

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ТЕНЗОВЕСОВЫХ ИСПЫТАНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Н.И. Сидняев

Э. Баттулга

sidnyaev@bmstu.ru

enhee_jrgl@yahoo.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена методика статистической обработки результатов аэродинамического эксперимента с использованием трехкомпонентных внутримодельных тензосенсоров для определения аэродинамических нагрузок. Приведены конструктивные особенности тензосенсоров, принцип действия тензорезисторных датчиков и схема весового аэродинамического эксперимента с использованием внутримодельных тензосенсоров. При планировании эксперимента предполагалось, что принятые допущения регрессионного анализа правомерны, оценивание коэффициентов исходной математической модели выполняется методом наименьших квадратов, позволяющим получить наилучшие линейные оценки. В результате корреляционного анализа подтверждено влияние аэродинамических сил и момента на изучаемый результативный признак. В корреляционном анализе изучены и оценены степени зависимости моментов и аэродинамических сил. Распределения аэродинамических нагрузок приведены в таблице, где указаны частоты пар значений аэродинамических нагрузок. На пересечении каждого столбца и строки таблицы дана частота, указывающая, сколько раз при данных значениях силы аэродинамического сопротивления встречались с указанными значениями подъемной силы. Выполнен анализ попарного действия аэродинамических нагрузок. Число степеней свободы рассчитано по общему правилу: число степеней свободы равно числу всех показателей, из которых вычислена дисперсия, уменьшенному на число связывающих их соотношений

Ключевые слова

Аэродинамический эксперимент, тензосенсоры, регрессия, уравнение, отклонение, сила, статистика

Поступила 04.09.2024

Принята 21.03.2025

© Автор(ы), 2025

Введение. Современная аппаратура для проведения испытаний — сложный измерительный комплекс, который по заданной программе управляет включенным в него вычислительным экспериментом [1–3], проводит сбор

и обработку экспериментальных данных. Важнейшим звеном аппаратуры измерительного комплекса для проведения аэродинамического эксперимента являются аэродинамические весы [4–6].

Аэродинамическую нагрузку, действующую на летательный аппарат (ЛА), принято представлять проекциями результирующей аэродинамической силы и момента на оси соответствующей системы координат. Таким образом, задачей весового эксперимента является определение трех проекций результирующей силы, т. е. в общем случае весы должны быть трехкомпонентными. Если модель симметрична и угол скольжения равен нулю (случай продольного движения), то достаточно измерить три компонента: две силы (нормальную Y и продольную X) и один момент (продольный M_z). В этом случае достаточно иметь трехкомпонентные весы [7, 8]. Если необходимо определить, например, только силу лобового сопротивления, то достаточно однокомпонентных весов.

Современные тензовесы немного уступают в точности механическим, но более удобны в эксплуатации, соответствуют требованиям автоматизации эксперимента и позволяют проводить измерения при быстротекучих ($\Delta t < 10^{-3}$ с) процессах. В связи с этим они находят все большее применение при проведении аэродинамического эксперимента [9]. Общий вид тензовесов с установленной на них моделью приведен на рис. 1.

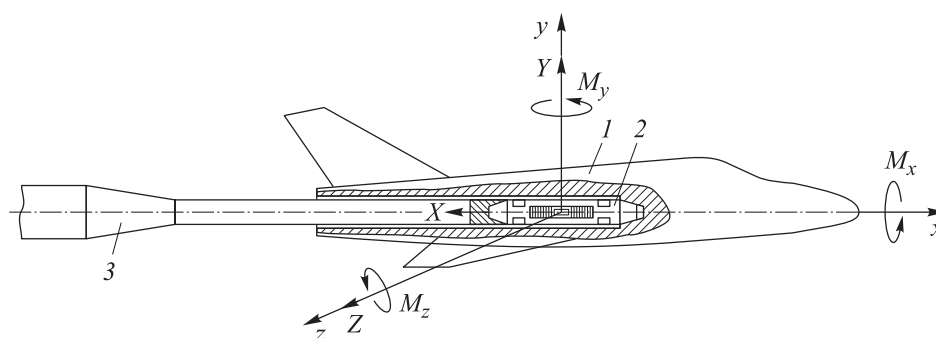


Рис. 1. Общий вид тензовесов с установленной на них моделью:

