УДК 539.3:621.01 EDN: HKLJBO

# О СВОЙСТВАХ СИММЕТРИИ РАЗЛИЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**С.В. Цветков** tsvetkovsv@bmstu.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

**Аннотация**

Рассмотрены нелинейные, тензорно-линейные и линейные соотношения, связывающие напряжения и деформации в трансверсально-изотропных материалах. По свойствам симметрии структуры трансверсально-изотропные материалы делятся на пять классов и обозначаются (по Шенфлису) как $D_\infty$, $D_{\infty h}$, $C_\infty$, $C_{\infty v}$, $C_{\infty h}$. Для описания нелинейной связи деформаций и напряжений в трансверсально-изотропных материалах, которые проявляют пластические свойства, получены соотношения с использованием результатов теории тензорных функций. Показано, что для описания пластических свойств трансверсально-изотропных материалов пяти классов достаточно двух видов тензорных функций. При этом использован принцип симметрии, по которому элементы симметрии структуры материала должны содержаться в группе симметрии пластических свойств транверсально-изотропного материала $D_{\infty h}$ или $C_{\infty h}$. Для случая симметрии $C_{\infty h}$ возможны два варианта представления функции: полиномиальный и неполиномиальный. Упрощенные варианты нелинейной связи деформаций и напряжений являются тензорно-линейными (квазилинейными) соотношениями. Для трансверсально-изотропных материалов соотношения получены из нелинейных функций общего вида. Линейные и упруголинейные соотношения являются частными случаями полиномиальных тензорно-линейных соотношений. Показано, что матрицы податливости трансверсально-изотропных материалов имеют одинаковый вид. Упруголинейные соотношения пяти классов трансверсально-изотропных материалов относятся к одному классу симметрии $D_{\infty h}$. Получено, что группа симметрии пластических свойств каждого трансвер-

**Ключевые слова**

*Принципы симметрии, трансверсально-изотропный материал, напряжения, деформация, тензорные функции, инварианты, нелинейные соотношения, линейная упругость*

сально-изотропного материала равна или выше группы симметрии структуры, а группа симметрии упругих свойств материала равна или выше группы пластических свойств

Поступила 07.10.2024
Принята 06.12.2024


**Введение.** Для получения нелинейной связи тензора напряжений $\sigma$ и тензора деформаций $\varepsilon$, которая имеет место в пластически деформируемых материалах, используются различные методы, основанные на некоторых гипотезах и предположениях [1], например, на постулате Друкера и принципе нормальности бесконечно малых деформаций к поверхности текучести [2], на зависимости связи $\varepsilon \sim \sigma$ от «внутреннего времени», которое описывает историю деформирования [3], или предположении о виде связи $\varepsilon \sim \sigma$ в гибридной форме, близкой к модифицированному закону Гука [4] и т. п.

Возможно получение соотношений $\varepsilon \sim \sigma$ и без введения каких-либо предположений. Общую нелинейную связь тензора деформаций $\varepsilon$ с тензором напряжений $\sigma$ для любого вида анизотропии материала можно задать тривиальным образом, определив шесть скалярных функций каждой из шести компонент тензора деформаций от шести компонент тензора напряжений в некоторой системе координат. Такой вид связи не будет инвариантным, т. е. при переходе к другой системе координат вид скалярных функций изменяется.

Методы теории тензорных функций позволяют получить соотношения в инвариантном виде. Вид анизотропии материала накладывает ограничения на тензорные функции, связывающие тензор деформаций и тензор напряжений. В некоторых случаях эти ограничения позволяют уменьшить число скалярных функций, входящих в соотношения, или уменьшить число аргументов функций по сравнению с тривиальным случаем. Например, в связь $\varepsilon \sim \sigma$ для изотропных материалов входит только три скалярные функции от трех скалярных аргументов [5].

В настоящей работе на примере трансверсально-изотропных материалов показано, как можно построить непротиворечивые инвариантные соотношения, не привлекая каких-либо гипотез. Последующее привлечение некоторых предположений позволяет упростить эти соотношения и получить тензорно-линейные соотношения. Линейно-упругая связь $\varepsilon \sim \sigma$ получается как частный случай тензорно-линейных соотношений. Показано, что для пяти классов трансверсально-изотропных материалов линейно-упругие соотношения имеют одинаковый вид.

В настоящей работе исследуется связь свойств симметрии структуры материала и свойств симметрии различных соотношений $\varepsilon \sim \sigma$ для трансверсально-изотропных материалов.

