

УДК 541.124

## ОЦЕНКА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИЗМЕНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ВОЛОКНОМ И МАТРИЦЕЙ

**В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*В качестве конструкционных и функциональных материалов в различных приборных устройствах находят широкое применение композиты. Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное число работ. Однако расчетные формулы в этих работах получены, как правило, либо в результате обработки экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо путем априорного задания распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел. В настоящей работе предложена математическая модель переноса тепловой энергии в композите, армированном достаточно длинными анизотропными волокнами, ориентированными в одном направлении, с учетом возможности возникновения промежуточного слоя между волокнами и матрицей, теплопроводность которого непрерывно изменяется по толщине. На основе этой модели получены расчетные формулы для эффективных коэффициентов теплопроводности такого композита. Для оценки возможной погрешности полученных результатов применена двойственная вариационная формулировка задачи стационарной теплопроводности. Полученные результаты могут быть использованы для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности волокнистых композитов.*

**Ключевые слова:** композит, волокно, промежуточный слой, эффективный коэффициент теплопроводности.

## ESTIMATION OF THERMAL CONDUCTIVITY OF THE FIBROUS COMPOSITE WITH CONTINUOUS VARIATION IN THE THERMAL CONDUCTIVITY OF THE INTERMEDIATE LAYER BETWEEN THE FIBER AND MATRIX

**V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savelieva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*Composites are widely used as constructional and functional materials in various instrument devices. A significant amount of works is devoted to research of thermal conductivity of composites. However the calculation formulas in these works are derived, as a rule, either as a result of processing of experimental data with reference to specific materials, or by a priori setting of the temperature and heat flow distributions in models of heterogeneous body structures. A mathematical model of thermal energy transfer in the composite reinforced with sufficiently long anisotropic fibers oriented in one direction is offered taking into account the possibility of an intermediate layer occurred between the fibers and the matrix, whose thermal conductivity varies continuously across the thickness. Based on this model, the formulas for calculating the effective thermal conductivity coefficients of this*

*composite are deduced. The dual variational formulation of the stationary thermal conductivity problem was applied for estimating a possible error of obtained results. The results can be used to predict the effective thermal conductivity coefficients of fibrous composites.*

**Keywords:** composite, fiber, intermediate layer, effective coefficient of thermal conductivity.

Волокнистые композиты находят широкое применение в технике в качестве конструкционных материалов [1]. Технологический процесс изготовления таких композитов включает в себя этап предварительной подготовки поверхности волокна, что обеспечивает в дальнейшем необходимую адгезию между армирующими элементами и матрицей [2, 3]. В результате на поверхности волокна возникает так называемый аппретирующий слой [4, 5], через который в последующем и происходит механическое и физико-химическое взаимодействие материалов волокна и матрицы [6, 7]. Кроме того, такой слой может возникнуть в результате химических связей непосредственно между этими материалами.

Свойства промежуточного слоя между волокном и матрицей существенно влияют на механические и эксплуатационные характеристики композита в целом, несмотря на сравнительно малое значение отношения  $h/r_0$ , где  $h$  — толщина слоя, а  $r_0$  — радиус поперечного сечения волокна. Для конструкций, выполненных из волокнистых композитов и испытывающих одновременно как механические, так и тепловые воздействия, помимо данных о механических характеристиках композита важно располагать информацией и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности).

Поскольку промежуточный слой между волокном и матрицей оказывает определенное влияние на их тепловое взаимодействие [8], то это влияние необходимо учитывать при оценке эффективного коэффициента теплопроводности композита, но неопределенность задачи связана с тем, что теплофизические свойства промежуточного слоя после завершения технологических этапов изготовления композита трудноопределимы. В данной работе принято предположение о непрерывном изменении по толщине промежуточного слоя его коэффициента теплопроводности в интервале между значениями таких коэффициентов для волокна и матрицы.

**Математическая модель теплового взаимодействия волокна и матрицы.** Рассмотрим вариант волокнистого композита, все волокна в котором являются достаточно длинными по сравнению с  $r_0$  и ориентированы в одном направлении. При существующем различии между коэффициентами теплопроводности волокна и матрицы такой композит будет анизотропным по отношению к свойству теплопроводности. В случае изотропной матрицы с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$

и трансверсально изотропных волокон композит также будет иметь свойство трансверсальной изотропии [9], т.е. значение  $\lambda_{\parallel}$  его эффективного коэффициента теплопроводности в направлении расположения волокон будет в общем случае отличаться от значения  $\lambda_{\perp}$  этого коэффициента в любом направлении, перпендикулярном волокнам.

