УДК 532.528

У. Тэйн

# КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ДНИЩА С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

*Рассмотрена задача о малых колебаниях упругого перфорированного днища топливного бака с протекающей жидкостью, частично заполняющей жесткую оболочку вращения. Задача рассмотрена в линейной квазистационарной постановке.*

Колебания упругого днища топливного бака с жидкостью, частично заполняющей жесткую оболочку, ранее рассматривали в работах [1–4 ]. В настоящей работе тонкостенный топливный бак представляет собой конструкцию, состоящую из жесткой оболочки, стыковочного шпангоута и частично перфорированного упругого днища, имитирующего заборное устройство. Подобная задача актуальна при исследовании продольных колебаний ракеты с топливными баками, содержащими внутрибаковые элементы (ВБЭ) и заборные устройства (ЗУ). Влияние ВБЭ и ЗУ на колебания упругого днища с жидкостью учитывается обобщенными коэффициентами гидравлического сопротивления, приведенными к поверхности ЗУ.

**Постановка задачи**. Введем цилиндрическую систему координат $Oxr\eta$ с началом в середине невозмущенной свободной поверхности $\Gamma_0$.

За невозмущенное состояние жидкости принимается установившееся напорное течение вязкого несжимаемого жидкого топлива, характеризуемое средней постоянной скоростью опускания $V_0$ невозмущенной свободной поверхности $\Gamma_0$ и средней постоянной скоростью $V_\Sigma^0$ на поверхности слива $\Sigma$, а также потерями напора на местные сопротивления и трение жидкости по длине топливного бака. К элементам, которые влияют на потерю энергии по длине топливного отсека, можно отнести тоннельную трубу, радиальные ребра, обечайку бака. Очевидно, такие ВБЭ, как кольцевые ребра, шпангоуты, перфорированные пластины и другие элементы влияют на диссипацию энергии, обусловленную местными гидравлическими сопротивлениями. За невозмущенное состояние упругой конструкции принимается состояние, отвечающее решению статической задачи о равновесии упругой конструкции под действием давления, вызванного невозмущенным движением жидкости.

При рассмотрении возмущенного движения жидкость предпологается идеальной, совершающей малые безвихревые волновые движения и имеющей потенциал смещения $\chi(x,t)$. Дно полости считается настолько пологим, что при определении потенциала смещения жидкости граничные условия можно перенести на плоскость $x = -H$, совпадающую с поверхностью слива, что позволяет рассматривать днище как упругую пластину или упругое кольцо.

**Уравнения возмущенного движения**. Задача о малых возмущенных движениях рассматриваемой механической системы может быть сформулирована в следующем виде:

$$\Delta\chi = 0; \quad \chi = 0 \text{ на } \varGamma_0; \ \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0 \text{ на } S; \ \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \gamma\Big(\frac{\partial^2\chi}{\partial t\partial x} - \dot{w}_{\text{д}}\Big) \text{ на } \Sigma, \quad (1)$$

$$D\Delta\Delta w_{\text{д}} + \rho_{\text{д}}\delta_{\text{д}}\frac{\partial^2 w_{\text{д}}}{\partial t^2} = -\rho\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

где $\chi(x, r, t)$ — потенциал малых смещений частиц жидкости в возмущенном движении; $w_{\text{д}}(r, t)$ — нормальное перемещение днища; $D$ — цилиндрическая жесткость; $\delta_{\text{д}}$ — толщина днища; $\rho_{\text{д}}, \rho$ — плотность материала днища и жидкости; $\gamma = \zeta_\Sigma V_\Sigma^0$ — обобщенный коэффициент гидравлических потерь; $\zeta_\Sigma$ — приведенный коэффициент сопротивления топливного бака; $E$ — модуль упругости материала днища; $\nu$ — коэффициент Пуассона. Потенциал смещений $\chi(x, r, t)$ представляется в виде суммы $\chi = \phi_1 + \phi_2$, где

$$\begin{gathered}\phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty}\Big[x + \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn}X_n(x)R_n(r)\Big]U_j(t);\\ \phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0}{\xi_n}R_n(r)Z_n(x)q_n(t); \quad X_n(x) = \frac{Z_n(x)}{Z_n'(-H)}.\end{gathered} \quad (3)$$

Здесь $u_j(t)$, $q_n(t)$ — обобщенные координаты днища и жидкости;

$$R_n(r) = \frac{J_0(k_n r)}{J_0(\xi_n)}; \quad Z_n(x) = \frac{\operatorname{Sh} k_n x}{\operatorname{Sh} k_n H};$$

$$C_{jn} = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} Y_j(r)R_n(r)r\,dr;$$

$\xi_n$ — корень функции Бесселя ($J_1(\xi) = 0$); $r_0$ — радиус цилиндрической обечайки; $Y_j(r)$ — полная система функций ($0 \leqslant r \leqslant r_0$), замкнутая по отношению к $w_{\text{д}}(r, t)$.