**Принципы симметрии в механике анизотропных сред.** Анизотропия различных свойств материала является следствием строения его структуры. Например, для кристаллических тел анизотропия свойств определяется видом кристаллической решетки, для древесины — направлением волокон, для композитов — распределением армирующих элементов. Структура материала может иметь различные элементы симметрии: поворотные оси симметрии, плоскости симметрии, зеркально-поворотные оси симметрии и др. Эти элементы симметрии образуют группу $G_T$ — группу симметрии структуры.

Понятие симметрии распространяется не только на геометрические объекты, но и на тензоры и тензорные функции [6].

Если тензор ранга $r$ с компонентами в системе координат $X_i$

$$q_{i_1, i_2, ..., i_r} \quad (i_1, i_2, ..., i_r = 1, 2, 3) \tag{1}$$

в другой системе координат $\overline{X}_i = M_{ij} X_j$ имеет компоненты

$$\overline{q}_{i_1, i_2, ..., i_r} = M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} ... M_{i_r j_r} q_{i_1, i_2, ..., i_r} \tag{2}$$

и при этом $q_{i_1, i_2, ..., i_r} = \overline{q}_{i_1, i_2, ..., i_r}$, то для данного тензора ортогональное преобразование с матрицей $M_{ij}$ является его элементом симметрии. Тензор $q_{i_1, i_2, ..., i_r}$ индифферентен относительно ортогонального преобразования с матрицей $M_{ij}$. Вся совокупность таких преобразований является группой симметрии тензора $q_{i_1, i_2, ..., i_r}$.

Если рассматривается тензор податливости (упругости) материала, то его группа симметрии называется группой симметрии упругих свойств материала.

Общий вид функции, связывающей тензор $b_{i_1, i_2, ..., i_v}$ ранга $v$ с тензором $d_{j_1, j_2, ..., j_w}$ ранга $w$, следующий:

$$b_{i_1, i_2, ..., i_v} = \varphi_{i_1, i_2, ..., i_v} \left( d_{i_1, i_2, ..., i_w} \right). \tag{3}$$

Если в другой системе координат $\overline{X}_i = M_{ij} X_j$ имеем

$$M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} ... M_{i_v j_v} \varphi_{j_1, j_2, ..., j_v} \left( d_{j_1, j_2, ..., j_w} \right) =$$

$$= \varphi_{i_1, i_2, ..., i_v} \left( M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} ... M_{i_w j_w} d_{j_1, j_2, ..., j_w} \right), \tag{4}$$

то ортогональное преобразование с матрицей $M_{ij}$ является элементом симметрии тензорной функции $\varphi_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}$. Совокупность всех элементов симметрии является группой симметрии функции $\varphi_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}$.

Если функция $\varphi_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}$ определяет нелинейную связь тензора деформации материала с тензором напряжений, то группа симметрии этой функции называется группой симметрии пластических свойств материала.

Группа симметрии структуры связана с группой симметрии любого свойства анизотропного материала. Эта связь устанавливается принципом симметрии.

В принципе симметрии Неймана утверждается, что элементы симметрии любого свойства материала должны включать в себя элементы симметрии структуры [7, 8].

Более общий принцип, распространяющийся на различные физические явления, сформулировал П. Кюри: «…когда определенные причины вызывают определенные следствия, то элементы симметрии причин должны проявляться в вызванных ими следствиях…» [9].

На языке теории групп для свойств материалов оба принципа выражаются так: группа симметрии структуры материала $G_T$ или совпадает с группой симметрии свойства материала $G_{\text{св}}$, или является подгруппой группы симметрии свойства:

$$G_T \subseteq G_{\text{св}}. \tag{5}$$

**Симметрия структуры трансверсально-изотропных материалов и симметрия нелинейных тензорных функций.** Структура трансверсально-изотропных материалов имеет одну ось симметрии бесконечного порядка. Возможны также и другие элементы симметрии материала (поворотные оси симметрии второго порядка, плоскости симметрии, центр симметрии).

По свойствам симметрии структуры трансверсально-изотропные материалы разделяются на пять групп симметрии $G_T$ [10, 11], которые по Шенфлису [7] обозначаются так: $D_\infty$, $D_{\infty h}$, $C_\infty$, $C_{\infty v}$, $C_{\infty h}$.

