

ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ПРОФИЛЬ РАВНОПРОЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Е.А. Лямина¹

lyamina@inbox.ru

О.В. Новожилова²

novozhilova2606@bmstu.ru

¹ ИПМех РАН, Москва, Российская Федерация

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Приведено решение для определения профиля вращающегося полого равнопрочного диска в условиях плосконапряженного состояния, в предположении, что к внешнему и внутреннему радиусам диска приложены равномерные давления и материал диска является пластически анизотропным. Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука. Переход в пластическое состояние определяется по квадратичному условию текучести Хилла. Общее решение является аналитическим, за исключением численного вычисления обыкновенного интеграла. Из трех параметров нагружения (угловая скорость диска, давление на внешнем и внутреннем радиусах) только два являются независимыми для равнопрочного диска. Выполнен качественный анализ полученного решения. Определены интервалы изменения искомой вспомогательной переменной, за пределы которых не может выходить решение. Установлены ограничения на краевые условия. Кроме общего решения, приведено особое решение, которое является полностью аналитическим. В процессе решения проверена приемлемость предположения о плосконапряженном состоянии. Построены профили равнопрочных вращающихся дисков для четырех анизотропных материалов с использованием экспериментально определенных коэффициентов анизотропии и для изотропного материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса

Ключевые слова

Вращающийся диск, равнопрочный диск, пластическая анизотропия, плосконапряженное состояние, аналитическое решение

Поступила 12.04.2024

Принята 30.09.2024

© Автор(ы), 2025

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-21-00335)

Введение. Тонкие вращающиеся диски широко используются во многих отраслях промышленности [1]. Распределение напряжений в упругопластическом диске постоянной толщины, материал которого подчиняется условиям пластичности Мизеса и Треска без деформационного упрочнения, получено в [2, 3]. В [4] эти решения обобщены при условии пластичности, зависящем от среднего напряжения. Обзор работ по расчету вращающихся цилиндров и дисков, профиль которых задан, включая диски переменной толщины и учет деформационного упрочнения, приведен в [5]. Однако профиль диска можно определить, если сформулирован некоторый критерий оптимальности. В частности, таким критерием является критерий равнопрочности [6]. Используя его и условие пластичности Треска, можно определить профили дисков, подверженных давлению по внешнему и внутреннему радиусам [7, 8]. В случае условия пластичности Мизеса такие профили найдены в [9]. Предполагалось, что механические свойства материала варьируются вдоль радиуса.

Профиль равнопрочного вращающегося диска, нагруженного внутренним и внешним давлениями, определен в [10] с помощью критерия пластичности Мизеса и в предположении плосконапряженного состояния. Однако во многих случаях необходимо учитывать полярную анизотропию свойств материала, которая оказывает существенное влияние на эксплуатационные характеристики [11–15]. В настоящей работе обобщается решение [10] при учете анизотропного условия пластичности [16]. Показано влияние пластической анизотропии на оптимальный профиль диска.

Постановка задачи. Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) , ось Oz которой совпадает с осью симметрии полого вращающегося диска (рис. 1). Внешний радиус диска обозначим как b_0 , внутренний радиус — a_0 , а угловую скорость — ω . Угловая скорость изменяется достаточно медленно, поэтому угловым ускорением можно пренебречь. Напряжения σ_r , σ_θ и σ_z в цилиндрической системе координат являются главными. Предполагается, что диск находится в условиях плосконапряженного состояния. В этом случае $\sigma_z = 0$. Напряжения и деформации связаны законом Гука. Таким образом, запишем

