

УДК 539.3

С. В. А р и н ч е в, Б. Д. К а ш ф у т д и н о в

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ОПОРОЙ

Предложена модель динамического контакта упругой конструкции с опорой. Исходная упругая динамическая схема модифицируется путем отделения сосредоточенных масс от основной конструкции. При этом сосредоточенные массы соединяются с основной конструкцией с помощью фиктивных упругих элементов. В непосредственный контакт с опорой вступают только сосредоточенные массы. Соударение каждой массы с опорой может быть упругим и неупругим. Зона контакта упругой динамической модели формируется автоматически в каждый момент времени. Уравнения динамики соударения интегрируются методом фильтров В.И. Никитенко.

Трудоемкость анализа динамики соударения упругой конструкции с опорой во многом определяется необходимостью расчета зоны их контакта в каждый момент времени, при этом процедура является плохо сходящейся [1]. В настоящей работе предложена модель динамического контакта упругой конструкции с абсолютно жесткой опорой; зона контакта конструкции с опорой формируется в каждый момент времени автоматически. При этом трудоемкость расчета значительно снижается.

Предположим, что исходная упругая динамическая схема представляет собой свободную балку. Балка разбита на элементы. Массы сосредоточены на границах стыковки элементов (рис. 1). Здесь же приложены внешние перерезывающие силы. Для моделирования динамики контакта конструкции с опорой исходную упругую динамическую схему необходимо модифицировать.

Уравнение динамики исходной системы имеет вид

$$-M\ddot{Y} - CY + F(t) = 0, \quad (1)$$



Рис. 1. Исходная упругодинамическая модель

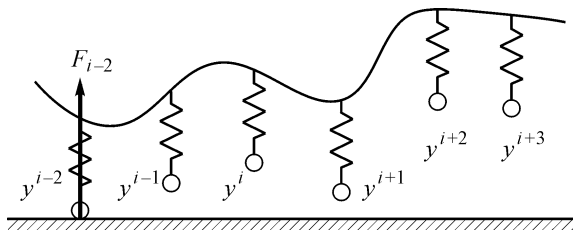


Рис. 2. Модифицированная упругодинамическая модель

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{20} \end{pmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{20} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,20} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,20} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{20,1} & c_{20,2} & \dots & c_{20,20} \end{bmatrix}; \quad F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_{20}(t) \end{pmatrix}.$$

Суть модификации: массы формально отделяются от невесомой упругой линии, а затем присоединяются к ней с помощью фиктивных упругих элементов заданной жесткости (рис. 2).

В результате модификации каждая расчетная точка раздваивается. В каждой паре одна расчетная точка соответствует сосредоточенной массе, а другая — оставшейся невесомой упругой линии балки:

$$Y \rightarrow Y_T, Y_C; \quad Y_T = \begin{pmatrix} y_{m1} \\ y_{m2} \\ \dots \\ y_{m20} \end{pmatrix}; \quad Y_C = \begin{pmatrix} y_{c1} \\ y_{c2} \\ \dots \\ y_{c20} \end{pmatrix}.$$

Перерезывающие силы $F_i(t)$ прикладываются к невесомой упругой линии.

Будем считать, что в контакт с опорой вступают только сосредоточенные массы. Соударения масс с опорой могут быть упругими и неупругими. Особенности соударения отдельных точечных масс с опорой изучены в работе [2]. Невесомая упругая линия в контакт не вступает. Она лишь занимает некоторое промежуточное равновесное положение между массами (см. рис. 2). Чем выше жесткость фиктивных упругих элементов, тем точнее рассматриваемая модель.

Программа расчета должна отслеживать движение каждой массы и в нужный момент времени изменять скорость сосредоточенной массы скачком при ее встрече с опорой [2].

Трудоемкость интегрирования уравнений динамики соударения определяется наличием в переходном процессе высокочастотных гар-

моник. Известно, что высшие гармоники в наименьшей степени соответствуют расчетной модели. Однако именно они определяют вычислительные затраты. Достоинство предлагаемой модели соударения состоит в том, что она позволяет убрать паразитные высшие гармоники методом фильтров В.И. Никитенко [3]. Роль фильтра играют фиктивные упругие элементы, соединяющие сосредоточенные массы и невесомую упругую линию балки. Их жесткость выбирают так, что парциальные частоты соответствующих одномерных осцилляторов равны задаваемой частоте фильтра, и формируют матрицу жесткости фильтра

$$C_{\phi} = \omega_{\phi}^2 M. \quad (2)$$

Уравнения динамики модифицированной системы имеют вид

$$\begin{cases} -M\ddot{Y}_T - C_{\phi}(Y_T - Y_c) = 0; \\ C_{\phi}(Y_T - Y_c) - CY_c + F(t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Второе уравнение системы (3) для невесомой упругой линии является алгебраическим. Выразим из него Y_c :

$$Y_c = (\omega_{\phi}^2 M + C)^{-1} \omega_{\phi}^2 M Y_T + (\omega_{\phi}^2 M + C)^{-1} F(t).$$

Подставляя полученное соотношение в первое уравнение системы (3) для сосредоточенных масс, получаем

$$-M\ddot{Y}_T - DY_T + \tilde{F}(t) = 0, \quad (4)$$

где

$$D = \omega_{\phi}^2 M - \omega_{\phi}^2 M [\omega_{\phi}^2 M + C]^{-1} \omega_{\phi}^2 M;$$

$$\tilde{F}(t) = \omega_{\phi}^2 M [\omega_{\phi}^2 M + C]^{-1} F(t)$$

(матрица M — не изменилась).

