = \Omega$. При обтекании профиля завихренность сосредоточена в области вихревого следа S . По известному распределению завихренности с учетом закона Био–Савара можно найти скорость в любой точке течения:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_\infty + \iint_S \vec{Q}(\vec{r} - \vec{\xi}) \cdot \Omega(\vec{\xi}) dS_\xi, \quad \vec{Q}(\vec{r} - \vec{\xi}) = \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{2\pi |\vec{r} - \vec{\xi}|^2}.$$

При этом уравнение неразрывности и граничное условие на бесконечности выполняются автоматически.

Уравнение Навье–Стокса преобразуется в уравнение движения завихренности по траекториям векторного поля $\vec{v} + \vec{W}$:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \text{rot} \left((\vec{v} + \vec{W}) \times \vec{\Omega} \right), \quad (1)$$

где $\vec{W} = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$ – диффузионная скорость [8].

Граничное условие на профиле обеспечивается генерацией завихренности [8]:

$$\frac{d}{dt} \Omega(\vec{r}_K, t) = J_t(\vec{r}_K, t), \quad (2)$$

где J_t – поток завихренности.

Уравнение динамики упругой оси имеет вид

$$u(s, t) = - \int_0^b G(s, \xi, t) \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(\xi, t) \right] d\xi, \quad (3)$$

где $G(s, \xi, t)$ – функция Грина для балки на податливых опорах, которая вычислена аналитически с использованием степенных полиномов [7] (функция нестационарная, поскольку положение пружины $s_2 = l(t)$); $q(s, t)$ – поперечная нагрузка на упругую ось профиля, полученная путем интегрирования давления по части профиля b , находящейся в потоке среды. Распределение давления находится с использованием аналога интеграла Коши–Лагранжа [8].

Метод решения. Уравнение (1) решается численно, для этого проводится дискретизация, как показано на рис. 2. Упругая ось балки раз-

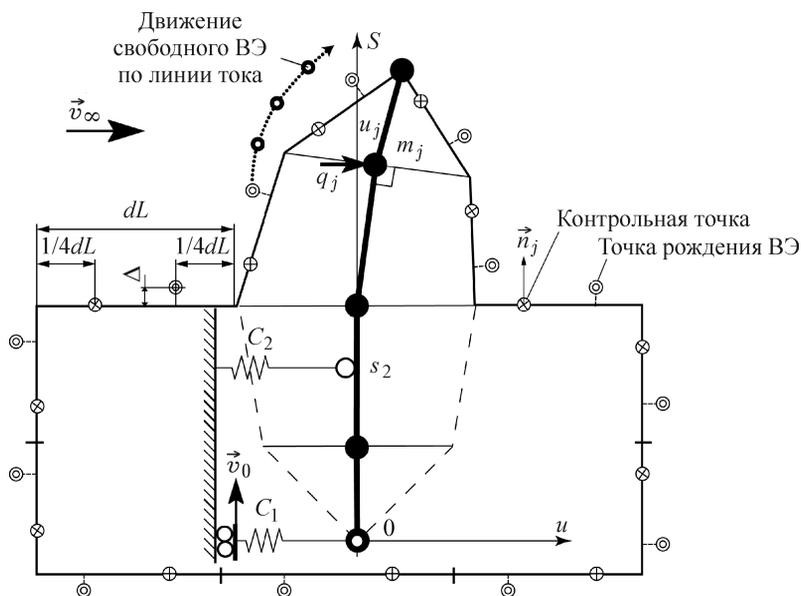


Рис. 2. Дискретизация расчетной схемы

бивается на участки. Система уравнений движения узлов упругой оси в матричном виде записывается как

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{u}\} + [C]\{u\} &= \{q\}; \\ \{u\}\Big|_{t=0} &= 0; \quad \{\dot{u}\}\Big|_{t=0} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

Матрицу жесткости находят как $[c_{ij}] = [G(s_i, s_j, t)]^{-1}$.