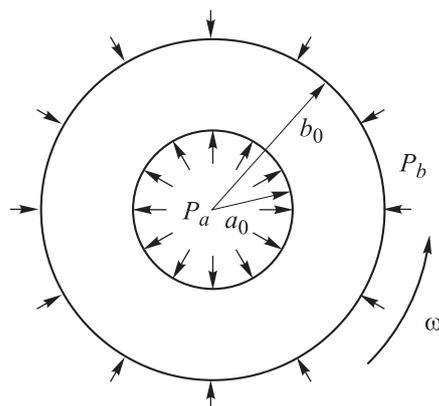


Рис. 1. Геометрические параметры вращающегося диска и приложенные нагрузки

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E}. \quad (1)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга. Переход материала в пластическое состояние определяется анизотропным условием пластичности [16]. В случае плосконапряженного состояния это условие можно представить как

$$(G + H)\sigma_r^2 - 2H\sigma_r\sigma_\theta + (H + F)\sigma_\theta^2 = 1, \quad (2)$$

где G, H, F — параметры, характеризующие пластическую анизотропию. Эти параметры выражаются через пределы пластичности в направлении главных осей анизотропии [16]. В случае изотропного материала $G = H = F$ и условие (2) переходит в условие пластичности Мизеса. Уравнение движения, которое не удовлетворяется автоматически, имеет вид

$$\frac{d(hr\sigma_r)}{dr} - h(\sigma_\theta - r^2\varrho\omega^2) = 0. \quad (3)$$

Здесь $h = h(r)$ — толщина диска; ϱ — плотность материала. Условие совместности деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}. \quad (4)$$

Внешнее и внутреннее давление обозначим P_a и P_b , тогда при $r = a_0$

$$\sigma_r = -P_a, \quad (5)$$

при $r = b_0$

$$\sigma_r = -P_b. \quad (6)$$

Требуется определить профиль равнопрочного диска и соотношение между P_a, P_b и ω , при котором равнопрочное состояние реализуется.

Общее решение. Условие пластичности (2) удовлетворяется подстановкой [17]

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = A \sin \psi; \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = B \sin \psi - \cos \psi, \quad (7)$$

где ψ — новая неизвестная функция полярного радиуса;

$$\sigma_0 = \frac{1}{G + H}; \quad A = -\frac{2}{\sqrt{4 - \eta^2}}; \quad B = -\frac{\eta\eta_1}{\sqrt{4 - \eta^2}}; \quad (8)$$

$$\eta = \frac{2H}{\sqrt{(G+H)(H+F)}}; \quad (8)$$

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{G+H}}{\sqrt{H+F}}.$$

Далее будут использованы следующие безразмерные величины:

$$s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}; \quad \rho = \frac{r}{b_0}; \quad a = \frac{a_0}{b_0}; \quad p_a = \frac{P_a}{\sigma_0}; \quad (9)$$

$$p_b = \frac{P_b}{\sigma_0}; \quad k = \frac{\sigma_0}{E}; \quad \Omega = \frac{9\omega^2 b_0^2}{\sigma_0}.$$

Используя (7) и (9) при $\rho = a$ условия (5) и (6) преобразуем к виду

$$\psi = \psi_a = -\arcsin\left(\frac{p_a}{A}\right), \quad (10)$$

при $\rho = 1$ — к виду

$$\psi = \psi_b = -\arcsin\left(\frac{p_b}{A}\right). \quad (11)$$

Подставляя (7) и (9) в (3), получаем

$$\rho A \sin \psi \frac{dt}{d\rho} + A\rho \cos \psi \frac{d\psi}{d\rho} + (A - B) \sin \psi + \cos \psi + \rho^2 \Omega = 0. \quad (12)$$

Здесь $t = \ln(h/h_b)$ (h_b — толщина диска при $\rho = 1$). Уравнения (1) с использованием (7) и (9) преобразуются к виду

$$\varepsilon_r = k [(A - \nu B) \sin \psi + \nu \cos \psi]; \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = k [(B - \nu A) \sin \psi - \cos \psi].$$

Подставляя (13) в (4), найдем

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{(1 + \nu)[(A - B) \sin \psi + \cos \psi]}{\rho[(B - \nu A) \cos \psi + \sin \psi]}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что $|d\psi/d\rho| \rightarrow \infty$ при

$$\psi = \psi_0 = \arctg(\nu A - B). \quad (15)$$

В связи с этим целесообразно ввести новую функцию φ :

$$\varphi = \psi - \psi_0. \quad (16)$$

Тогда уравнение (14) преобразуется к виду

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{C_1 \operatorname{tg} \varphi + C_2}{\rho \operatorname{tg} \varphi}; \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{A(1-v^2)}{1+(B-vA)^2}; \quad C_2 = \frac{[1+(A-B)(vA-B)](1+v)}{1+(B-vA)^2}.$$