Для оценки значения  $\lambda_{\perp}$  построим математическую модель процесса переноса тепловой энергии в композите применительно к представительному элементу его структуры в виде достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы. Поперечное сечение этой частицы включает в себя соответствующий волокну круг радиусом  $r_0$ , окруженный кольцевым промежуточным слоем с внешним радиусом  $r_1 = r_0 + h$ , в свою очередь окруженный изотропным слоем матрицы с внешним радиусом  $r_m$ . Составная частица в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала, коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\perp}$  которого подлежит определению как одна из двух эффективных характеристик теплопроводности композита, т.е. макроскопически однородного материала. Таким образом, модель структуры композита содержит четыре фазы: волокно, промежуточный слой, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. При этом для объемной концентрации волокон с учетом промежуточного слоя будет справедливо равенство  $C_V = r_1^2/r_m^2$ .

Центр поперечного сечения составной частицы поместим в начале полярной системы координат, обозначив через  $r$  и  $\varphi$  радиальную и угловую координаты соответственно. Примем, что на большом расстоянии  $r \gg r_m$  от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси, от которой происходит отсчет угловой координаты, т.е. при  $r \rightarrow \infty$  установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция  $T_{\infty}(r, \varphi) = Gr \cos \varphi$ , где  $G$  — модуль вектора градиента. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

По мере приближения к составной частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным слагаемым  $\Delta T(r, \varphi) = (B/r) \cos \varphi$ , где  $B$  — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \varphi) = T_{\infty}(r, \varphi) + \Delta T(r, \varphi) = (Gr + B/r) \cos \varphi. \quad (2)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в слое матрицы

$$T_m(r, \varphi) = (A_m r + B_m/r) \cos \varphi \quad (3)$$

и в волокне

$$T^\circ(r, \varphi) = (A^\circ r + B^\circ/r) \cos \varphi, \quad (4)$$

причем в силу ограниченности температуры в центре волокна  $B^\circ = 0$ .

В промежуточном слое с зависящим от радиальной координаты  $r$  коэффициентом  $\lambda_\perp^*(r)$  теплопроводности в направлении, перпендикулярном волокнам, распределение температуры  $T^*(r, \varphi)$  должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_\perp^* r \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\perp^*}{r^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5)$$

Положим  $T^*(r, \varphi) = f(r) \cos \varphi$  и после подстановки в уравнение (5) получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$f'' + (1/r + (\lambda_\perp^*)'/\lambda_\perp^*) f' - (2/r^2) f = 0 \quad (6)$$

второго порядка относительно неизвестной функции  $f(r)$  (штрих означает производную по  $r$ ).

Непрерывное изменение коэффициента теплопроводности промежуточного слоя представим зависимостью  $\lambda_\perp^*(r) = \lambda_* \exp(ar)$ , удовлетворяющей условиям  $\lambda_\perp^\circ = \lambda_* \exp(ar_0)$  и  $\lambda_m = \lambda_* \exp(ar_1)$ , где  $\lambda_\perp^\circ$  — коэффициент теплопроводности волокна в радиальном направлении. Из этих условий следует, что  $ar_1 = -(\ln \bar{\lambda})/(1 - r_0/r_1)$  и  $\lambda_* = \lambda_m \exp(ar_1)$ , где  $\bar{\lambda} = \lambda_\perp^\circ/\lambda_m$ . Тогда ОДУ (6) можно представить в виде  $(f' + (a + 1/r)f)' = 0$  и после интегрирования получить ОДУ  $f' + (a + 1/r)f = A^* = \text{const}$  первого порядка, решением которого будет [10]

$$f(r) = \left( B^* + A^* \int e^{F(r)} dr \right) e^{-F(r)}, \quad F(r) = \int (a + 1/r) dr = ar + \ln r,$$

где  $B^* = \text{const}$ . Если учесть, что

$$\int e^{F(r)} dr = \int r e^{ar} dr = \left( \frac{r}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ar},$$

то в итоге распределение температуры в промежуточном слое примет вид

$$T^*(r, \varphi) = (A^*/a)(1 - 1/(ar)) \cos \varphi + (B^*/r) e^{-ar} \cos \varphi. \quad (7)$$

