

С. С. К л е н и к о в, Т. А. Ф о м и н а

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРУЖИННОГО ПАКЕТА ВОЛНОВОГО ШАГОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

Наиболее нагруженным элементом волнового шагового двигателя является гибкое зубчатое колесо. Активной нагрузкой для гибкого колеса являются импульсы радиальных сил, передаваемых на него от волнообразователя. При расчете гибких колец пружинного пакета методом конечных элементов используется теория плоских круговых колец с учетом условий их сопряжения. Задачей исследования является определение деформированной формы пружинного пакета в результате действия переменных по времени импульсов радиальных сил.

E-mail: fota@bk.ru

Ключевые слова: волновой шаговый двигатель, импульсы сил, волна деформирования, метод конечных элементов.

Основные понятия. Гибкое колесо волнового шагового двигателя (ВШД), описание которого приведено в работе [1], представляется в виде совокупности плоских концентрических круговых колец, соединенных между собой жесткими перемычками (рис. 1). Далее описанная совокупность обозначается как пружинный пакет.

Внешнее кольцо пружинного пакета имеет зубчатый венец. Расчет деформаций зубчатого венца гибкого колеса с учетом реальной геометрии зубьев является сложной задачей. Однако при определении деформированных форм колец и сил взаимодействия между элементами волнового зацепления расчетную схему можно упростить, заменив зубчатый венец гладким круговым кольцом с эквивалентной толщиной h_3 . Это дает возможность при расчете гибких колец пружинного



Рис. 1. Пружинный пакет:

1 — жесткая корпусная деталь; 2 — гибкое тонкостенное кольцо; 3 — гибкий зубчатый венец; 4 — жесткие перемычки

пакета использовать теорию плоских круговых колец с учетом условий их сопряжения.

Задача о изменении формы колец под нагрузкой решается с помощью дифференциальных уравнений упругих линий нерастяжимых колец. Для каждого из колец уравнение имеет вид

$$EI_x \left(\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) = -r^3 \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m \right) - r^4 \left(\frac{dq_r}{d\varphi} + q_t \right), \quad (1)$$

где v – окружные перемещения; φ – угловая координата; EI_x – изгибная жесткость соответствующего кольца; r – радиус его средней линии; $w = -\frac{dv}{d\varphi}$ – радиальные перемещения; $\theta = \frac{1}{r} \left(v + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right)$ – угол поворота нормали; q_r – радиальная распределенная нагрузка; q_t – тангенциальная, или окружная распределенная нагрузка; m – распределенный изгибающий момент (рис. 2).

Матрицы жесткости, масс и демпфирования конечного элемента. Решение динамической задачи системы из k колец ($k = 1, 2, 3 \dots$ – число колец в пружинном пакете) предполагает решение матричного дифференциального уравнения

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}, \quad (2)$$

где $[M]$ – матрица масс; $[C]$ – матрица сопротивления (демпфирования); $[K]$ – матрица жесткости; $\{P\}$ – вектор внешней нагрузки на систему; $\{\ddot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{q\}$ – векторы обобщенных ускорений, скоростей и перемещений узлов конечных элементов.

Зная глобальные матрицы жесткости и масс системы, из решения системы дифференциальных уравнений (2) в любой заданный момент времени можно определить состояние системы в зависимости от действия приложенных динамических сил.