Решение уравнения (17) можно представить так:

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = C_3(\varphi - \varphi_0) + C_4 \ln\left(\frac{C_2 \cos \varphi + C_1 \sin \varphi}{C_2 \cos \varphi_0 + C_1 \sin \varphi_0}\right); \quad (18)$$

$$C_3 = \frac{C_1}{C_1^2 + C_2^2}; \quad C_4 = -\frac{C_2}{C_1^2 + C_2^2}.$$

Здесь φ_0 — значение φ при $\rho = \rho_0$, если принять $\varphi_0 = \psi_b - \psi_0$ и $\rho_0 = 1$, то выполняется условие (11), если принять $\varphi_0 = \psi_a - \psi_0$ и $\rho_0 = a$, то выполняется условие (10). Обоим условиям удовлетворить в общем случае невозможно.

Из (18) следует, что $\rho \rightarrow \infty$, если $C_4 < 0$, и $\rho \rightarrow 0$, если $C_4 > 0$ при $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow -C_1/C_2$. Поскольку $a \leq \rho \leq 1$, то во всем диске значение угла φ должно лежать в одном из интервалов

$$\varphi_c - \pi < \varphi < \varphi_c \quad \text{или} \quad \varphi_c < \varphi < \varphi_c + \pi, \quad (19)$$

если $C_1/C_2 < 0$, и в одном из интервалов

$$\varphi_c < \varphi < \varphi_c + \pi \quad \text{или} \quad \varphi_c + \pi < \varphi < \varphi_c + 2\pi, \quad (20)$$

если $C_1/C_2 > 0$. Здесь $\varphi_c = -\operatorname{arctg}(C_1/C_2)$. Причем, если $C_1/C_2 < 0$, то значение φ_c берется из интервала $0 < \varphi_c < \pi/2$, если $C_1/C_2 > 0$, то из интервала $-\pi/2 < \varphi_c < 0$. Подходящий интервал в (19) или (20) определяется значением φ_0 . В дальнейшем без ограничения общности можно полагать, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Уравнение (17) можно переписать как

$$\frac{d\rho}{\rho d\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{C_1 \operatorname{tg} \varphi + C_2}. \quad (21)$$

Дифференцируя правую сторону уравнения (21) по φ , найдем, что ρ как функция φ достигает минимума, если $C_2 > 0$, и максимума, если $C_2 < 0$, при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. В любом случае, решение не выходит за преде-

лы отрезков $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. Окончательно, с учетом (19) и (20), получаем что решение для φ должно принадлежать одному из следующих полуинтервалов или отрезков: $[0, \varphi_c)$, $(\varphi_c, \pi]$, $[\pi, \varphi_c + \pi)$ или $(\varphi_c + \pi, 2\pi]$ при $C_1/C_2 < 0$, и $[0, \varphi_c + \pi)$, $(\varphi_c + \pi, \pi]$, $[\pi, \varphi_c + 2\pi)$ или $(\varphi_c + 2\pi, 2\pi]$ при $C_1/C_2 > 0$. Причем функция от $\rho(\varphi)$ является монотонной на каждом промежутке. В связи с этим в (12) с помощью (16) и (17) можно перейти от дифференцирования по ρ к дифференцированию по φ . В результате получим

$$\frac{dt}{d\varphi} = - \left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \varphi + C_2}{\operatorname{tg} \varphi} + \frac{A - B}{A} \operatorname{tg} \varphi + 1 + \frac{\rho^2 \Omega}{A \cos(\varphi + \psi_0)} \right] \times \\ \times \frac{[1 - (vA - B) \operatorname{tg} \varphi] \operatorname{tg} \varphi}{(vA - B + \operatorname{tg} \varphi)(C_1 \operatorname{tg} \varphi + C_2)}. \quad (22)$$