Подставив потенциалы смещений в уравнения (1) и (2), получим систему уравнений возмущенного движения:

$$D\Delta\Delta w + \rho_{\text{д}}\delta_{\text{д}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho\frac{2H}{r_0^2}\int\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}r\,dr - \rho r_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(r)}{\xi_n}\ddot{q}_n(t) -$$

$$-\frac{2}{r_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}R_n(r)rdr\Big)\frac{R_n(r)}{k_n\operatorname{cth}k_nH}-$$

$$-(\rho_д\delta+\rho H)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2};\quad C_n=\frac{2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0}Y(r)R_n(r)rdr; \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\ddot{q}_n\xi_n^{-1}+\gamma\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\xi_n^{-1}\operatorname{th}k_nH\dot{q}_n-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\ddot{U}R_n(r)=0. \quad (5)$$

**Собственные колебания.** Предположим, что

$$\begin{gathered}w(r,t)=Y(r)U(t);\quad U(t)=U_0e^{\omega t};\quad q_n=q_n^0e^{\omega t};\\ Y(r_0)=Y_r'(r_0)=0;\quad Y(r_1)=Y_r'(r_1)=0\end{gathered} \quad (6)$$

тогда, подставив соотношения (6) в выражения (4) и (5), можно получить уравнения, содержащие параметры $U_0$ и $q_n^0$, а исключив из преобразованных уравнений $q_n^0$, прийти к интегродифференциальному уравнению для функции $Y(r)$:

$$D\Big(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\Big)^2Y(r)+\rho_д\delta_д\omega^2Y(r)=-\rho H\omega^2\frac{2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0}Y(r)rdr-$$

$$-\omega^2\rho\frac{2}{r_0^2}\sum R_n(r)\Big(k_n\operatorname{cth}k_nH+\frac{\omega}{\gamma}\Big)^{-1}\int\limits_0^{r_0}Y(r)R_n(r)rdr. \quad (7)$$

Решение уравнения (7), удовлетворяющее граничным условиям, приводит к трансцендентному уравнению для определения числа $\zeta$, которое для сплошной пластины имеет вид

$$\frac{J_0(\zeta)}{J_1(\zeta)}+\frac{I_0(\zeta)}{I_1(\zeta)}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\zeta\Big(1-\frac{\xi_n^4}{\zeta^4}\Big)\Big[\xi_n\frac{\rho_д\delta}{\rho r_0}\Big(\operatorname{cth}\xi_n\bar{H}+\frac{i\zeta^2\bar{\delta}}{\bar{\gamma}\xi_n\sqrt{12}}\Big)\Big(1-\frac{\xi_n^4}{\zeta^4}\Big)+1\Big]}=$$

$$=\frac{4}{\zeta\Big[1+\frac{\rho_д\delta}{\rho r_0\bar{H}}\Big)\Big]}, \quad (8)$$

где $\bar{\delta}=\delta/r_0$; $\bar{H}=H/r_0$; $\bar{\gamma}=(\gamma/a)\sqrt{1-\nu^2}$; $\lambda=i\zeta^2\bar{\delta}/\sqrt{12}$, $\omega^2=\lambda^2E/(\rho_д r_0^2(1-\nu^2))$.

Трансцедентное уравнение для кольца ввиду громоздкости здесь не приводится.

Результаты расчета при $\bar{\delta}=1/375$, $\rho/\rho_д=0{,}363$, $\bar{H}=3$, $\nu=0{,}3$, $a=5000$ м/с, $E=7{,}2\cdot10^{10}$ Н/м$^2$, $l=r_1/r_0$ приведены в таблице.

Таблица

| Топливный бак | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | сухой | | с жидкостью | | | |
| | | | без слива ($\gamma=\infty$) | | со сливом ($\gamma = 1$) | |
| | $\zeta_1$ | $\lambda_1$ | $\zeta_1$ | $\lambda_1$ | $\zeta_1$ | $\lambda_1$ |
| 0 | 3,19 | $0{,}523\cdot10^{-3}$ | 0,8134 | $0{,}509\cdot10^{-3}$ | $\pm0{,}0065\pm0{,}8177i$ | $\pm8{,}18\cdot10^{-6}\pm0{,}5146\cdot10^{-3}i$ |
| 0,2 | 5,88 | 0,02664 | 4,947 | 0,018839 | $\pm0{,}195\cdot10^{-3}\pm1{,}54i$ | $\pm0,463\cdot10^{-6}\pm0{,}00183i$ |
| 0,4 | 7,87 | 0,04763 | 7,1103 | 0,03892 | $\pm0{,}75\cdot10^{-3}\pm1,559i$ | $\pm0{,}181\cdot10^{-5}\pm0{,}00187i$ |

**Вывод**. В результате расчетов выявлено, что наличие ВБЭ и ЗУ может качественно и количественно повлиять на динамические характеристики топливного отсека с жидкостью.

*Автор выражает благодарность доценту А.Н. Темнову за полезные консультации и внимание к работе.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесников К. С. Продольные колебания ракеты с ЖРД. – М.: Машиностроение, 1971. – 260 с.
2. Пожалостин А. А. Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью. // Инж. журнал МТТ. – 1966. – № 5. – С. 157–159.
3. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном // Изв. вузов. Сер. “Авиационная техника”. – 1963. – № 4.
4. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим дном в виде пологой сферической оболочки. Изв. вузов. Сер. “Авиационная техника”. – 1967. – № 2.

Статья поступила в редакцию 25.03.2008

У. Тэйн родился в 1975 г., окончил магистратуру МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г. Аспирант кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители МГТУ им. Н.Э. Баумана”. Специализируется в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

U. Tane (b. 1975) graduated from the Bauman Moscow State Technical University (master’s degree) in 2004. Post-graduate of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in mechanics of liquids and gases and rocket and space technology.