При дискретизации уравнений движения среды область S , занятая завихренностью, аппроксимируется множеством из N дискретных вихревых элементов (ВЭ) — вихрей Рэнкина. Параметрами i -го ВЭ являются радиус-вектор центра \vec{r}_i в неподвижной системе координат, радиус дискретности ε_i и интенсивность Γ_i . Скорость среды в точке с радиусом-вектором \vec{r}_0 вычисляется по известным параметрам ВЭ и скорости набегающего потока:

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) = \vec{v}_\infty + \sum_{i=1}^N \vec{Q}(\vec{r}_0 - \vec{r}_i) \Gamma_i.$$

В рассматриваемой задаче вязкость среды считается малой и, в соответствии с подходом Прандтля, эффекты вязкости учитываются только как причина генерации завихренности в тонком пограничном слое около профиля. Движение ВЭ происходит без учета вязкости (с нулевой диффузионной скоростью $\vec{W} = 0$) и описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}(\vec{r}_i, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Процесс генерации завихренности моделируется рождением новых ВЭ вблизи поверхности тела на каждом временном шаге расчета. Точки рождения ВЭ (радиус-вектор \vec{r}_{Kj} в неподвижной системе координат) задаются на N_K панелях, аппроксимирующих контур профиля $B_0 = B \cup b$ (см. рис. 2). При этом влияние диффузионной скорости около профиля учитывается на каждом шаге Δt как некоторое заданное априори расстояние $\Delta = \vec{W}_K \Delta t = \text{const}$, на которое точка рождения ВЭ отстоит от панели. Интенсивности Γ_j новых ВЭ вычисляют, решая систему уравнений для условий непротекания в контрольных точках панелей совместно с уравнением баланса циркуляции:

$$\begin{bmatrix} \nu_{11} & \dots & \dots & \nu_{1N_K} & 1 \\ \dots & \nu_{ij} & & \dots & 1 \\ \dots & & & \dots & \dots \\ \nu_{N_K 1} & \dots & \dots & \nu_{N_K N_K} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_j \\ \dots \\ \Gamma_{N_K} \\ R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_j \\ \dots \\ v_{N_K} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $\nu_{ij} = \vec{Q}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{n}_i$; $v_i = (\vec{v}_{K_i} - \vec{v}(\vec{r}_i)) \vec{n}_i$; R – регуляризирующая переменная.

Давление в точке с радиусом-вектором \vec{r}_0 находят по следующей формуле:

$$p(\vec{r}_0, t) = p_\infty + \rho_\infty \frac{\vec{v}_\infty^2}{2} - \rho_\infty \frac{\vec{v}(\vec{r}_0, t)^2}{2} + \rho_\infty \sum_{i=1}^N \Gamma_i \vec{v}(\vec{r}_i, t) \cdot \vec{Q}(\vec{r}_0 - \vec{r}_i) - \rho_\infty I_{born}(t), \quad (7)$$

где I_{born} – интеграл, учитывающий рождение ВЭ на текущем шаге [8].

Алгоритм решения задачи (рис. 3) содержит два блока: блок расчета упругой подсистемы и блок расчета гидродинамической подсистемы. Блок генерации вихревых элементов связывает задачу гидроупругости. В этом блоке происходит решение системы (6) методом Гаусса.

На k -м шаге расчета строится расчетная схема на контуре B_0 (с учетом деформации упругой оси выдвинутого в поток элемента и перемещения упругих опор), решается система (6) и пополняется вихревой след новыми ВЭ. Далее определяется поле давлений на части профиля b , находящейся в потоке, по формуле (7) и вычисляются гидродинамические нагрузки $\{q\}$ в узлах. Это позволяет проинтегрировать уравнения (4) на интервале $[t_k, t_k + \Delta t]$ и рассчитать на основе прогибов упругой оси деформированную форму профиля b для следующего шага. В конце шага алгоритма интегрируются уравнения движения ВЭ (5).