В уравнении (22) параметр ρ должен быть исключен с помощью (18). Решение уравнения (22) при $\rho = 1$ должно удовлетворять условию

$$t = 0. \quad (23)$$

Соответствующий параметр φ определяется из (18), обозначим его как φ_b . Тогда решение уравнения (22), удовлетворяющее (23), запишем в виде

$$t = \int_{\varphi}^{\varphi_b} \left\{ \left[\frac{C_1 \operatorname{tg} \chi + C_2}{\operatorname{tg} \chi} + \frac{A - B}{A} \operatorname{tg} \chi + 1 + \frac{\rho^2 \Omega}{A \cos(\chi + \psi_0)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{[1 - (vA - B) \operatorname{tg} \chi] \operatorname{tg} \chi}{(vA - B + \operatorname{tg} \chi)(C_1 \operatorname{tg} \chi + C_2)} \right\} d\chi. \quad (24)$$

Зависимость толщины равнопрочного диска вдоль радиуса определяется в параметрическом виде из (18) и (24) с учетом соотношения $h/h_b = e^t$.

Предположение о плосконапряженном состоянии допустимо, если толщина плавно изменяется вдоль радиуса диска. Это условие можно представить в виде $|dh/dr| \leq \delta$, где δ — заданное число. Используя (9) и определение t , это условие можно записать как

$$\left| \frac{dt}{d\rho} \right| e^t \leq \delta \frac{b_0}{h_b} = \Delta. \quad (25)$$

Обычно принимается, что параметр Δ может быть равен нескольким десяткам [18, 19]. Подставляя (24) в (25), определяем диапазон изменения Ω , в котором неравенство выполняется.

Особое решение. Уравнение (17) имеет особое решение $\varphi = \text{const}$, которое не следует из

общего решения. Конкретные значения φ соответствуют крайним точкам интервалов в (19) и (20). Для исследования особого решения предпочтительнее вернуться к неизвестному параметру ψ . Значение ψ , при котором реализуется особое решение, определяется из уравнения

$$\text{tg } \psi_s = \frac{1}{B - A}. \quad (26)$$

Поскольку ψ не зависит от полярного радиуса, из (7) следует, что напряжения также не зависят от полярного радиуса. Кроме того, из (26) получим $\sigma_r = \sigma_\theta$. Условия (10) и (11) показывают, что особое решение возможно, если

$$p_a = p_b = -A \sin \psi_s. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (12), определяем

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{\rho\Omega(A - B)}{A \cos \psi_s}. \quad (28)$$

Решение уравнения (28), удовлетворяющее условию (23), имеет вид

$$t = \frac{\Omega(A - B)}{2A \cos \psi_s} (\rho^2 - 1). \quad (29)$$

Неравенство (25) преобразуется к виду

$$\rho\Omega \left| \frac{A - B}{A \cos \psi_s} \right| \exp \left[\frac{\Omega(A - B)}{2A \cos \psi_s} (\rho^2 - 1) \right] \leq \Delta. \quad (30)$$

Профили равнопрочного диска. Полученные общее и особое решения являются аналитическими, за исключением необходимости численного интегрирования в (24). В связи с этим основные особенности построения оптимального профиля диска могут быть проиллюстрированы с помощью особого решения.

Коэффициенты η и η_1 , входящие в (7) посредством (8), определены для нескольких материалов по экспериментальным данным [20, 21]. Эти коэффициенты приведены в табл. 1. Для расчетов принимали $a = 1/2$, $\nu = 0,3$ и $\Delta = 20$.