В равенства (2)–(4) и (7) входят шесть неизвестных коэффициентов  $B$ ,  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $A^\circ$ ,  $A^*$  и  $B^*$ , которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях радиусами  $r_0$ ,  $r_1$  и  $r_m$ . При

$r = r_0$  из условий непрерывности распределения температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока следует

$$T^\circ(r_0, \varphi) = T^*(r_0, \varphi), \quad \partial T^\circ / \partial r \Big|_{r=r_0} = \partial T^* / \partial r \Big|_{r=r_0}.$$

Отсюда, используя равенства (4) и (7), находим

$$A^\circ = (A^*/\alpha)(1 - 1/\alpha) + B^*\varepsilon/r_0^2, \quad A^\circ = A^*/\alpha^2 - B^*(1 + \alpha)\varepsilon/r_0^2, \quad (8)$$

где  $\alpha = ar_0$  и  $\varepsilon = \exp(-\alpha)$ . Из аналогичных условий при  $r = r_1$  с учетом формул (3) и (7) следует

$$\frac{A^*}{\alpha_*} \left(1 - \frac{1}{\alpha_*}\right) + \frac{B^*\varepsilon_*}{r_1^2} = A_m + \frac{B_m}{r_1^2}, \quad \frac{A^*}{\alpha_*^2} - B^*\varepsilon_* \frac{1 + \alpha_*}{r_1^2} = A_m - \frac{B_m}{r_1^2}, \quad (9)$$

где  $\alpha_* = \alpha r_1/r_0$  и  $\varepsilon_* = \exp(-\alpha_*)$ . Наконец, из подобных условий при  $r = r_m$  и соотношений (2) и (3) получим

$$A_m + B_m/R_m^2 = G + B/r_m^2, \quad A_m - B_m/r_m^2 = \tilde{\lambda}_\perp(G - B/r_m^2), \quad (10)$$

где  $\tilde{\lambda}_\perp = \lambda_\perp/\lambda_m$ .

Последовательным исключением из равенств (8)–(10) неизвестных коэффициентов можно получить выражение для коэффициента  $B$ , которое является весьма громоздким. Если в модели композита представительный элемент его структуры в виде составной цилиндрической частицы радиусом  $r_m$  заменить равновеликим цилиндром из однородного материала с искомым значением  $\lambda$  коэффициента  $\lambda_\perp$  теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном волокнам, то возмущение температурного поля в окружающем эту частицу однородном материале, пропорциональное коэффициенту  $B$ , должно исчезнуть. Тогда из условия  $B = 0$  получим

$$\tilde{\lambda}_\perp = (Q - SC_V)/(Q + SC_V), \quad (11)$$

где  $Q = \alpha_*(\alpha + 2) - \bar{\lambda}\alpha_*(2 - \alpha)$ ,  $S = (\alpha + 2)(\alpha_* - 2) + \bar{\lambda}(\alpha_* + 2)(2 - \alpha)$ . При отсутствии промежуточного слоя ( $r_1 = r_0$ ) равенство (11) путем предельного перехода при  $\alpha \rightarrow \infty$  можно привести к формуле

$$\tilde{\lambda}_\perp^\circ = (1 + \bar{\lambda} - (1 - \bar{\lambda})C_V)/(1 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V). \quad (12)$$

Эффективный коэффициент  $\lambda_\parallel$  теплопроводности композита в направлении расположения волокон в случае их достаточно большой по сравнению с  $r_0$  длины можно представить на основе смесевой модели [11] в виде

$$\lambda_\parallel = (1 - C_V)\lambda_m + C_V(r_0/r_1)^2\lambda_\parallel^\circ + C_V \frac{2}{r_1^2} \int_{r_0}^{r_1} \lambda_\parallel^*(r)rdr, \quad (13)$$

где  $\lambda_\parallel^\circ$  — коэффициент теплопроводности волокна в направлении его длины, а  $\lambda_\parallel^*$  — коэффициент теплопроводности промежуточного