Отметим, что группа $C_\infty$ является подгруппой группы $C_{\infty h}$, а группы $D_\infty$, $C_{\infty v}$, $C_{\infty h}$ являются подгруппами группы $D_{\infty h}$.

Общий вид соотношений, связывающий тензор деформаций $\varepsilon_{ij}$ и тензор напряжений $\sigma_{kl}$, для материалов любого вида анизотропии

$$\varepsilon_{ij} = f_{ij}(\sigma_{kl}). \tag{6}$$

При замене системы координат, которой соответствует ортогональное преобразование с матрицей $p_{ij}$, компоненты тензора $\sigma_{ij}$ в (6) преобразуются так:

$$\bar{\sigma}_{kl} = p_{ks} p_{lq} \sigma_{sq}. \tag{7}$$

Если при ортогональном преобразовании выполняется равенство

$$p_{is} p_{jq} f_{sq}(\sigma_{kl}) = f_{ij}(\bar{\sigma}_{kl}), \tag{8}$$

то функция (6) инвариантна относительно ортогонального преобразования с матрицей $p_{ij}$. Это ортогональное преобразование является элементом симметрии функции (6). Совокупность ортогональных преобразований, удовлетворяющих (8), образует группу симметрии тензорной функции (6) (группу симметрии пластических свойств $G_{\text{п}}$).

В соотношении (6) как функция, так и аргумент являются тензорами четного ранга. Такие тензоры индифферентны [11] относительно ортогонального преобразования инверсии с матрицей

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Следовательно, преобразование (9) должно входить в группу $G_{\text{п}}$.

В соответствии с принципом симметрии группа $G_T$ должна быть подгруппой группы $G_{\text{п}}$. Из пяти трансверсально-изотропных групп только группы $D_{\infty h}$ и $C_{\infty h}$ содержат преобразование с матрицей (9). В связи с этим для структур $D_{\infty h}$, $D_{\infty}$, $C_{\infty v}$ группа симметрии соотношения (6) — это $D_{\infty h}$, для структур $C_{\infty}$, $C_{\infty h}$ — $C_{\infty h}$.

**Нелинейные соотношения.** Соотношения (6) класса симметрии $D_{\infty h}$ рассматривались в многочисленных работах, например [10, 12]. Пусть в ортонормированном трехмерном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по оси симметрии бесконечного порядка, тогда полное неприводимое представление функции класса симметрии $D_{\infty h}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \boldsymbol{\sigma} + \alpha_3 \boldsymbol{\sigma}^2 + \alpha_4 (\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}) + \alpha_5 \left(\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{M}\right), \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $\mathbf{M} = \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}$ — структурный тензор, имеющий ту же группу симметрии, что и функция (10).

Если вектор $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_3$, то

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В (10) $\alpha_0, \ldots, \alpha_5$ — скалярные полиномиальные функции составляющих функциональный базис тензора $\boldsymbol{\sigma}$ относительно группы $D_{\infty h}$ следующих пяти инвариантов:

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma},\ I_2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2,\ I_3 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^3,\ I_4 = \mathrm{tr}\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma},\ I_5 = \mathrm{tr}\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}^2. \tag{12}$$

Здесь $\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ii}$ — след тензора $\boldsymbol{\sigma}$.

Тензорные функции класса симметрии $C_{\infty h}$ рассмотрены в [13–15]. Структурным тензором для этой группы является кососимметричный тензор $\boldsymbol{\mu\tau}$. Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ совпадает с осью трансверсальной изотропии. Тензор $\boldsymbol{\mu}$ — тензор Леви — Чивита [5].

В ортонормированном трехмерном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, в котором $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

При построении тензорной функции симметрии $C_{\infty h}$ в [13] использовалась теорема изотропизации [16], по которой анизотропная функция от аргумента $\boldsymbol{\sigma}$ получается как изотропная функция от двух тензорных аргументов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{W}$.

В [13] при использовании полиномиального базиса симметричных тензоров второго ранга [10] получено выражение для такой функции в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon} = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\boldsymbol{\sigma} + \beta_2\boldsymbol{\sigma}^2 + \beta_3\mathbf{W}^2 + \beta_4(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) + \\ + \beta_5\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\right) + \beta_6\left(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}^2\right) + \\ + \beta_7\left(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 - \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\right), \end{gathered} \tag{14}$$

где $\beta_0, \ldots, \beta_7$ — скалярные полиномиальные функции от шести инвариантов $J_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$, $J_2 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2$, $J_3 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^3$, $J_4 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2\right)$, $J_5 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{W}^2\right)$, $J_6 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\right)$.