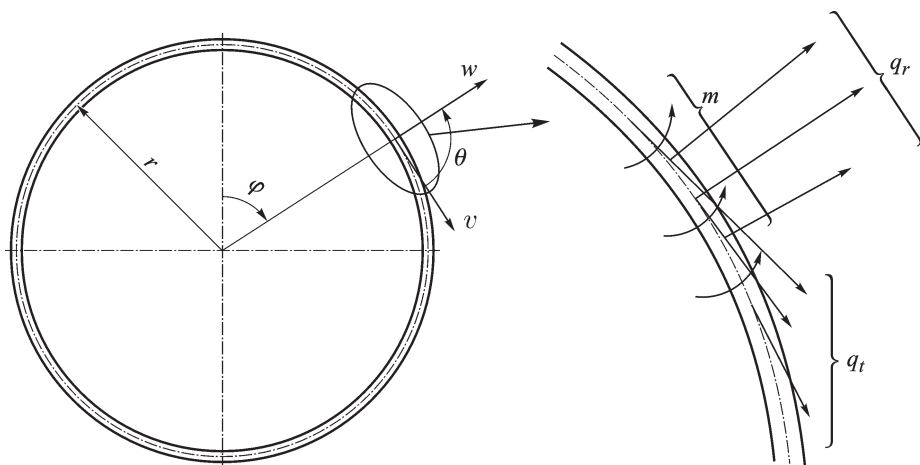


Рис. 2. Кольцо пружинного пакета

Глобальные матрицы жесткости и масс формируются из соответствующих локальных матриц для элементов колец и жестких перемычек.

Для решения стационарной задачи (1) в работе [2] использована конечно-элементная модель. Конечным элементом в модели является криволинейный стержень — дуга радиуса r с углом, изменяющимся от φ_1 до φ_2 . Функции формы имеют вид

$$N_k = N_k(\varphi, r, C_k) = C_{k1} + C_{k2}\varphi + (C_{k3} + C_{k4}\varphi) \cos \varphi + (C_{k5} + C_{k6}\varphi) \sin \varphi, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (3)$$

где $C_k = C_{k1}, \dots, C_{k6}$ — константы, определяемые из граничных условий для каждого конечного элемента.

Значения окружных и радиальных перемещений любой точки кольца вычисляются по узловым перемещениям и матрице перемещений по формуле

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = [N(\varphi)] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $v_i = \delta_1$; $w_i = \delta_2$; $\theta_i = \delta_3$; $v_j = \delta_4$; $w_j = \delta_5$; $\theta_j = \delta_6$; $v_i, w_i, \theta_i, v_j, w_j, \theta_j$ — узловые перемещения конечного элемента;

$$[N(\varphi)] = \begin{bmatrix} \frac{N_1(\varphi)}{dN_1(\varphi)} \frac{dN_1(\varphi)}{d\varphi} & \frac{N_2(\varphi)}{dN_2(\varphi)} \frac{dN_2(\varphi)}{d\varphi} & \frac{N_3(\varphi)}{dN_3(\varphi)} \frac{dN_3(\varphi)}{d\varphi} & \frac{N_4(\varphi)}{dN_4(\varphi)} \frac{dN_4(\varphi)}{d\varphi} & \frac{N_5(\varphi)}{dN_5(\varphi)} \frac{dN_5(\varphi)}{d\varphi} & \frac{N_6(\varphi)}{dN_6(\varphi)} \frac{dN_6(\varphi)}{d\varphi} \end{bmatrix}.$$

В работе [3] показано, что элементы матрицы жесткости для элементов каждого кольца можно записать как

$$k_{ij} = \frac{EJ}{r^3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ (N_i''' + N_i) (N_j''' + N_j) \} d\varphi, \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (5)$$

При построении зависимости для вычисления элементов матрицы масс в настоящей работе используется формула

$$m_{ij} = \int_{V_e} [N_i]^T \rho [N_j] dV, \quad (6)$$

где V_e — объем конечного элемента; $dV = F dl = Fr d\varphi$ (F — площадь поперечного сечения того или иного кольца).

В предположении, что плотность колец постоянна ($\rho = \text{const}$), выражение для элемента матрицы масс запишется в виде

$$m_{ij} = \rho Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [N_i]^T [N_j] d\varphi = \rho Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi. \quad (7)$$

Аналогичную формулу для элемента матрицы масс можно получить, используя выражение для кинетической энергии

$$E = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M] \{\dot{\delta}\}. \quad (8)$$

Для отдельного элемента кольца формулу кинетической энергии можно представить как

$$E = \frac{\rho F r}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) r d\varphi.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sum_{i=1}^6 N_i \dot{\delta}_i, & \dot{w} &= - \sum_{i=1}^6 \frac{dN_i}{d\varphi} \dot{\delta}_i, \\ \dot{v}^2 &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 N_i N_j \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j, & \dot{w}^2 &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho Fr}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 N_i N_j \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j \right) d\varphi = \\ &= \frac{\rho Fr}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left(N_i N_j \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) \dot{\delta}_i \dot{\delta}_j \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение для кинетической энергии с формулой (8), получаем то же выражение для элементов матрицы масс (7).