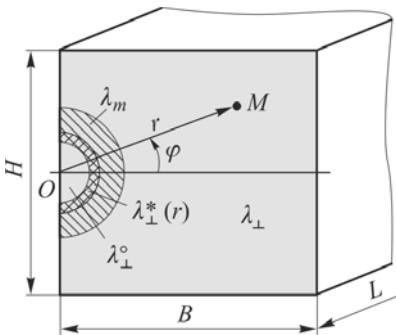
слоя в этом же направлении, в общем случае переменный по толщине этого слоя. Если аналогично формуле для  $\lambda_{\perp}^*$  непрерывное изменение  $\lambda_{\parallel}^*$  представить зависимостью  $\lambda_{\parallel}^*(r) = \lambda^* \exp(a^*r)$ , удовлетворяющей условиям  $\lambda_{\parallel}^{\circ} = \lambda^* \exp(a^*r_0)$  и  $\lambda_m = \lambda^* \exp(a^*r_1)$ , где  $a^*r_1 = -\ln \bar{\lambda}_{\parallel} / (1 - r_0/r_1)$ ,  $\lambda^* = \lambda_m \exp(a^*r_1)$  и  $\bar{\lambda}_{\parallel} = \lambda_{\parallel}^{\circ} / \lambda_m$ , то вместо равенства (13) можно записать:

$$\tilde{\lambda}_{\parallel} = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_m} = 1 - C_V + C_V \frac{r_0^2}{r_1^2} \bar{\lambda}_{\parallel} + 2C_V \frac{a^*r_1 - 1 - (a^*r_0 - 1)\bar{\lambda}_{\parallel}}{(a^*r_1)^2}. \quad (14)$$

При отсутствии промежуточного слоя ( $r_0 \rightarrow r_1$  и  $a^* \rightarrow \infty$ ) формула (14) переходит в равенство  $\tilde{\lambda}_{\parallel}^{\circ} = 1 - C_V + C_V \bar{\lambda}$ , из которого следует, что  $\tilde{\lambda}_{\parallel}^{\circ} < \tilde{\lambda}_{\parallel}$  при  $\bar{\lambda} < 1$  и  $\tilde{\lambda}_{\parallel}^{\circ} > \tilde{\lambda}_{\parallel}$  при  $\bar{\lambda} > 1$ .

**Построение двусторонних оценок.** Для оценки возможной погрешности формул (11) и (14) используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [12,13], позволяющую получить двусторонние оценки эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого композита. Область  $V$ , содержащую представительный элемент в виде половины составной частицы радиусом  $r_m$ , выберем в форме прямоугольного параллелепипеда длиной  $L \gg r_m$  и высотой  $H \gg r_m$ , поперечное сечение которого плоскостью, перпендикулярной волокну, показано на рис. 1.

Сначала оценим возможную погрешность формулы (11), приняв температуру боковой грани параллелепипеда, соответствующей в полярных координатах значению  $\varphi = \pi/2$ , за нуль отсчета, а температуру противоположной грани, точки на которой имеют координаты  $r \cos \varphi = B$ ,  $B \gg r_m$ , положим равной  $T_0 = GH$ . Остальные грани параллелепипеда считаем идеально теплоизолированными. Однородный материал в части области  $V$  вне составной частицы имеет



**Рис. 1. Модель структуры композита для построения двусторонних оценок**

коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{\perp}$  и  $\lambda_{\parallel}$ . Таким образом, в неоднородной области  $V$  объемом  $V_0 = BHL$ , ограниченной поверхностью  $S$ , распределение температуры  $T(M)$  и коэффициент теплопроводности  $\Lambda(M)$  являются функциями координат точки  $M \in V$ , причем функция  $\Lambda(M)$  — кусочно-постоянная и принимает значения  $\lambda_{\perp}^{\circ}$  при  $r \leq r_0$ ,  $\lambda^*(r) = \lambda_* \exp(ar)$  при  $r_0 \leq r \leq r_1$ ,  $\lambda_m$  при  $r_1 \leq r \leq r_m$  и  $\lambda_{\perp}$  при  $r \geq r_m$ .