В (14) входит восемь скалярных функций, хотя пространство симметричных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}$ в общем случае шестимерное. Соотношение (14) может быть упрощено [13], и зависимость $\boldsymbol{\varepsilon}$ от $\boldsymbol{\sigma}$ класса симметрии $C_{\infty h}$ вместо (14) принимает вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\beta_0\mathbf{I}+\beta_1\boldsymbol{\sigma}+\beta_2\boldsymbol{\sigma}^2+\beta_3\mathbf{W}^2+\beta_4(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}-\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma})+\beta_6\left(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{W}-\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}^2\right). \quad (15)$$

В [17] показано, что инварианты $J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ J_5,\ J_6$ связаны сизигией

$$\left[2J_3+\ 4(J_1+J_4)^3-\ 6(J_1+J_4)(J_5+J_2)-3J_4J_5-J_4^3\right]^2+$$

$$+\ 9\left[J_5+J_2-(J_1+J_4)^2\right]^2\left[J_4^2+2J_2+4J_5-2(J_1+J_4)^2\right]+36J_6^2=0. \quad (16)$$

В связи с этим инвариант $J_6$ может быть выражен из (16) с точностью до знака через $J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ J_5.$ Таким образом, вместо $J_6$ можно использовать более «простой» инвариант $Y,$ который может принимать только два значения 1 или –1 и

$$36J_6=Y\left\{-\left[2J_3+4(J_1+J_4)^3-\ 6(J_1+J_4)(J_5+J_2)-3J_4J_5-J_4^3\right]^2-\right.$$

$$\left.-9\left[J_5+J_2-\ (J_1+J_4)^2\right]^2\left[J_4{}^2+2J_2+4J_5-\ 2(J_1+J_4)\right]\right\}^{1/2}.$$

Получено, что для материалов с симметрией структур $D_{\infty h},\ D_{\infty},\ C_{\infty v}$ в соотношении, связывающем тензоры напряжений и деформаций, содержится шесть скалярных функций от пяти скалярных величин. Для материалов симметрии структур $C_{\infty},\ C_{\infty h}$ это соотношение содержит шесть скалярных функций от шести величин, причем одна из них может принимать значения или 1 или –1. Таким образом, учет симметрии структуры материала позволяет получить более простые соотношения $\boldsymbol{\varepsilon}\sim\boldsymbol{\sigma}$ для пяти классов трансверсально-изотропных материалов по сравнению с тривиальным описанием этой зависимости, которая требует знания шести скалярных функций от шести величин. Отметим, что зависимость (15), в отличии от (14), не может приниматься полиномиальной.

Тензорные соотношения в виде (10) и (15) достаточно сложны для описания нелинейных свойств трансверсально-изотропных материалов, поскольку определение шести скалярных функций от большого числа аргументов — нереальная задача. Однако эти соотношения позволяют выявить особенности деформирования транверсально-изотропных материалов различных типов.

**Тензорно-линейные соотношения.** Тензорно-линейные (квазилинейные) соотношения можно рассматривать как упрощенные варианты нелинейных соотношений самого общего вида [18, 19]. Такие упрощенные уравнения используют в качестве уравнений деформационной теории пластичности. Они позволяют описывать нелинейные свойства материалов с достаточной точностью. В некоторых моделях теории пластичности тензорно-линейные уравнения изначально постулируются [4]. Однако более естественно, если тензорно-линейные соотношения получены из более общих нелинейных соотношений.

Для получения тензорно-линейных соотношений, в самых общих уравнениях нелинейной связи $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{\sigma}$ необходимо оставить только слагаемые, содержащие тензор $\boldsymbol{\sigma}$ в степени не выше первой. Для материалов с симметрией структуры классов $D_{\infty h}$, $D_{\infty}$, $C_{\infty v}$ тензорно-линейные соотношения имеют вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = P_1 I + P_2 \mathbf{M} + P_3 \boldsymbol{\sigma} + P_4 \left( \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{M} \right), \tag{17}$$

где $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ — функции инвариантов $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$.