Для однородного материала матрицу внутреннего демпфирования можно вычислить через матрицу масс, умножая ее на μ/ρ , где μ — коэффициент демпфирования. Таким образом, элементы матрицы демп-

фирирования вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \mu Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi;$$

элементы матрицы жесткости вычисляются через функции формы следующим образом:

$$k_{ij} = \frac{EJ}{r^3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ (N_i'' + N_i) (N_j'' + N_j) \} d\varphi, \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (9)$$

Элементы матрицы масс через функции формы вычисляются с помощью выражения

$$m_{ij} = \rho Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi; \quad (10)$$

элементы матрицы внутреннего демпфирования вычисляются через функции формы по формуле

$$c_{ij} = \mu Fr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(N_i N_j + \frac{dN_i}{d\varphi} \frac{dN_j}{d\varphi} \right) d\varphi. \quad (11)$$

Матрицы жесткости, масс и демпфирования пружинного пакета. С учетом изложенного, пружинный пакет можно представить в виде совокупности колец, соединенных между собой перемычками. Для каждого кольца в отдельности можно составить матрицы жесткости, масс и демпфирования, используя соотношения (9)–(11) для отдельных конечных элементов. Далее необходимо объединить матрицы для отдельных колец в единую систему для всей конструкции. Полученные соотношения должны учитывать влияние колец друг на друга за счет перемычек, которые могут быть расположены неравномерно.

Перемычка при деформировании пружинного пакета движется как единое целое, поэтому, зная значения перемещений крайних точек перемычки, можно определить положения всех остальных точек.

Иными словами, в месте стыковки колец пружинного пакета должны выполняться следующие условия (рис. 3):

$$v_1 + L\theta_1 = v_2, \quad w_1 = w_2, \quad \theta_1 = \theta_2.$$

При модифицировании матрицы жесткости используется способ, предложенный в работе [2]. Он основан на введении в матрицу жесткости стыковочных условий с помощью больших чисел.

Матрица масс для перемычки вычисляется по формуле (6). Для перемычки $dV = S dl$ (S – площадь поперечного сечения перемычки),

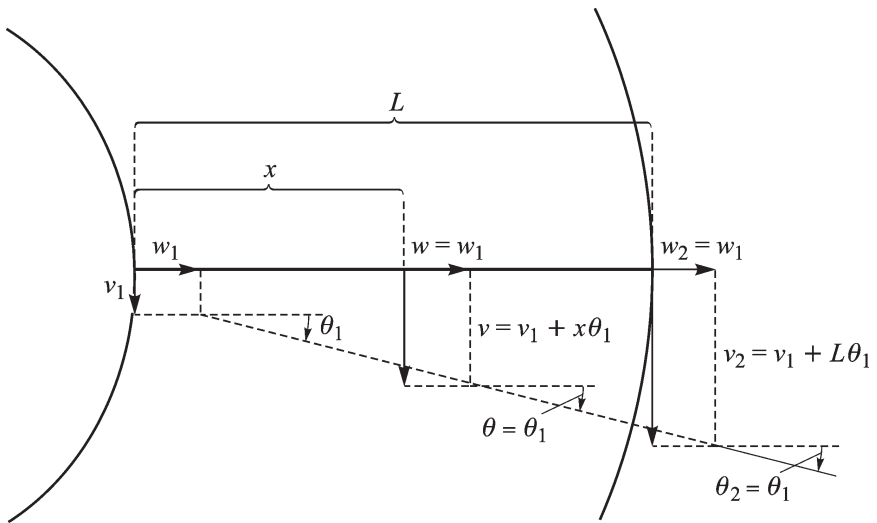


Рис. 3. Перемычка

тогда

$$m_{ij} = \rho S \int_{r_1}^{r_2} [N_i]^T [N_j] dx.$$

Из условий стыковки для смежных колец в зоне перемычки следует, что

$$v = v_1 + x\theta_1 = v_1 + x \left(\frac{v_2 - v_1}{L} \right) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) v_1 + \frac{x}{L} v_2;$$

$$w = w_1 = w_2 = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2;$$

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2} \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2;$$

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = [N(x)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}.$$