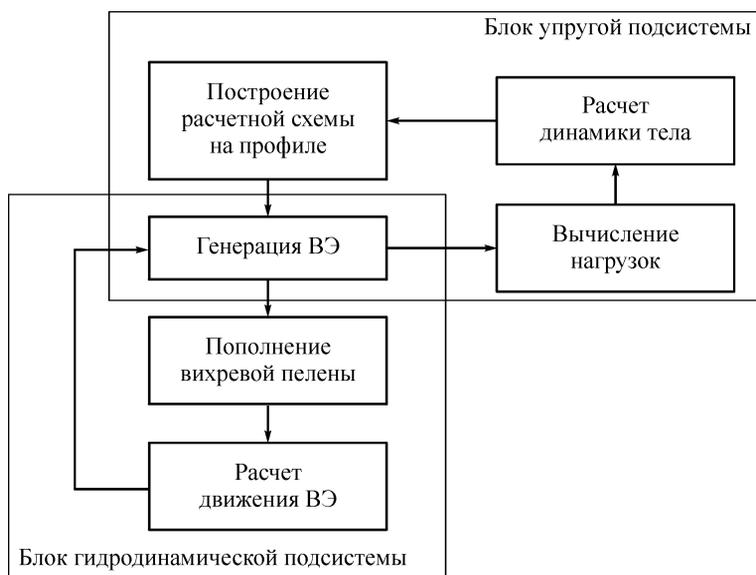


Рис. 3. Схема алгоритма решения задачи

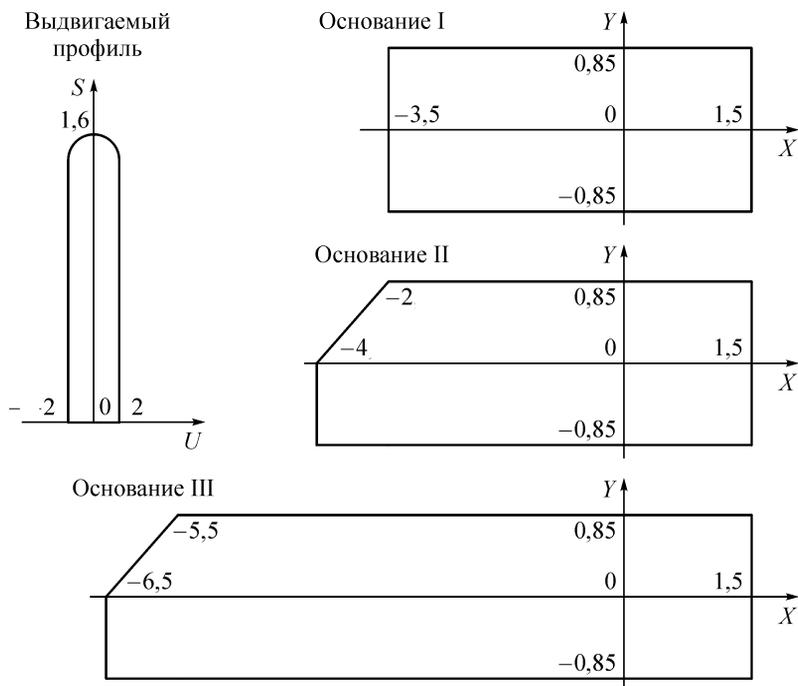


Рис. 4. Геометрия исследуемых профилей

Система (4) интегрируется методом Рунге–Кутты четвертого порядка с постоянным шагом $\Delta\tau$. Система (5) интегрируется методом Эйлера первого порядка с шагом Δt с проверкой условия “проникания”: вихревые элементы, попавшие внутрь профиля между контрольными точками, возвращаются в поток. Цикл вычислений продолжается до достижения конечного времени вычислений t_K .

На основе описанного алгоритма автором настоящей статьи создан программный комплекс MDVDD, при помощи которого были проведены расчеты переходных режимов.

Результаты моделирования. Исследование проводилось на модельных задачах с безразмерными параметрами. В качестве выдвигаемого элемента конструкции был взят прямоугольный профиль, закругленный с одного торца; его размеры показаны на рис. 4, на котором также показаны профили и размеры оснований.

Использовались следующие безразмерные исходные данные: $|\vec{v}_\infty| = 1$; $p_\infty = 1$, $\rho_\infty = 1$; $v_{0Y} = 0,1$; $l(0) = 1,5$; $Y_{0\max} = 1,3$; $EJ = 5$; $\rho = 3,125$; $C_1 = C_2 = 100$; $\varepsilon_i = 0,004$; $\Delta t = 0,04$; $\Delta\tau = \Delta t/100$; $t_K = 13$; $N_K = 2000 \dots 2200$ (по мере выдвигения профиля из основания число панелей увеличивается).