Представим тензоры, входящие в (17), через компоненты для случая, когда вектор $\mathbf{e}_3$ совпадает с осью трансверсальной изотропии материала:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 2\sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Величины $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ являются полиномами от инвариантов, которые в этом базисе имеют вид:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};$$
$$I_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right);$$
$$I_3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3\sigma_{11}\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2\right) + 3\sigma_{22}\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2\right) +$$
$$+ 3\sigma_{33}\left(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right) + 6\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23};$$
$$I_4 = \sigma_{33}, \; I_5 = \sigma_{33}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2.$$

Соотношения типа (17) применялись для описания свойств материалов в [18]. Возможны дальнейшие упрощения соотношений. Для этого, например, предполагается объемная несжимаемость материала, нерастяжимость в определенном направлении, независимость скалярных функций в соотношениях от кубических инвариантов.

Для получения тензорно-линейных соотношений для структур $C_{\infty}$, $C_{\infty h}$ возможны два варианта: члены, содержащие $\boldsymbol{\sigma}$ во второй степени, удалить из (15) или из (14). Для дальнейшего исследования в настоящей работе желательно сохранить условия полиномиальности соотношений. Поэтому выбираем второй вариант. Таким образом, для структур $C_\infty$, $C_{\infty h}$ тензорно-линейное соотношение имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon} = Q_1\mathbf{I} + Q_2\boldsymbol{\sigma} + Q_3\mathbf{W}^2 + Q_4(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}) + \\ + Q_5\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\right) + Q_6\left(\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 - \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}\right),\end{gathered} \tag{19}$$

где $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ — скалярные полиномиальные функции инвариантов $J_1, ..., J_5, Y$.

При выборе **W** в виде (13) тензоры и инварианты в (19) выражаются через компоненты в следующем виде:

$$\mathbf{W}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_{11} & \sigma_{23} \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} & -2\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{23} & -\sigma_{13} & 0 \end{pmatrix}; \tag{20}$$

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 - \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -2\sigma_{12} & \sigma_{11} - \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} & 2\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^2 + \mathbf{W}^2\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -2\sigma_{11} & -2\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -2\sigma_{12} & -2\sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{gathered} J_1 = I_1,\ J_2 = I_2,\ J_3 = I_3,\ J_4 = -\sigma_{11} - \sigma_{22}, \\ J_5 = -\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2,\ Y. \end{gathered} \tag{21}$$

Инвариант $Y$ может принимать значения 1 или –1.

**Линейные соотношения.** Линейные соотношения $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{\sigma}$ являются частным случаем тензорно-линейных полиномиальных соотношений. Чтобы получить линейные соотношения для структур $D_{\infty h}, D_\infty, C_{\infty v}$, следует в (17) принять

$$P_1 = a_0 I_1 + b_0 I_4,\ P_2 = a_1 I_1 + b_1 I_4,\ P_3 = a_2,\ P_4 = \alpha_3, \tag{22}$$

где $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, a_3$ — константы.

Для получения линейных соотношений для структур $C_\infty, C_{\infty h}$ в соотношении (19) следует положить

$$Q_1 = c_0 J_1 + d_0 J_4,\ Q_2 = c_1,\ Q_3 = c_2 J_1 + d_1 J_4,\ Q_4 = d_2,\ Q_5 = d_3,\ Q_6 = d_4. \tag{23}$$

Введем матричные обозначения для компонент деформаций и напряжений

$$\left\{\varepsilon_i\right\} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\right)^{\text{т}} = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\right)^{\text{т}}; \qquad (24)$$

$$\left\{\sigma_i\right\} = \left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\right)^{\text{т}} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\right)^{\text{т}}. \qquad (25)$$

Линейное соотношение между деформациями и напряжениями можно записать как

$$\left\{\varepsilon_i\right\} = \left\{S_{ij}\right\}\left\{\sigma_j\right\}. \qquad (26)$$

Для структур $D_{\infty h}$, $D_{\infty}$, $C_{\infty v}$ имеем

$$\left\{S_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 & a_0 & a_0 + b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_0 + a_2 & a_0 + b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 + a_1 & a_0 + a_1 & a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + 2a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 + a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Из условия существования упругого потенциала эта матрица должна быть симметричной по индексам $i$ и $j$, т. е. $S_{ij} = S_{ji}$. Отсюда следует $a_1 = b_0$.

Следовательно, для материалов, имеющих симметрию структуры $D_{\infty h}$, $D_{\infty}$, $C_{\infty v}$, матрица податливости имеет вид:

$$\left\{S_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} F & L & K & 0 & 0 & 0 \\ L & F & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F - L \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

где $F = a_0 + a_2$; $L = a_0$; $K = a_0 + b_0$; $M = 2a_0 + b_0 + b_1 + a_2 + 2a_3$; $N = a_2 + a_3$.