Матрица масс для перемычки будет иметь вид

$$[m] = \rho S \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{r_i^3 - r_j^3}{\Delta r^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} (r_i + r_j) - \frac{1}{3} \frac{r_i^3 - r_j^3}{\Delta r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r \\ \frac{1}{2} (r_i + r_j) - \frac{1}{3} \frac{r_i^3 - r_j^3}{\Delta r^2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \frac{r_i^3 - r_j^3}{\Delta r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r & 0 & 0 & \frac{1}{4} \Delta r \end{bmatrix},$$

где r_i и r_j — радиусы большего и малого стыкующихся колец, $\Delta r = r_i - r_j$.

Выражение для элементов матрицы демпфирования перемычки аналогично выражению для матрицы масс.

Матрицы масс и демпфирования для каждого из колец и всех перемычек объединяются в глобальные матрицы системы. Таким образом, строится система дифференциальных уравнений (2).

Численные методы решения задачи динамики. Численное решение системы дифференциальных уравнений (2) возможно несколькими способами, например методом линейного ускорения Вилсона или методом трапеций Кранка–Николсона. В разработанном программном комплексе предпочтение отдается методу обобщенного ускорения Ньюмарка [3].

На каждом шаге определяются значения перемещений, скоростей и ускорений сначала узловых точек, а затем и внутренних. Для получения гладкого решения достаточно n конечных элементов (n должно быть равно числу точек приложения сил, в данном случае $n = 8$) [4].

Значения переменных по времени и направлению импульсов сил в правой части системы (2) являются расчетными. Их значения, вычисляются с помощью модели, описанной в работе [4]. Возможные формы импульсов подаваемых сил (давлений) приведены на рис. 4.

При расчете предполагается, что силы прикладываются к внешнему кольцу ($N3$) пружинного пакета. Внутреннее кольцо ($N1$) является толстостенным, поэтому при расчете оно считается жестко закрепленным (рис. 5). Среднее кольцо ($N2$) получает упругие перемещения через перемычки от внешнего кольца.

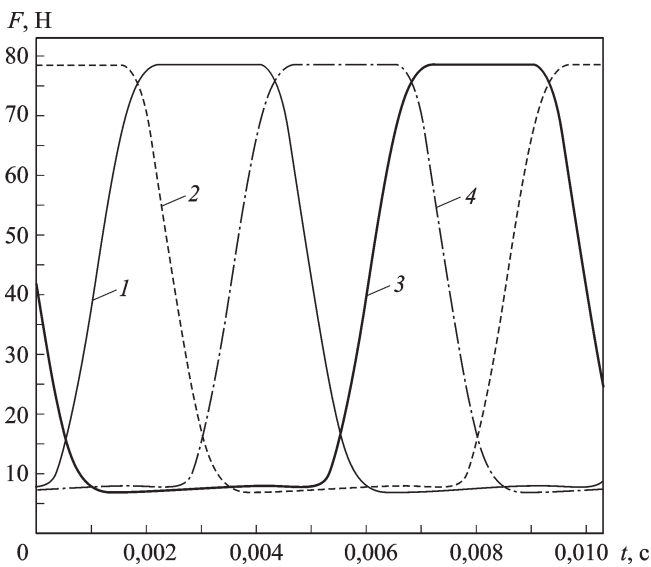


Рис. 4. Гистограмма импульсов сил, подаваемых в полости пружинного пакета ($n = 50$ Гц):

1, 2, 3 и 4 — отверстия № 1, № 2, № 3 и № 4 соответственно

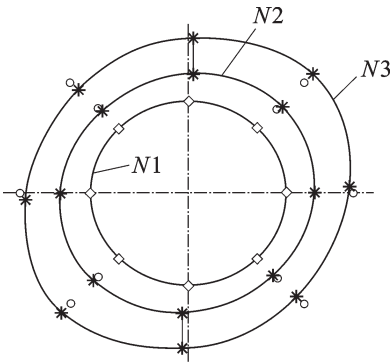


Рис. 5. Деформированная форма колец пружинного пакета

соответствующих второму тону частот колебаний внешнего или второго кольца, решение разваливается. Через резонанс можно пройти, введя в расчет искусственное демпфирование.