Левая часть (30) достигает максимума при

$$\rho = \rho_m = \sqrt{\frac{A \cos \psi_s}{(B - A)\Omega}}. \quad (31)$$

Таблица 1

Механические свойства материалов

Коэффициент	Материал			
	AA3104	AA5182	AA6016	DC06
η	0,82	0,88	0,82	1,45
η_l	1,36	1,04	1,00	1,03

В случае свойств материала, приведенных в табл. 1, действительное значение ρ_m получается только при $\cos \psi_s < 0$. Таким образом, при $\cos \psi_s > 0$ выполнение неравенства (30) необходимо проверять только в точках $\rho = a$ и $\rho = 1$. При $\cos \psi_s < 0$ выполнение неравенства (30) следует проверять в точках $\rho = a$ и $\rho = 1$, если $\rho_m \geq 1$ или $\rho_m \leq a$, и в точках $\rho = a$, $\rho = \rho_m$ и $\rho = 1$, если $a < \rho_m < 1$. Последний случай имеет место при

$$\Omega_c^{(1)} < \Omega < \Omega_c^{(2)}. \quad (32)$$

Значения $\Omega_c^{(1)}$ и $\Omega_c^{(2)}$ приведены в табл. 2, там же даны максимальные значения параметра Ω , обозначенные как Ω_{\max} , при которых удовлетворяется неравенство (30). При $\Omega = 4$ профили равнопрочных дисков показаны на рис. 2, а при $\cos \psi_s > 0$ и на рис. 2, б при $\cos \psi_s < 0$.

Таблица 2

Характерные значения параметра Ω

Параметр	Материал				
	AA3104	AA5182	AA6016	DC06	Изотропный
$\Omega_c^{(1)}$	0,98	0,95	0,92	1,36	1,00
$\Omega_c^{(2)}$	3,94	3,81	3,68	5,45	4,00
$\Omega_{\max}, \cos \psi_s < 0$	5,27	5,11	4,93	7,30	5,34
$\Omega_{\max}, \cos \psi_s > 0$	19,73	19,06	18,41	27,25	20,00

Профили для сплавов AA3104, AA5182, AA6016 и изотропного материала достаточно близки, особенно при $\cos \psi_s > 0$. Это объясняется тем, что коэффициенты A и B , входящие в (7), достаточно близки. Таким образом, влияние анизотропии незначительно на уровне модели материала. Влияние анизотропии на профиль равнопрочного диска проявляется для материала DC06.