Примем в качестве допустимого для минимизируемого функционала [13]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \Lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M), \quad (15)$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона, линейное по ширине параллелепипеда распределение температуры с постоянной составляющей градиента  $G$ . В этом случае из формулы (15) получим

$$J_1[T] = \frac{G^2 L}{2} \times \left( \lambda_{\perp} B H - \frac{\pi r_m^2}{2} \lambda_{\perp} + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2} \lambda_m + \pi \lambda_* \int_{r_0}^{r_1} r e^{ar} dr + \pi \frac{r_0^2}{2} \lambda_{\perp}^{\circ} \right). \quad (16)$$

Для максимизируемого функционала [13]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P) \mathbf{q}(P) \cdot \mathbf{n}(P) dS(P), \quad P \in S, \quad (17)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$ , в качестве допустимого распределения вектора  $\mathbf{q}$  плотности теплового потока примем постоянное значение  $q = -\lambda_{\perp} G$  единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной боковым граням параллелепипеда. Тогда формула (17) примет вид

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda_{\perp} G)^2 L}{2} \times \left( \frac{B H - \pi r_m^2 / 2}{\lambda_{\perp}} + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2 \lambda_m} + \frac{\pi}{\lambda_*} \int_{r_0}^{r_1} r e^{-ar} dr + \pi \frac{r_0^2}{2 \lambda_{\perp}^{\circ}} \right) + \lambda_{\perp} G_0^2 B H L. \quad (18)$$

Принятые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения  $J_1[T]$  и  $I_1[q]$  не будут совпадать, причем  $J_1[T] > I_1[q]$ . В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение  $J_0^* = (\lambda_{\perp} / 2) G^2 B H L$  минимизируемого функционала (15) для однородной области с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{\perp}$ . Тогда при  $(r_1 / r_m)^2 = C_V$  с учетом формулы (16) из условия  $J_1[T] \geq J_0$  получим для безразмерного отношения  $\tilde{\lambda}_{\perp} = \lambda_{\perp} / \lambda_m$  верхнюю оценку

$$\tilde{\lambda}_{+} = 1 - C_V + 2C_V (ar_1 - 1 - (ar_0 - 1)\bar{\lambda}) / (ar_1)^2 + \bar{\lambda} (r_0^2 / r_1^2) C_V \geq \tilde{\lambda}_{\perp}, \quad (19)$$

а при использовании формулы (18) из условия  $I_1[q] \leq J_0$  найдем нижнюю оценку

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_- &= \\ &= 1/(1-C_V+2C_V((ar_0+1)/\bar{\lambda}-ar_1-1)/(ar_1)^2+C_V(r_0/r_1)^2/\bar{\lambda}) \leq \tilde{\lambda}_\perp. \end{aligned} \quad (20)$$

При оценке возможной погрешности формулы (14) будем рассматривать ту же неоднородную область  $V$  в виде прямоугольного параллелепипеда (см. рис.1), но теперь идеально теплоизолированными считаем его верхнюю, нижнюю и две боковые грани с площадями  $HL$ . Коэффициенты теплопроводности  $\lambda_\perp$ ,  $\lambda_\perp^\circ$  и  $\lambda_\perp^*$  для этой области следует заменить соответственно на  $\lambda_\parallel$ ,  $\lambda_\parallel^\circ$  и  $\lambda_\parallel^*$ . Для минимизируемого функционала (15) в качестве допустимого примем распределение температуры с постоянным вектором градиента, направленным вдоль оси цилиндрической составной частицы и имеющим модуль  $G_0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} J_2[T] &= \\ &= \frac{G_0^2 L}{2} \left( \lambda_\parallel BH - \frac{\pi r_m^2}{2} \lambda_\parallel + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2} \lambda_m + \pi \lambda^* \int_{r_0}^{r_1} r e^{ar} dr + \pi \frac{r_0^2}{2} \lambda_\parallel^\circ \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Для максимизируемого функционала (17) в данном случае допустимо рассматривать распределение вектора  $\mathbf{q}$  плотности теплового потока с постоянным значением  $q_0 = -\lambda_\parallel G_0$  единственной составляющей этого вектора, параллельной волокнам. На одной из боковых граней площадью  $BH$  температуру примем за нуль отсчета, а температуру противоположной грани зададим равной  $G_0 L$ . При этом формула (17) примет вид

$$\begin{aligned} I_2[q] &= -\frac{(\lambda_\parallel G_0)^2 L}{2} \times \\ &\times \left( \frac{BH - \pi r_m^2/2}{\lambda_\parallel} + \pi \frac{r_m^2 - r_1^2}{2\lambda_m} + \frac{\pi}{\lambda_*} \int_{r_0}^{r_1} r e^{-ar} dr + \pi \frac{r_0^2}{2\lambda_\perp^\circ} \right) + \\ &+ \lambda_\parallel G^2 BHL. \end{aligned} \quad (22)$$