Полученное уравнение (4) является разрешающим уравнением динамики соударения балочной системы с упругой опорой. Его размерность определяется числом элементов разбиения. Увеличение числа элементов повышает адекватность расчетной схемы, но трудоемкость расчета возрастает.

Известно, что частоты модифицированной системы не превышают некоторой задаваемой частоты фильтра. Покажем это. Рассмотрим собственные колебания исходной и модифицированной систем:

$$\begin{cases} -M\ddot{Y}_T - CY_T = 0; \\ -M\ddot{Y}_T - DY_T = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Колебания этих систем происходят с разными частотами:

$$\lambda \neq \omega;$$

$$\begin{cases} (C - \omega^2 M)Y_T = 0; \\ (D - \lambda^2 M)Y_T = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя выражение D из уравнения (4) во второе уравнение системы (6) и раскрывая скобки, получаем

$$\omega_\phi^2 M Y_T - \omega_\phi^2 M [\omega_\phi^2 M + C]^{-1} \omega_\phi^2 M Y_T - \lambda^2 M Y_T = 0.$$

После преобразований имеем

$$[\omega_\phi^2 M + C] Y_T = \frac{\omega_\phi^4}{\omega_\phi^2 - \lambda^2} M Y_T$$

или

$$(C - \varkappa^2 M) Y_T = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \varkappa^2 = \frac{\omega_\phi^2 \lambda^2}{\omega_\phi^2 - \lambda^2}.$$

Матрицы жесткости и масс уравнения (7) такие же, как в первом уравнении системы (6). Поэтому собственные векторы исходной и модифицированной систем одинаковы. Равными оказываются и их собственные значения:

$$\varkappa^2 = \omega^2 = \frac{\omega_\phi^2 \lambda^2}{\omega_\phi^2 - \lambda^2}. \quad (8)$$

Отсюда

$$\lambda_i^2 = \frac{\omega_\phi^2 \omega_i^2}{\omega_\phi^2 + \omega_i^2} \Rightarrow \lambda_i < \omega_\phi; \quad \lambda_i < \omega_i.$$

Таким образом, частота модифицированной системы всегда меньше соответствующей частоты исходной системы и частоты фильтра. С увеличением частоты фильтра частоты исходной и модифицированной систем сближаются. Частоту фильтра подбирают опытным путем.

Далее приведены результаты численного эксперимента. Стальная балка длиной 10 м круглого поперечного сечения падает плашмя с метровой высоты на две симметричные опоры (рис. 3). Происходит абсолютно упругий удар, т.е. при контакте с опорой скорость сосредоточенной массы меняет знак.

Исходные данные: стальная балка длиной 10 м и радиусом 0,1 м падает на абсолютно жесткое основание. Балка находится в поле тяготения Земли на высоте 1 м от опоры.

Решение контролируется в пяти точках по длине балки (см. рис. 3).

Задачу решали дважды: с помощью пакета программ ANSYS Autodyn-3D v.11 (рис. 4)* и предлагаемым методом (рис. 5) на том же

*Расчет выполнен инженером Г.В. Беловым на компьютере Intel Pentium 641 (3200 MHz \ DDR II 2048 Mb).

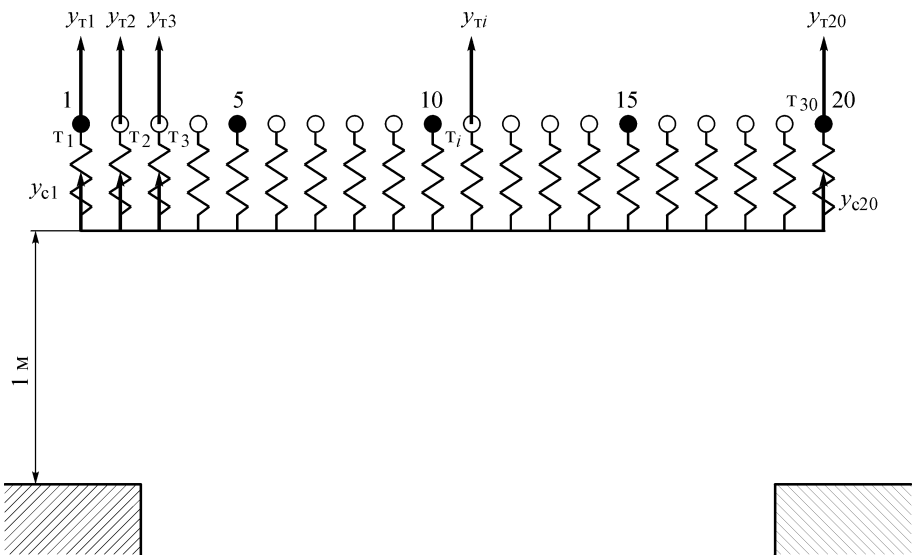


Рис. 3. Пример расчета (расчетные точки, соответствующие последующим рисункам, закрашены черным)