На рис. 6, а приведены значения радиальных перемещений w колец пружинного пакета в момент времени $t = 0,001$ с. Частота вращения внутренней части распределителя в рассматриваемом случае принята равной 50 Гц. Там же приведен график зависимости радиальных перемещений, полученный с помощью динамического метода, описанного в работе [2]. Как следует из рис. 6 а, при заданной частоте амплитуды различаются на величину порядка 2...2,5 %.

Графики радиальных перемещений колец в момент времени $t = 0,001$ с при увеличении частоты вращения распределителя и соответствующих импульсов сил приведены на рис. 6, б, . . . , д. На рис. 6, б, в

Как показывают расчеты, деформированная форма кольца не только поворачивается, но и видоизменяется, что обуславливается дискретностью самой системы и дискретностью воздействующих на нее импульсов сил. Кроме того, форма кольца видоизменяется в зависимости от угловой скорости подачи импульсов сил (т.е. частоты вращения внутренней части распределителя) [4].

Без учета демпфирования при угловых скоростях подачи импульсов сил,

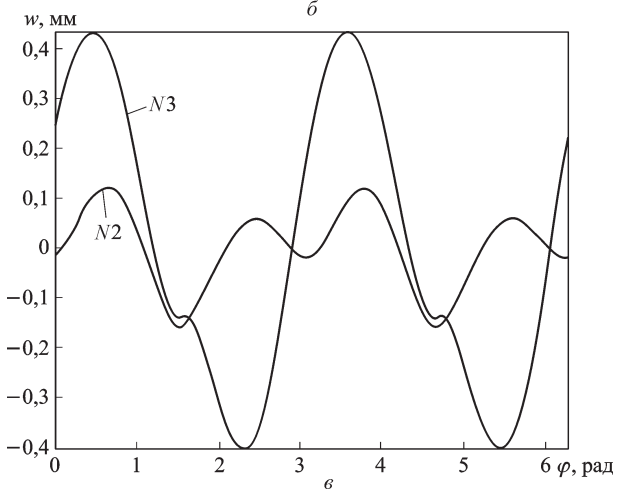
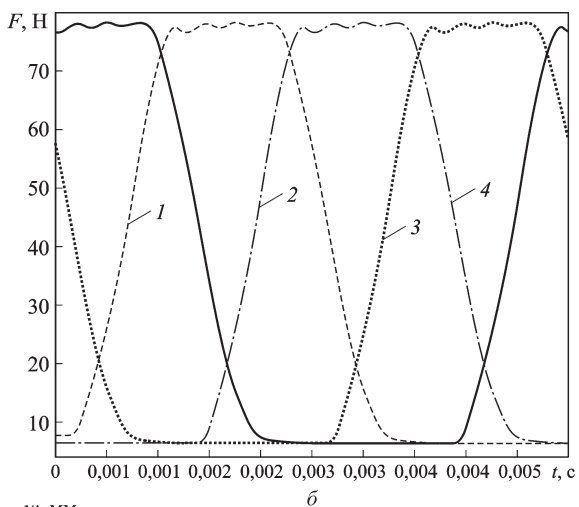
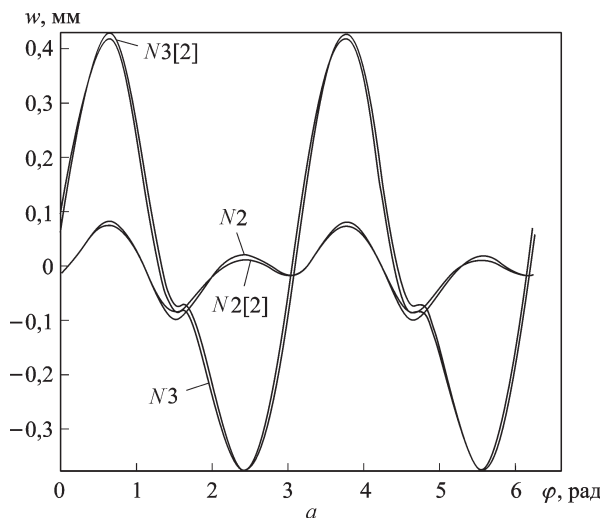
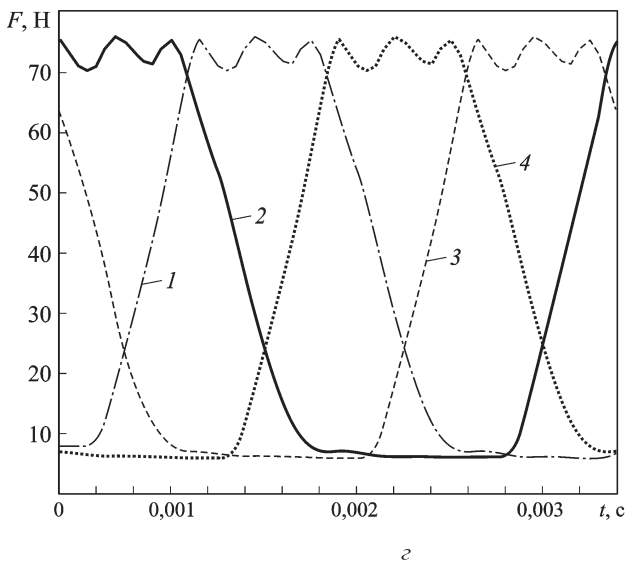
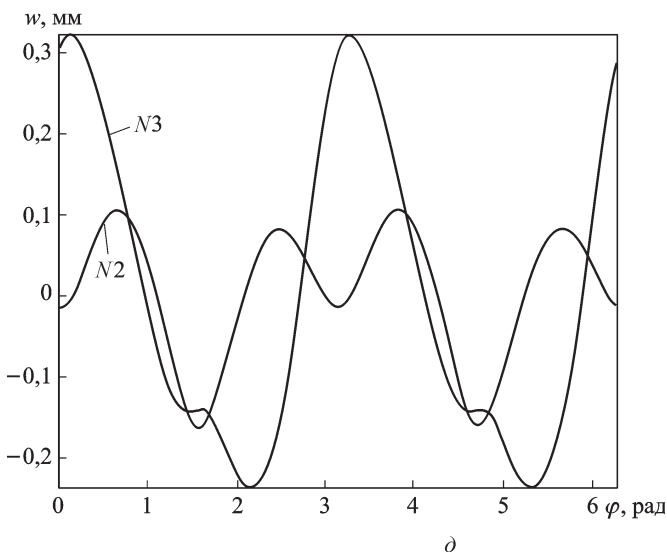