Для однородной области  $V$  с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_\parallel$  функционал (15) примет теперь значение  $J_0^* = (\lambda_\parallel/2)G_0^2 BHL$  и в силу экстремальных свойств функционалов (15) и (17) будет справедливо неравенство  $J_2[T] \geq J_0^* \geq I_2[q]$ , которое с учетом формул (21) и (22) приведет к следующим двусторонним оценкам безразмерного





среднем более высокой теплопроводностью в радиальном направлении по сравнению с волокном, при замене этого слоя материалом волокна относительный эффективный коэффициент  $\tilde{\lambda}_{\perp}^{\circ}$  теплопроводности композита становится несколько меньше значения  $\tilde{\lambda}_{\perp}$  и поэтому для фиксированных значений  $\bar{\lambda} < 1$ . Штриховые линии на рис. 2, а расположены ниже сплошных линий. Однако в целом можно считать, что при  $\bar{\lambda} < 1$  и выбранном для примера отношении  $r_0/r_1$  влияние промежуточного слоя на значение  $\lambda_{\perp}$  достаточно мало.

Для современных композитов с полимерной матрицей и высокомодульными волокнами [2] характерно неравенство  $\bar{\lambda} > 1$ . Например, для композита с арамидными волокнами (кевлар-49) и эпоксидной матрицей  $\bar{\lambda} \approx 30$  [3]. Это обстоятельство приводит к более существенному влиянию промежуточного слоя на значение  $\lambda_{\perp}$  для композита в целом. На рис. 2, б с использованием прежних обозначений представлены результаты расчетов при  $r_0/r_1 = 0,9$  и различных значениях  $\bar{\lambda} > 1$ . Видно, что разность между результатами расчетов по формулам (11) и (12) растет по мере возрастания  $C_V$  и  $\bar{\lambda}$ . По-прежнему, каждая сплошная кривая для зависимости  $\lambda_{\perp}$  от  $C_V$  при фиксированном значении параметра  $\bar{\lambda}$  лежит в полосе между соответствующими штрихпунктирной и штриховой линиями, но теперь с увеличением  $C_V$  и  $\bar{\lambda}$  расширение этой полосы происходит более интенсивно, что указывает на возможный рост погрешности расчетов по формуле (11). Но поскольку значение  $\tilde{\lambda}_{+}$  является достоверной верхней оценкой возможного значения  $\tilde{\lambda}_{\perp}$ , различие между значениями  $\tilde{\lambda}_{\perp}$  и  $\tilde{\lambda}_{\perp}^{\circ}$  уже при  $\bar{\lambda} \geq 3$  требует учитывать влияние промежуточного слоя между волокном и матрицей.

Двусторонние оценки относительного эффективного коэффициента  $\tilde{\lambda}_{\parallel}$  теплопроводности композита в направлении, параллельном волокнам, определяемые соотношением (23), отличаются от оценок по формулам (19) и (20) для коэффициента  $\tilde{\lambda}_{\perp}$  лишь индексами  $\parallel$  и  $\perp$  в обозначениях определяющих параметров. Поэтому штрихпунктирные и штриховые линии на рис. 2 и 3 характеризуют и зависимости от  $C_V$  оценок для  $\tilde{\lambda}_{\parallel}$ , причем в этом случае верхняя оценка совпадает со значением  $\tilde{\lambda}_{\parallel}$ . Различие между значениями  $\tilde{\lambda}_{\parallel}$  и  $\tilde{\lambda}_{\parallel}^{\circ}$  при этом идентично различию между значениями  $\tilde{\lambda}_{\perp}$  и  $\tilde{\lambda}_{\perp}^{\circ}$ .

**Заключение.** Наличие в волокнистом композите промежуточного слоя между волокном и матрицей, предназначенного для улучшения механического взаимодействия между ними, влияет на процесс переноса тепловой энергии в таком композите. Построенная математическая модель теплового взаимодействия волокна и матрицы, учитывающая влияние промежуточного слоя с непрерывным изменени-

ем теплопроводности по его толщине, позволила получить расчетные зависимости для эффективных коэффициентов теплопроводности композита как трансверсально изотропного материала, армированного анизотропными волокнами, ориентированными в одном направлении. Сопоставлением результатов расчетов с двусторонними оценками этих коэффициентов, установленными с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле, выявлена достаточная для практики степень достоверности полученных зависимостей. Показано, что влияние промежуточного слоя между волокном и матрицей существенно возрастает с ростом объемной концентрации волокна и параметра  $\bar{\lambda} > 1$ .