Были проведены последовательно расчеты нескольких схем, обозначенных далее как:

схема 1 — профиль выдвигается из бесконечного экрана, на котором не происходит генерация завихренности [7];

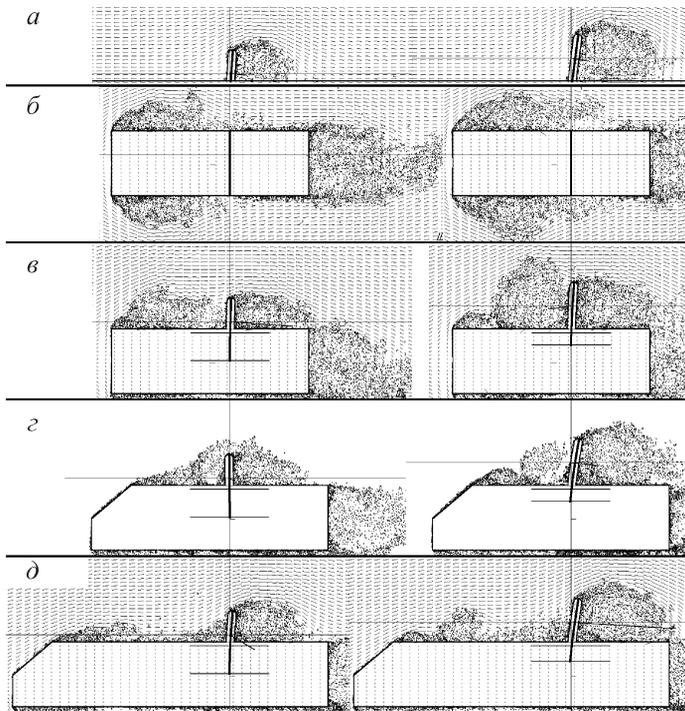


Рис. 5. Фазы развития вихревой пелены на шаге $t = 8$ (слева) и $t = 12$ (справа): *а* – схема 1; *б*, *в* – схема 2 без выдвигания и с выдвиганием элемента соответственно; *г* – схема 3; *д* – схема 4

схемы 2, 3 и 4 – профиль выдвигается (с учетом генерации завихренности на профиле основания) из оснований I, II и III соответственно (см. рис. 4).

Фазы развития вихревой пелены для данных схем показаны на рис. 5 (точками обозначены ВЭ). Расчет одной схемы, в котором было выполнено 325 шагов, занимал на одном ядре процессора Intel Core 2 Duo (2,6 ГГц) не более 3 ч.

Расчеты показывают, что в случае, когда используется непроницаемый экран без генерации завихренности (рис. 5, *а*), вихревая пелена существенно отличается от вихревой пелены вокруг профилей основания (рис. 5, *в*, *г*, *д*). Сравнивая рис. 5, *б* и рис. 5, *в*, выявили, как меняется вихревая пелена при выдвигании профиля. Сравнение рис. 5, *в*, *г*, *д* показывает, что вихревая пелена существенно зависит от формы основания.

На рис. 6 более подробно показана вихревая пелена вблизи стыка основания и движущегося профиля. Эллипсами на рисунке дополнительно отмечены области, где формируются вихри. Из рис. 6 видно, что при расчете с экраном формируется только один вихрь в теневой зоне за выдвигаемым профилем (рис. 6, *а*), при расчете с прямоугольным основанием I по обеим сторонам профиля формируются