Рис. 6 (начало)



z



∂

Рис. 6 (продолжение)

частота вращения внутренней части распределителя принята равной 100 об/с, на рис. 6, z, ∂ – 167 об/с.

Графики радиальных перемещений внешнего и второго колец пружинного пакета ВШД при частотах вращения внутренней части распределителя, равных 50, 100 и 167 Гц приведены на рис. 6, $e, ж$. В момент времени $t = 0,0025$ с на кольца действуют примерно одинаковые по значению импульсы сил. Из графиков следует, что частота вращения внутренней части распределителя сильно влияет на значения радиальных перемещений колец и, соответственно, на их деформирование.

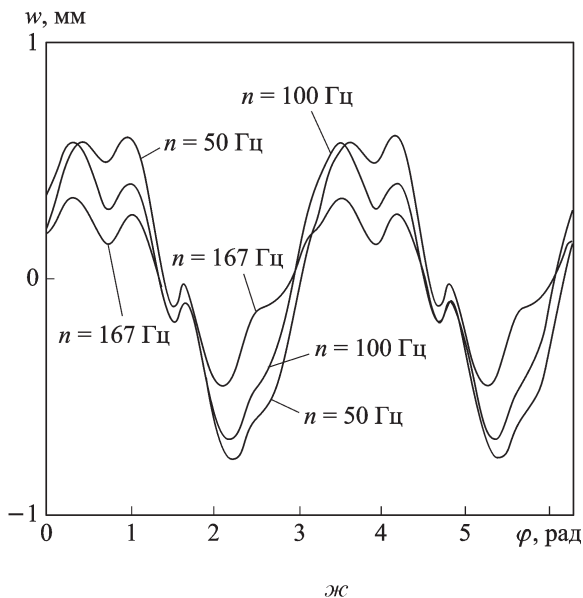
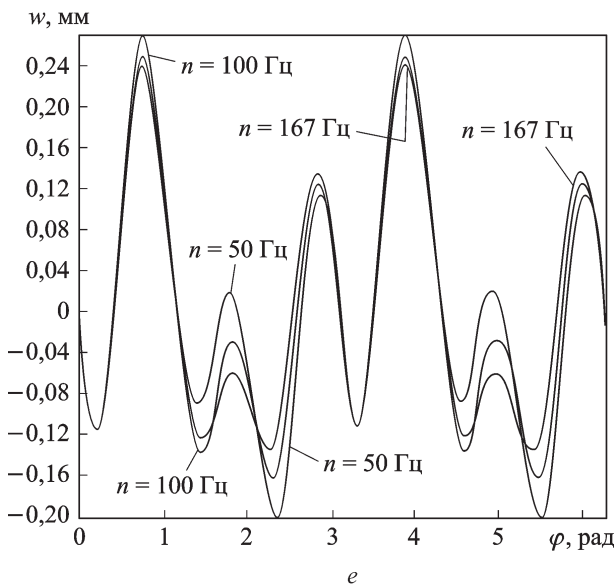