*Работа выполнена по гранту НШ–255.2012.8 программы государственной поддержки ведущих научных школ и гранту Президента РФ (МК-6618.2013.8) государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Композиционные материалы: Справочник* / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Бологин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
2. *Комков М.А., Тарасов В.А.* Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 431 с.
3. *Справочник по композиционным материалам* / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2 т. М.: Машиностроение, 1988. 488 с. (1 т.).
4. *Поверхности раздела в полимерных композитах* / под ред. Э. Плюдемана; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 294 с.
5. *Поверхности раздела в металлических композитах* / под ред. А. Меткалфа; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 437 с.
6. *Разрушение тонких пленок и волокон* / Б. Цой, Э.М. Карташов, В.В. Шевелев, А.А. Валишин. М.: Химия, 1977. 343 с.
7. *Физика композиционных материалов* / Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов и др. / под общ. ред. Н.Н. Трофимова. В 2 т. М.: Мир, 2005. 456 с. (1 т.), 344 с. (2 т.).
8. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Теплопроводность композитов с шаровыми включениями // LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. 77 с.
9. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
10. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 304 с.
11. *Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Смесевые модели механики композитов. Ч.1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
12. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 329 с.
13. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

## REFERENCES

- [1] Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V., Alfutov N.A., Beil' A.I., Bunakov V.A., Dymkov I.A., Ermolenko A.F., Zhigun I.G., Zinov'ev P.A., Kintsis I.I., Kleimenov V.V., Kruklin'sh A.A., Kul'kov A.A., Manuylov V.F., Popov B.G., Portnov G.G., Sirotkin O.S., Skudra A.M., Solov'ev I.A., Tamopol'skiy Y.M., Tsarakhov K.S. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite Materials Handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 512 p.
- [2] Komkov M.A., Tarasov V.A. Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruktsiy raket i sredstv porazheniya. [Winding technology for composite structures of missiles and weapons]. Moscow. MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2011. 431 p.
- [3] Lubin G. Handbook of composites. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p. (Russ. ed.: Liubin D. Spravochnik po kompozitsionnym materialam. Moscow, Mashinostroenie Publ., vol. 1, 1988. 488 p.)
- [4] Broutman L.J., Krock R.H. Plueddemann E.P. Composite materials. Vol. 6. Interfaces in polymer matrix composites. Academic Press, 1974. 294 p. (Russ. ed.: Brautman L., Krok R., Plyudeman E. Kompozitsionnye materialy. Tom 6. Poverkhnosti razdela v polimernykh kompozitakh. Moscow, Mir Publ., 1978, 294 p.)
- [5] Metcalf A.G. Interfaces in metal matrix composites. Academic Press, 1974. 421 p. (Russ. ed.: Metkalf A. Poverkhnosti razdela v metallicheskiykh kompozitakh. Moscow, Mir Publ., 1978. 437 p.)
- [6] Tsoy B., Kartashov E.M., Shevelev V.V., Valishin A.A. Razrushenie tonkikh plenok i volokon [The destruction of thin films and fibers]. Moscow, Khimiya Publ., 1977. 343 p.
- [7] Trofimov N.N., Kanovich M.Z., Kartashov E.M., Natrusov V.I., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G., Sokolov V.I., Simonov-Emelyanov I.D. Fizika kompozitsionnykh materialov [Physics of composite materials]. In 2 volumes. Moscow, MIR Publ., 2005. 456 p. (vol. 1), 344 p. (vol. 2).
- [8] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Y. Teploprovodnost' kompozitov s sharovymi vklyucheniymi [Thermal conductivity of composites with spherical inclusions]. Moscow, LAP Lambert Acad. Publ., 2013. 77 p.
- [9] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [10] Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po lineynym obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Handbook on linear ordinary differential equations]. Moscow, Faktorial Publ., 1997. 304 p.
- [11] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The mixture models of the mechanics of composites. Part 1. Thermomechanics and thermoelasticity of a multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im.N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36-49 (in Russ).
- [12] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 329 p.
- [13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.

Статья поступила в редакцию 17.04.2013

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savelieva — Cand. Sci. (Phys.-Math.) assoc. professor of the “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conduction.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.