Матрица податливости для материалов классов симметрии структуры $D_{\infty h}$, $D_{\infty}$, $C_{\infty v}$ имеет пять независимых констант.

Для материалов с симметрией структуры $C_\infty, C_{\infty h}$ матрицу $\{S_{ij}\}$ для линейной связи тензора деформации и тензора напряжений получаем в следующем виде:

$$\{S_{ij}\}=$$
$$=\begin{pmatrix} c_0-d_0+c_1-c_2+d_1-2d_3 & c_0-d_0-c_2+d_1 & c_0-c_2 & 0 & 0 & 2d_2-2d_4 \\ c_0-d_0-c_2+d_1 & c_0-d_0+c_1-c_2+d_1-2d_3 & c_0-c_2 & 0 & 0 & -2d_2+2d_4 \\ c_0-d_0 & c_0-d_0 & c_1+c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1-d_3 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & c_1-d_3 & 0 \\ -d_2+d_4 & d_2-d_4 & 0 & 0 & 0 & c_1-2d_3 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Из условия существования упругого потенциала эта матрица должна быть симметричной. Отсюда следует, что $d_2=d_4=0$ и $c_2=d_0$.

Получаем матрицу податливости для материалов, имеющих симметрию структуры $C_\infty, C_{\infty h}$, вида (28), где

$$F=c_0-2d_0+c_1+d_1-2d_3;\;\; L=c_0-2d_0+d_1;\;\; K=c_0-d_0;$$

$$M=c_1+c_0;\;\; N=c_1-d_3.$$

Вид матрицы податливости (или упругости) характеризует класс симметрии упругих свойств материала. Матрицы податливости одинаковы для всех пяти типов трансверсально-изотропных материалов и имеют вид (28). Поэтому в отношении упругих свойств пять типов трансверсально-изотропных материалов имеют одинаковую симметрию, которая описывается группой симметрии упругих свойств $G_{\text{у}}$. Наивысшая из пяти трансверсально-изотропных групп — группа $D_{\infty h}$, тогда для пяти типов трансверсально-изотропных материалов $G_{\text{у}}=D_{\infty h}$.

Для трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры $G_T$ группы симметрии пластических свойств $G_{\text{п}}$ и группы симметрии упругих свойств $G_{\text{у}}$ приведены в таблице.

**Группы симметрии пластических и упругих свойств трансверсально-изотропных материалов**

| $G_T$ | $D_{\infty h}$ | $D_\infty$ | $C_{\infty v}$ | $C_\infty$ | $C_{\infty h}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_{\text{п}}$ | $D_{\infty h}$ | | | $C_{\infty h}$ | |
| $G_{\text{у}}$ | $D_{\infty h}$ | | | | |

Для трансверсально-изотропных материалов справедливо соотношение

$$G_{\text{у}} \supseteq G_{\text{п}} \supseteq G_T, \tag{30}$$

доказанное для материалов любой группы симметрии структуры [20].

**Заключение.** Рассмотрены тензорные функции, связывающие тензоры напряжений и деформаций при пластическом деформировании трансверсально-изотропных материалов.

Для пяти классов трансверсально-изотропных материалов, которые отличаются друг от друга симметрией структуры, связь напряжений и деформаций описывается тензорными функциями двух видов. Для материалов классов $D_\infty, D_{\infty h}, C_{\infty v}$ группа симметрии тензорной функции $D_{\infty h}$. Для материалов $C_\infty, C_{\infty h}$ тензорная функция относится к классу симметрии $C_{\infty h}$. Эта тензорная функция может быть представлена как в полиномиальном, так и в неполиномиальном виде. Для тензорной функции класса симметрии $D_{\infty h}$ полиномиальное и неполиномиальное представления тензорной функции совпадают. В настоящей работе получены тензорно-линейные соотношения для связи напряжений и деформаций как упрощенный вариант общих тензорных функций, на которые накладывается условие, чтобы они содержали тензор напряжений не более чем в первой степени. Линейно-упругие соотношения являются частным случаем тензорно-линейных соотношений и получены из полиномиальных представлений тензорных функций. Для пяти классов трансверсальной изотропии они имеют один вид и имеют группу симметрии $D_{\infty h}$.

Метод, с помощью которого в настоящей работе получена матрица податливости трасверсально-изотропных материалов, может быть использован для материалов других видов анизотропии наряду с известными методами [7, 8].