Рис. 6 (окончание). Радиальные перемещения внешнего ($N3$) и среднего ($N2$) колец пружинного пакета и гистограммы импульсов подаваемых сил (δ , ε) при $t = 0,001$ с ($a-d$); $0,0025$ с (ε); $n = 50$ (a); 100 (b, ε); 167 Гц (δ, ε):
 $1, 2, 3, 4$ – силы $N1, N2, N3, N4$ соответственно

Заключение. Приведена последовательность формирования глобальных матриц жесткости, масс и демпфирования для решения методом конечных элементов динамической задачи о деформировании пружинного пакета. При этом в задаче учтено, что импульсы деформирующих сил переменны и их значения в каждый момент времени вычисляются с помощью приложения, приведенного в работе [4]. Ре-

зультаты вычислений приведены в виде графиков радиальных перемещений точек деформируемых колец при разной частоте вращения внутренней части распределителя [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К л е н и к о в С. С., М а й к о в А. И. Разработка математической модели волнового редуктора с круговой формой зубьев и упругими звеньями в виде кольцевых пружинных пакетов // Тез. докл. и выступлений студентов, аспирантов и преподавателей на VII Межвуз. науч.-практ. конф. – М.: МГИУ, 2006. – С. 327–335.
2. К л е н и к о в С. С., М а й к о в А. И. Разработка математической модели расчета пружинного пакета волнового редуктора методом конечных элементов (МКЭ) // Изв. вузов. Машиностроение. – 2008. – № 11. – С. 25–30.
3. Г о л о в а н о в А. И., Т ю л е н е в а О. Н., Ш и г а б у т д и н о в А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.:Физматлит, 2006. – 392 с.
4. Ф о м и н а Т. А. Математическая модель рабочего вещества волнового шагового двигателя // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. – 2010. – № 4. – С.98–107.

Статья поступила в редакцию 6.10.2010



Сергей Сергеевич Клеников родился в 1942 г., окончил МВТУ им. Н.Э.Баумана в 1971 г. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Техническая физика и прикладная механика” в филиале Московского государственного университета приборостроения и информатики в г.Сергиев Посад. Автор около 100 научных работ в области динамики и прочности машин, приборов и аппаратуры.

S.S. Klenikov (b. 1942) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Technical Physics and Applied Mechanics” department of Sergiyev Posad Branch of the Moscow State University. Author of about 100 publications in the field of dynamics and strength of machines, instruments, and apparatus.



Татьяна Александровна Фомина родилась в 1985 г., окончила Московский государственный индустриальный университет в 2007 г. Аспирант, преподаватель кафедры “Прикладная математика и информатика” в филиале Московского государственного университета приборостроения и информатики в г.Сергиев Посад. Автор двух научных работ в области динамики и прочности машин.

T.A. Fomina (b. 1985) graduated from the Moscow State Industrial University in 2007. Post-graduate, teacher of “Applied Mathematics and Information Technologies” department of Sergiyev Posad Branch of the Moscow State University. Author of 2 publications in the field of dynamics and strength of machines.