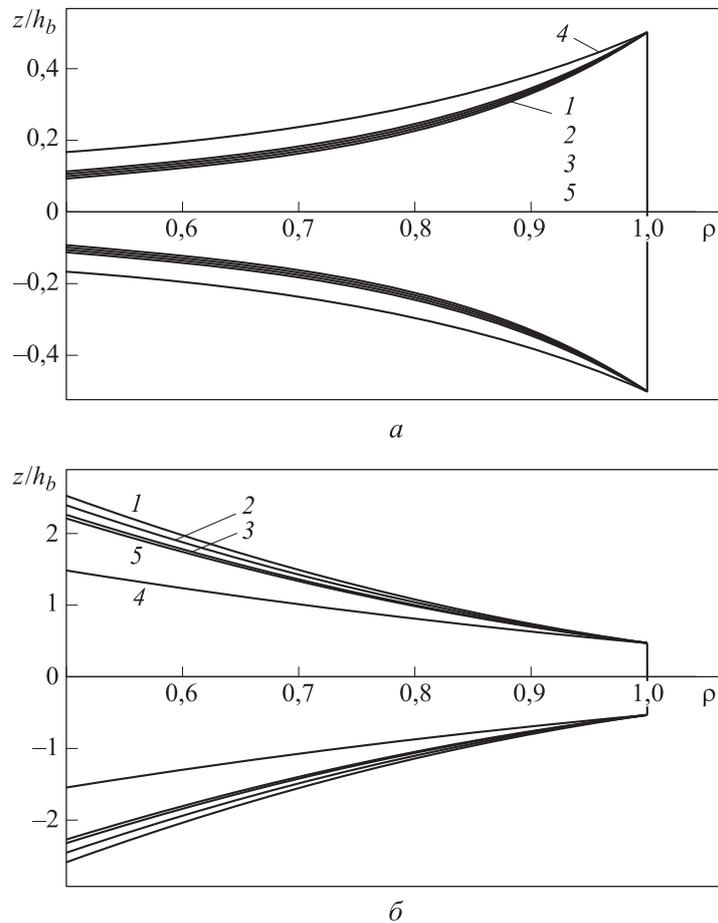


Рис. 2. Профили равнопрочных дисков при $\Omega = 4$ и $\cos \psi_s > 0$ (а), $\cos \psi_s < 0$ (б) для сплавов АА3104 (1), АА5182 (2), АА6016 (3), DC06 (4) и изотропного материала (5)

Заклучение. Развнт подход к определению профиля равнопрочного полого вращающегося диска, к внутреннему и внешнему радиусам которого приложено давление, с учетом пластической анизотропии. Подход включает в себя контроль условия, которое позволяет считать, что предположение о плосконапряженном состоянии приемлемо. Решение является практически аналитическим (за исключением применения численного метода для вычисления обыкновенного интеграла). Подробно разобрана общая структура решения. При заданных геометрических параметрах и параметрах материала этот анализ позволяет найти интервалы изменения независимой переменной, в которых может существовать решение. Количественные результаты приведены для четырех анизотропных и одного изотропного материала. Показано, что в случае сплавов АА3104,

AA5182 и AA6016 профиль равнопрочного анизотропного диска незначительно отличается от профиля изотропного диска. Отличие более существенное для сплава DC06. Учитывая коэффициенты, характеризующие пластическую анизотропию (см. табл. 1), можно сделать вывод, что основное влияние на профиль равнопрочного диска оказывает коэффициент η .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М., Машиностроение, 1978.
- [2] Rees D.W.A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca. *ZAMM*, 1999, vol. 79, no. 4, pp. 281–288.
DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199904\)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V)
- [3] Сёмка Э.В. Качественный и количественный анализ упругопластического состояния вращающегося тонкого диска. *Вестник Инженерной школы ДВФУ*, 2022, № 4, с. 3–12. EDN: TSPACE
- [4] Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзэнг Й.-Р. Влияние зависимости условия текучести от среднего напряжения на распределение напряжений во вращающемся диске. *Доклады РАН*, 2010, т. 435, № 5, с. 610–612. EDN: NCAVQH
- [5] Prokudin A. Schmidt — Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869.
DOI: <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704>
- [6] Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М., Наука, 1986.
- [7] Hein K., Heinloo M. The design of nonhomogeneous equi-strength annular discs of variable thickness under internal and external pressures. *Int. J. Solids Struct.*, 1990, vol. 26, no. 5-6, pp. 617–630. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90033-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90033-R)
- [8] Gau C., Manoochehri S. Optimal design of a nonhomogeneous annular disk under pressure loadings. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 4, pp. 989–996.
DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2919509>
- [9] Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R. Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2024, vol. 52, no. 9, pp. 7045–7062. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2297241>
- [10] Лямина Е.А., Новожилова О.В. Дизайн равнопрочного вращающегося диска. *Инновационные транспортные системы и технологии*, 2023, т. 9, № 1, с. 122–134.
DOI: <https://doi.org/10.17816/transsyst202391122-134>
- [11] Peng X.-L., Li X.-F. Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks. *Int. J. Mech. Sc.*, 2012, vol. 60, no. 1, pp. 84–91.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.04.014>