1 — модель; 2 — державка; 3 — пилон альфа-механизма

Механическая часть конструкции весов представляет собой совокупность упругих и относительно жестких элементов. На упругие элементы наклеены тензодатчики для считывания электрического сопротивления, значения которого меняются при деформациях. В рассматриваемых тензовесах применены кремниевые тензорезисторы. Коэффициент тензочувствительности датчиков обозначим как S . Принцип действия тензовесов следующий: под действием сил, приложенных к весам, упругие элементы дефор-

мируются; тензодатчики, деформируясь вместе с упругими элементами, изменяют сопротивление (увеличивают при растяжении и уменьшают при сжатии); измерительная аппаратура по изменению сопротивления тензодатчиков позволяет определить деформации упругих элементов, а зная деформации, можно найти действующие на модель силы (составляющие нагрузки) [10, 11].

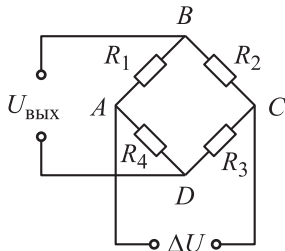


Рис. 2. Схема измерительного моста Уинстона

В простейшем варианте измерительный мост (мост Уинстона) состоит из четырех сопротивлений (плеч моста) (рис. 2). К точкам *B* и *D* (диагональ питания) подведено напряжение питания. Точки *A*, *C* (диагональ измерения) соединены с фиксирующим прибором. В тензовесах обычно датчики включены в четыре плеча моста. Если произведения сопротивлений в противоположных плечах моста равны между собой

$$R_1 R_3 = R_2 R_4, \quad (1)$$

то разность потенциалов на диагонали моста равна нулю, т. е. мост уравновешен (сбалансирован). При изменении одного или нескольких сопротивлений между точками *A* и *C* возникает разность потенциалов $\Delta U = U_{\text{ВЫХ}}$ (напряжение разбаланса), которая при малых значениях отношения $\Delta R / R$ линейно зависит от суммы или разности изменений сопротивления [12].

Аэродинамические весы предназначены для определения проекций на оси координат сил и моментов, действующих на модель, при их произвольном направлении. Решить задачу разделения компонентов можно механическим и (или) электрическим способом. Под механическим способом подразумевается выбор геометрической формы весов так, чтобы деформация в каждом упругом элементе, вызываемая измеряемым компонентом, существенно превышала деформации, порожденные другими компонентами [8]. При отсутствии взаимного влияния компонентов составляющие нагрузки, действующие на весы, определяются так:

$$X_B = k_X N_{X\Pi}; \quad Y_B = k_Y N_{Y\Pi}; \quad M_{zB} = k_{M_z} N_{M_z\Pi}, \quad (2)$$

где X_B , Y_B , M_{zB} — составляющие нагрузки на весы (включая аэродинамические силы и момент); k_X , k_Y , k_{M_z} — градуировочные коэффициенты соответственно для каналов X , Y , M_z , определяемые перед опытом (аналогичным образом определяются M_x , M_y); $N_{X\Pi}$, $N_{Y\Pi}$, $N_{M_z\Pi}$ — показа-

ния потенциометра для соответствующего канала в единицах шкалы (число делений на диаграмме) [13, 14].