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Васин Р.А. Об экспериментальной аттестации базовых гипотез и моделей теории пластичности. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4, с. 1415–1417. EDN: TBGNWX

[2] Друккер Д. Пластичность, течение и разрушение. В кн.: *Неупругие свойства композиционных материалов*. М., Мир, 1978, с. 9–32.

[3] Сарбаев Б.С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 7, с. 97–104.
DOI: https://doi.org/10.1134/S0235711919070113

[4] Трещев А.А., Гвоздев А.Е., Ющенко Н.С. и др. Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов. *Чебышевский сборник*, 2022, т. 23, № 3, с. 224–237.
DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

[5] Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.

[6] Победря Б.Е. Теория пластичности анизотропных материалов. *Прикладные задачи прочности и пластичности*, 1984, с. 110–115.

[7] Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., URSS, 2002.

[8] Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М., Наука, 1988.

[9] Кюри П. О симметрии в физических явлениях; симметрия электрического и магнитного полей. В кн.: *Избранные труды*. М., Наука, 1966, с. 95–113.

[10] Спенсер Э. Теория инвариантов. М., Мир, 1974.

[11] Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. *Прикладная математика и механика*, 1963, т. 27, № 3, с. 393–417.

[12] Boehler J.P. A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*, 1979, vol. 59, no. 4, pp. 157–167.
DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.19790590403

[13] Цветков С.В. Нелинейные определяющие соотношения для трансверсально-изотропных материалов классов симметрии $C_\infty$ и $C_{\infty h}$. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 3 (84), с. 46–59.
DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-3-46-59

[14] Zheng Q.S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part I: Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. *Int. J. Eng. Sc.*, 1993, vol. 31, no. 10, pp. 1399–1409.
DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90005-F

[15] Xiao H. On anisotropic functions of vectors and second order tensors — all subgroups of the transverse isotropy group $C_{\infty h}$. *Arch. Mech.*, 1998, vol. 50, no. 2, pp. 281–319. DOI: https://doi.org/10.24423/aom.1468

[16] Zheng Q.S. Theory of representations for tensor functions — a unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47, no. 11, pp. 545–587.
DOI: https://doi.org/10.1115/1.3111066

[17] Цветков С.В. Критерии прочности трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2009, № 1 (74), с. 86–99. EDN: KDYHDH

[18] Boehler J.P., Sawczuk A. On yielding of oriented solids. *Acta Mech.*, 1977, vol. 27, no. 1, pp. 185–204. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01180085

[19] Победря Б.Е. О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов. *Механика твердого тела*, 1990, № 3, с. 96–101.

[20] Цветков С.В. Упругая и пластическая анизотропия. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, № 8. EDN: QZPOOZ

**Цветков Сергей Васильевич** — заведующий сектором лаборатории композиционных материалов НИИ СМ МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Цветков С.В. О свойствах симметрии различных соотношений для трансверсально-изотропных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2025, № 4 (155), с. 102–117. EDN: HKLJBO

## ON THE SYMMETRY PROPERTIES OF VARIOUS RELATIONS FOR THE TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIAL

**S.V. Tsvetkov** tsvetkovsv@bmstu.ru

**BMSTU, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

The paper considers nonlinear, tensor-linear, and linear relationships linking the stresses and strains in the transversely isotropic materials. Based on their structural symmetry properties, the transversely isotropic materials are divided into five classes: $D_\infty$, $D_{\infty h}$, $C_\infty$, $C_{\infty v}$, $C_{\infty h}$. Relationships based on the tensor function theory are obtained to describe the nonlinear relationship between stresses and strains in the transversely isotropic materials exhibiting the plastic properties. The paper shows that two types of the tensor functions are sufficient to describe plastic properties of the transversely isotropic materials of five classes. At this point, the symmetry principle is used, which states that the material structure symmetry elements should be contained in the symmetry group of the $D_{\infty h}$ or $C_{\infty h}$ transversely isotropic material. For the $C_{\infty h}$ symmetry, two possible function representations are available: polynomial and non-polynomial. The simplified versions of the nonlinear relationship between strains and stresses are the tensor-linear (quasilinear) relations. For the transversely isotropic materials, the relations are derived from the nonlinear functions of a general form. Linear and elastic-linear relations are special cases of the polynomial tensor-linear relations. The paper shows