- [12] Essa S., Argeso H. Elastic analysis of variable profile and polar orthotropic FGM rotating disks for a variation function with three parameters. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 11, pp. 3877–3899. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1896-2>
- [13] Jeong W., Alexandrov S., Lang L. Effect of plastic anisotropy on the distribution of residual stresses and strains in rotating annular disks. *Symmetry*, 2018, vol. 10, no. 9, art. 420. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym10090420>
- [14] Yıldırım V. Numerical/analytical solutions to the elastic response of arbitrarily functionally graded polar orthotropic rotating discs. *J. Braz. Soc. Mech. Sc. Eng.*, 2018, vol. 40, no. 6, art. 320. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1216-3>
- [15] Lyamina E. Effect of plastic anisotropy on the collapse of a hollow disk under thermal and mechanical loading. *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 5, art. 909. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13050909>
- [16] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГОСТЕХИЗДАТ, 1956.
- [17] Alexandrov S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions. Cham, Springer International Publishing, 2015.
- [18] Bayat M., Saleem M., Sahari B.B., et al. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2009, vol. 86, no. 6, pp. 357–372. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.12.006>
- [19] Vivio F., Vullo V., Cifani P. Theoretical stress analysis of rotating hyperbolic disk without singularities subjected to thermal load. *J. Therm. Stresses*, 2014, vol. 37, no. 2, pp. 117–136. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2013.839526>
- [20] Bouvier S., Teodosiu C., Haddadi H., et al. Anisotropic work-hardening behaviour of structural steels and aluminium alloys at large strains. *J. Phys. IV France*, 2003, vol. 105, pp. 215–222. DOI: <https://doi.org/10.1051/jp4:20030190>
- [21] Wu P., Jain M., Savoie J., et al. Evaluation of anisotropic yield functions for aluminum sheets. *Int. J. Plast.*, 2003, vol. 19, no. 1, pp. 121–138. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00033-X](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00033-X)

Лямина Елена Алексеевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов ИПМех РАН (Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1).

Новожилова Ольга Валерьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Лямина Е.А., Новожилова О.В. Влияние пластической анизотропии на профиль равнопрочного вращающегося диска. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2025, № 2 (153), с. 104–117. EDN: PEIOOH

PLASTIC ANISOTROPY INFLUENCE ON THE EQUISTRENGTH ROTATING DISK PROFILE

E.A. Lyamina¹

lyamina@inbox.ru

O.V. Novozhilova²

novozhilova2606@bmstu.ru

¹ IPMech RAS, Moscow, Russian Federation

² BMSTU, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper presents a solution to determine the profile of a rotating hollow equal-strength disk under the plane-stress conditions. It assumes that uniform pressure is applied to the disk outer and inner radii, and the disk material is plastically anisotropic. Elastic deformations are related to the Hooke's law stresses. Transition to the plastic state is determined by Hill's quadratic plasticity condition. The general solution is analytical, except for a need to compute the ordinary integral numerically. Of the three loading parameters (disk angular velocity, pressures on the outer and inner radii), only the two are independent for the equal strength disk. Qualitative analysis of the obtained solution is performed. The paper determines ranges in variation of the sought auxiliary variable, violation of its boundaries could not provide a solution. Restrictions on the boundary conditions are established. In addition to the general solution, a special option is provided being completely analytical. The solution process verified acceptability of an assumption on the plane-stress state. Profiles of the equal-strength rotating disks are constructed for the four anisotropic materials using the experimentally determined anisotropy coefficients, and for an isotropic material satisfying the von Mises plasticity condition

Keywords

Rotating disk, equal-strength disk, plastic anisotropy, plane-stress state, analytical solution

Received 12.04.2024

Accepted 30.09.2024

© Author(s), 2025

The work was partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00335)

REFERENCES

- [1] Demyanushko I.V., Birger I.A. Raschet na prochnost vrashchayushchikhsya diskov [Strength calculation of rotating disks]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1978.
- [2] Rees D.W.A. Elastic-plastic stresses in rotating discs by von Mises and Tresca. *ZAMM*, 1999, vol. 79, no. 4, pp. 281–288.
DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4001\(199904\)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-4001(199904)79:4<281::AID-ZAMM281>3.0.CO;2-V)