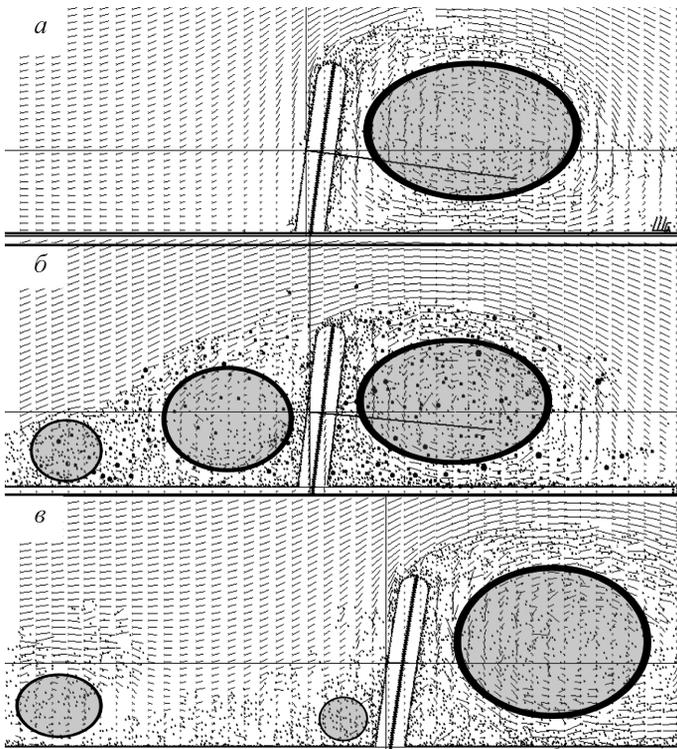


Рис. 6. Вихревая пелена на 280 шаге расчета:

а, б, в — схемы 1, 2 и 4 соответственно

два вихря примерно равной величины (рис. 6, б), а при расчете с удлиненным, “обтекаемым” основанием III вихрь, формирующийся перед профилем, меньше вихря, родившегося за профилем (рис. 6, б). Наблюдаемое различие существенно сказывается на нагрузках в узлах крепления профиля.

Графики прогибов упругой оси в местах крепления первой и второй опор приведены на рис. 7. Анализ графиков показывает существенное уменьшение прогибов для схемы 2 по сравнению со схемой 1, что связано с формированием крупного вихря перед выдвигающимся профилем (см. рис. 6, б). В случае протяженного основания (схема 4) прогибы оказываются близкими к результатам исследования схемы 1 (экран), а в случае схемы 3 переходный режим характеризуется знакопеременными значениями прогибов.

Выводы. Расчеты показывают, что в рассмотренной связанной задаче гидроупругости интерференция основания с выдвигаемым телом, приводящая к формированию сложных вихревых структур, оказывает существенное влияние на перемещения в опорах.

Использование расчетной схемы с плоским экраном возможно только в случае, когда все источники возмущений потока удалены от места выдвижения элемента. В этом случае уточнение расчета с использованием потока завихренности с контура основания, хотя и

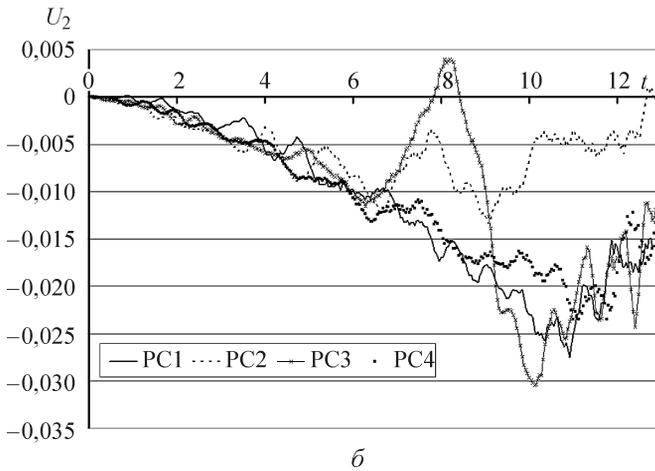
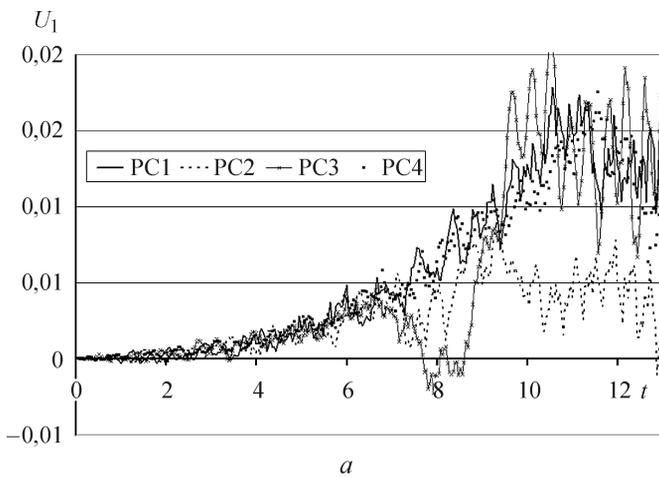