**Keywords**

*Symmetry principles, transversely isotropic material, stress, strain, tensor functions, invariants, nonlinear relations, linear elasticity*

that compliance matrices of the transversely isotropic materials have the same form. The elastic-linear relations of five classes of the transversely isotropic materials belong to the same $D_{\infty h}$ symmetry class. The paper indicated that a symmetry group of plastic properties of each transversely isotropic material is equal to or higher than the structure symmetry group; and symmetry group of the material elastic properties is equal to or higher than the plastic properties group

Received 07.10.2024
Accepted 06.12.2024


## REFERENCES

[1] Vasin R.A. On experimental verification of basic hypothesis and models of plasticity. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4, pp. 1415–1417 (in Russ.). EDN: TBGNWX

[2] Drukker D. Plastichnost, techenie i razrushenie [Plasticity, yielding and fracture]. V kn.: *Neuprugie svoystva kompozitsionnykh* materialov [In: Inelastic behavior of composite materials]. Moscow, Mir Publ., 1978, pp. 9–32 (in Russ.).

[3] Sarbaev B.S. Constitutive equations for high temperature composite materials based on endochronic theory thermoplasticity. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 7, pp. 97–104 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.1134/S0235711919070113

[4] Treshchev A.A., Gvozdev A.E., Yushchenko N.S., et al. Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials. *Chebyshevskiy sbornik*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 224–237 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-224-237

[5] Rabotnov Yu.N. Polzuchest elementov konstruktsiy [Creep of structure elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966.

[6] Pobedrya B.E. Theory of plasticity of anisotropic materials. *Prikladnye zadachi prochnosti i plastichnosti*, 1984, pp. 110–115 (in Russ.).

[7] Hamermesh M. Group theory and its application to physical problems. New York, Addison-Wesley, 1989.

[8] Chernykh K.F. Vvedenie v anizotropnuyu uprugost [Introduction to anisotropic elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1988.

[9] Curie P. O simmetrii v fizicheskikh yavleniyakh: simmetriya elektricheskogo i magnitnogo poley [On symmetry in physical phenomena: symmetry of electric and magnetic fields]. V kn.: *Izbrannye Trudy* [In: Selected works]. Moscow, Nauka Publ., 1966, pp. 95–113 (in Russ.).

[10] Spencer A.J.M. Teoriya invariantov [Theory of invariants]. Moscow, Mir Publ., 1974.

[11] Lokhin V.V., Sedov L.I. Nonlinear tensor functions of several tensor arguments. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1963, vol. 27, no. 3, pp. 393–417 (in Russ.).

[12] Boehler J.P. A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM*, 1979, vol. 59, no. 4, pp. 157–167. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.19790590403

[13] Tsvetkov S.V. Non-linear constitutive equations for transversely isotropic materials belonging to the $C_\infty$ and $C_{\infty h}$ symmetry groups. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 3 (84), pp. 46–59 (in Russ.). DOI: http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-3-46-59

[14] Zheng Q.S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part I: Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. *Int. J. Eng. Sc.*, 1993, vol. 31, no. 10, pp. 1399–1409. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90005-F

[15] Xiao H. On anisotropic functions of vectors and second order tensors — all subgroups of the transverse isotropy group $C_{\infty h}$. *Arch. Mech.*, 1998, vol. 50, no. 2, pp. 281–319. DOI: https://doi.org/10.24423/aom.1468

[16] Zheng Q.S. Theory of representations for tensor functions — a unified invariant approach to constitutive equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47, no. 11, pp. 545–587. DOI: https://doi.org/10.1115/1.3111066

[17] Tsvetkov S.V. Strength criteria of transversally-isotropic materials of different classes of structure symmetry. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2009, no. 1 (74), pp. 86–99 (in Russ.). EDN: KDYHDH

[18] Boehler J.P., Sawczuk A. On yielding of oriented solids. *Acta Mech.*, 1977, vol. 27, no. 1, pp. 185–204. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01180085

[19] Pobedrya B.E. Theory of plasticity of transversely isotropic materials. *Mekhanika tverdogo tela*, 1990, no. 3, pp. 96–101 (in Russ.).

[20] Tsvetkov S.V. Elastic and plastic anisotropy. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2012, no. 8 (in Russ.). EDN: QZPOOZ

**Tsvetkov S.V.** — Head of Sector, Department of Composite Material, Scientific Research Institute of Special Mechanical Engineering, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Tsvetkov S.V. On the symmetry properties of various relations for the transversely isotropic material. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2025, no. 4 (155), pp. 102–117 (in Russ.). EDN: HKLJBO