- [3] Semka E.V. Qualitative and quantitative analysis of the elastoplastic state of a rotating thin disk. *Vestnik Inzhenernoy shkoly DVFU* [FEFU: School of Engineering Bulletin], 2022, no. 4, pp. 3–12 (in Russ.). EDN: TSPAWE
- [4] Aleksandrov S.E., Lomakin E.V., Dzeng Y.-R. Effect of the pressure dependency of the yield condition on the stress distribution in a rotating disk. *Dokl. Phys.*, 2010, vol. 55, no. 12, pp. 606–608. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335810120050>
- [5] Prokudin A. Schmidt — Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869. DOI: <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704>
- [6] Banichuk N.V. Introduction to optimization of structures, New York, Springer-Verlag, 1990.
- [7] Hein K., Heinloo M. The design of nonhomogeneous equi-strength annular discs of variable thickness under internal and external pressures. *Int. J. Solids Struct.*, 1990, vol. 26, no. 5-6, pp. 617–630. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(90\)90033-R](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90033-R)
- [8] Gau C., Manoochehri S. Optimal design of a nonhomogeneous annular disk under pressure loadings. *J. Mech. Des.*, 1994, vol. 116, no. 4, pp. 989–996. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2919509>
- [9] Alexandrov S., Rynkovskaya M., Jeng Y.-R. Design of equi-strength annular disks made of functionally graded materials. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2024, vol. 52, no. 9, pp. 7045–7062. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2023.2297241>
- [10] Lyamina E.A., Novozhilova O.V. Design of equi-strength rotating disk. *Innovatsionnye transportnye sistemy i tekhnologii* [Modern Transportation Systems and Technologies], 2023, vol. 9, no. 1, pp. 122–134 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17816/transsyst202391122-134>
- [11] Peng X.-L., Li X.-F. Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks. *Int. J. Mech. Sc.*, 2012, vol. 60, no. 1, pp. 84–91. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.04.014>
- [12] Essa S., Argeso H. Elastic analysis of variable profile and polar orthotropic FGM rotating disks for a variation function with three parameters. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 11, pp. 3877–3899. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1896-2>
- [13] Jeong W., Alexandrov S., Lang L. Effect of plastic anisotropy on the distribution of residual stresses and strains in rotating annular disks. *Symmetry*, 2018, vol. 10, no. 9, art. 420. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym10090420>
- [14] Yildırım V. Numerical/analytical solutions to the elastic response of arbitrarily functionally graded polar orthotropic rotating discs. *J. Braz. Soc. Mech. Sc. Eng.*, 2018, vol. 40, no. 6, art. 320. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1216-3>
- [15] Lyamina E. Effect of plastic anisotropy on the collapse of a hollow disk under thermal and mechanical loading. *Symmetry*, 2021, vol. 13, no. 5, art. 909. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13050909>
- [16] Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford, Clarendon press, 1950.

[17] Alexandrov S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions. Cham, Springer International Publishing, 2015.

[18] Bayat M., Saleem M., Sahari B.B., et al. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads. *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2009, vol. 86, no. 6, pp. 357–372.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.12.006>

[19] Vivio F., Vullo V., Cifani P. Theoretical stress analysis of rotating hyperbolic disk without singularities subjected to thermal load. *J. Therm. Stresses*, 2014, vol. 37, no. 2, pp. 117–136. DOI: <https://doi.org/10.1080/01495739.2013.839526>

[20] Bouvier S., Teodosiu C., Haddadi H., et al. Anisotropic work-hardening behaviour of structural steels and aluminium alloys at large strains. *J. Phys. IV France*, 2003, vol. 105, pp. 215–222. DOI: <https://doi.org/10.1051/jp4:20030190>

[21] Wu P., Jain M., Savoie J., et al. Evaluation of anisotropic yield functions for aluminum sheets. *Int. J. Plast.*, 2003, vol. 19, no. 1, pp. 121–138.

DOI: [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(01\)00033-X](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00033-X)

Lyamina E.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Senior Researcher Fellow, Laboratory of Technological Processes, IPMech RAS (Vernadskogo prospekt 101, korp. 1, Moscow, 119516 Russian Federation).

Novozhilova O.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Lyamina E.A., Novozhilova O.V. Plastic anisotropy influence on the equistrength rotating disk profile. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2025, no. 2 (153), pp. 104–117 (in Russ.). EDN: PEIOOH