Рис. 7. Прогибы упругой оси в месте крепления первой (а) и второй (б) опор (PC1, PC2, PC3, PC4 – соответствуют схемам 1, 2, 3, 4)

дает более точную картину течения, но существенного влияния на нагрузки в пружинах не оказывает.

Новизной предлагаемого метода является возможность прямого численного моделирования переходного режима с учетом интенсивного вихреобразования на гладкой поверхности и интерференции основания с выдвигаемым телом.

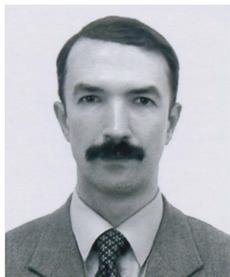
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С а р п к а й я Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. "А". – 1989. – № 10. – С. 1–60.
2. Т р е х м е р н о е отрывное обтекание тел произвольной формы / Под ред. С.М. Белоцерковского. – М.: ЦАГИ, 2000. – 265 с.
3. А э р о г и д р о у п р у г о с т ь конструкций / А.Г. Горшков и др. – М.: Физматлит, 2000. – 592 с.
4. M o r g e n t h a l G. Aerodynamic analysis of structures using high-resolution vortex particle method. – Cambridge, 2002. – 185 p.

5. Г у в е р н ю к С. В., Д ы н н и к о в а Г. Я. Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // Изв. РАН. – МЖГ. – 2007. – № 1. – С. 3–14.
6. С е м е н е н к о В. Н. Проникновение тел вращения в воду через жесткую стенку // Тр. VII междунар. симп. “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Феодосия, 1997. – С. 132–134.
7. Щ е г л о в Г. А. Моделирование методом дискретных вихрей переходных процессов в связанных задачах гидроупругости при плоскопараллельном обтекании тел // Тр. XII междунар. симп. “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. – Харьков–Херсон, 2005. – С. 393–396.
8. А н д р о н о в П. Р., Г у в е р н ю к С. В., Д ы н н и к о в а Г. Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006. – 184 с.

Статья поступила в редакцию 18.04.2008

Георгий Александрович Щеглов родился в 1972 г., окончил МГТУ им. Н.Э.Баумана в 1996 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 30 научных работ в области динамики и прочности конструкций аэрокосмических систем, вычислительных методов в гидроупругости.



G.A. Shcheglov (b. 1972) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1996. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of dynamics and strength of structures of aerospace systems, computation methods in hydro-elasticity.

**В издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
в 2008 г. вышла в свет книга**

Колесников К.С.

Рассказ о моей жизни. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 360 с.

Автобиографическая книга профессора МГТУ им. Н.Э.Баумана, академика РАН Константина Сергеевича Колесникова представляет собой яркое жизнеописание человека интереснейшей судьбы. Перед нами история личности на фоне крупнейших событий двадцатого столетия, пример целеустремленности фронтовика-бауманца, который жаждал учиться и добился максимальной самореализации.

Читатель — студент или выпускник МГТУ им. Н.Э.Баумана — почерпнет из этой книги немало ценной информации о развитии университета во второй половине XX в., воспитании молодежи, замечательных ученых, блестящих педагогах, которыми по праву гордится наша alma mater.

Неподдельная искренность автора, рассказывающего о пройденном им пути, побуждает к серьезному размышлению, поиску ответов на волнующие современника вызовы нынешней эпохи.

По вопросам приобретения обращаться по тел. (499) 263-60-45;
e-mail: press@bmstu.ru