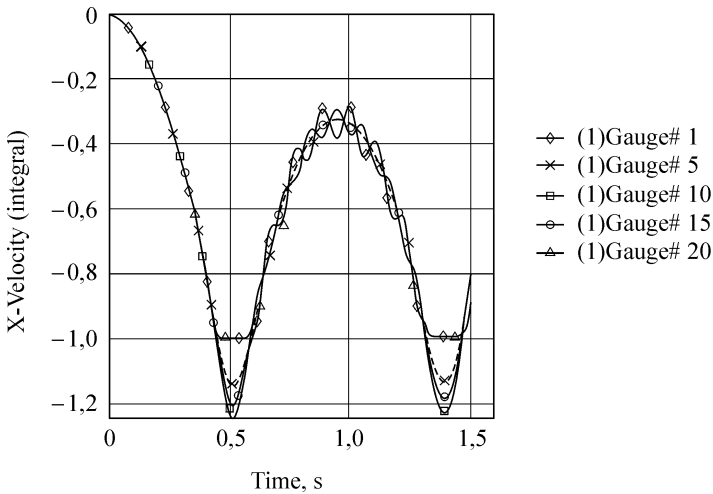
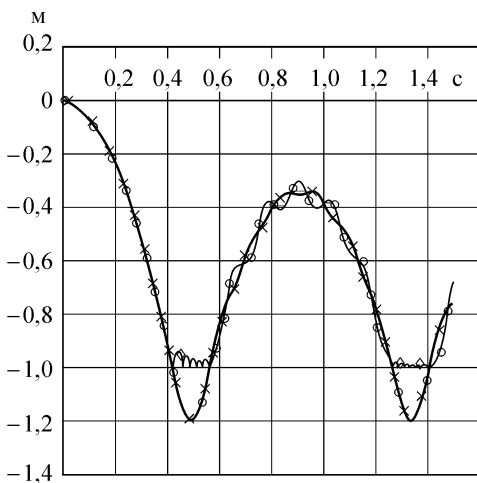


Рис. 4. Кривые соударения, полученные в среде ANSYS Autodyn v.11 (время интегрирования 15 мин)

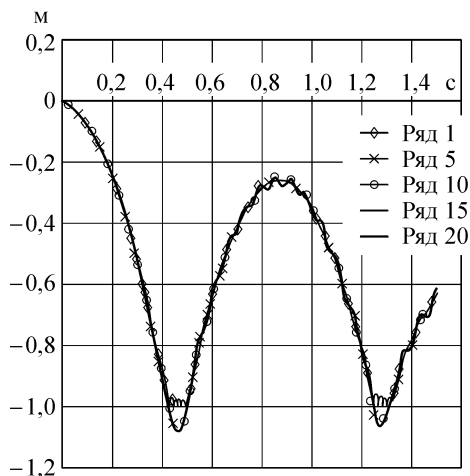
компьютере. На рисунках даны кривые соударения для выбранных расчетных точек.

Здесь шаг интегрирования по времени выбирается на основе предварительной оценки скорости распространения волн в среде и устойчивости рассматриваемой численной процедуры.

На рис.5 приведены кривые соударения в тех же точках, полученные методом фильтров (надпись “ряд” соответствует “Gauge” на рис. 4). Уравнения динамики соударения интегрировались методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага. Частота фильтра варьи-



a



б

Рис. 5. Кривые соударения для частоты фильтра 50 (а) и 100 (б) рад/с. Время интегрирования 25 с (а) и 30 с (б) (компьютер Intel Pentium 641 (3200 MHz\DDR II 2048 Mb):

ровалась. Уменьшение частоты фильтра резко снижает трудоемкость расчета.

Результаты, полученные различными методами, совпадают. Однако предлагаемый подход позволил снизить трудоемкость расчета на порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л ю м и н а р с к и й И. Е. Расчет упругих систем с односторонними связями: Монография. – М.: МГИУ, 2006. – 308 с.
2. К о б р и н с к и й А. Е., К о б р и н с к и й А. А. Вибродарные системы (Динамика и устойчивость). – М.: Наука, 1973. – 592 с.
3. А р и н ч е в С. В., Т у ш е в О. Н., Г р и б к о в В. А. Методические указания к вычислительному практикуму по курсу “Интегрирование уравнений динамики элементов конструкций ЛА”. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995. – 24 с.

Статья поступила в редакцию 19.05.2008

Сергей Васильевич Аринчев родился в 1953 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1976 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области динамики и прочности конструкций летательных аппаратов.

S.V. Arinchev (b. 1953) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1976. D. Sc. (Eng.), professor of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of dynamics and strength of constructions of flying vehicles.

Булат Дамирович Кашфутдинов родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Специализируется в области динамики и прочности конструкций летательных аппаратов.

B.D. Kashfutdinov (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2008. Specializes in the field of dynamics and strength of constructions of flying vehicles.