Как правило, в тезовесах из-за недостаточной жесткости горизонтальных балок в упругом параллелограмме X (см. рис. 2) параметры Y и M_z влияют на показания компонентов X и Y , поэтому истинные составляющие нагрузки вычисляются так:

$$\begin{aligned} X_B &= k_X N_{X\Pi} - k_{YX} Y_B - k_{M_z X} M_{zB}; \\ Y_B &= k_Y N_{Y\Pi}; \quad M_{zB} = k_{\Pi} N_{M_z\Pi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где k_{YX} , $k_{M_z X}$ — коэффициенты, учитывающие взаимное влияние компонентов Y и M_z на показания X_B . Коэффициенты k_{YX} и $k_{M_z X}$ зависят от геометрических параметров тензовесов и для данных весов являются постоянными. При обработке экспериментальных данных необходимо учитывать следующее [4]:

- проекции X_B и Y_B результирующей силы, действующей на тензовесы, измеряются в связанной с весами системе координат [4, 5];

- измеряемый тензовесами момент M_{zB} (момент внешних сил относительно места наклейки соответствующих тензодатчиков) необходим как промежуточный результат (далее при обозначении этого момента будем добавлять индекс «п», чтобы не путать его с моментом относительно передней кромки);

- кроме аэродинамической нагрузки, с помощью весов измеряются и изменения проекции силы тяжести модели, державки и части самих весов G_S при изменении угла атаки [15].

Выставляя нули до эксперимента по каждому каналу, принимаем за нули проекцию суммарного веса G_S на ось OY и момент M_{zG} от действия G_S . При изменении угла атаки модели проекции G_S на оси тензовесов меняются, даже при отсутствии аэродинамических сил с помощью тензовесов будут определяться нагрузки (рис. 3):

$$\begin{aligned} X_G &= G_{\Sigma} \sin \alpha; \quad Y_G = G_{\Sigma} (1 - \cos \alpha); \\ M_{zG0} &= G_{\Sigma} L_G; \quad M_{zG} = G_{\Sigma} L_G (1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

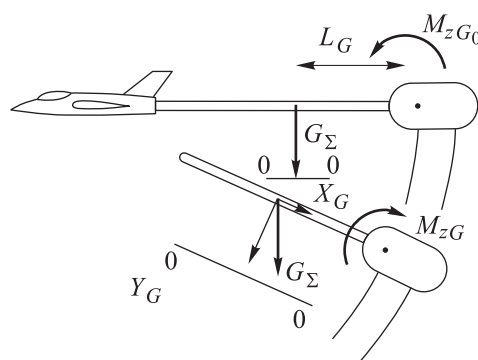


Рис. 3. Схема расположения сил и моментов в аэродинамической трубе

При испытаниях показания приборов складываются из показаний от действия аэродинамических сил и сил тяжести, следовательно, запишем

$$\begin{aligned} N_{X\Pi} &= N_X - N_{XG}; \quad N_{Y\Pi} = N_Y - N_{YG}; \\ N_{M_z\Pi} &= N_{M_z} - N_{M_zG}, \end{aligned} \quad (5)$$

где N_X, N_Y, N_{M_z} — составляющие показаний приборов, вызванные аэродинамической нагрузкой на модель; N_{XG}, N_{YG}, N_{M_zG} — составляющие, обусловленные массой модели, державки и части весов. Обычно N_{XG} соизмеримо с N_X и может быть больше, чем N_X , а $N_{YG} \leq N_Y$, $N_{M_zG} \leq N_{M_z}$, поэтому при постановке эксперимента для определения показаний соответствующих аэродинамических сил и моментов можно использовать соотношения:

$$N_X = N_{X\Pi} - N_{XG}; \quad N_Y \approx N_{Y\Pi}; \quad N_{M_z} \approx N_{M_z\Pi}. \quad (6)$$

С учетом взаимного влияния компонентов и ухода нулей в течение эксперимента окончательно можно записать следующее:

$$\begin{aligned} N_X &= N_{X\Pi} - N_{XG} - \frac{k_{YX}(k_Y N_Y)}{k_X} - \frac{k_{M_z X}(k_{M_z} N_{M_z})}{k_X} - \frac{N_{X\Pi 0}}{2}; \\ N_Y &= N_{Y\Pi} - \frac{N_{Y\Pi 0}}{2}; \quad M_z = N_{M_z\Pi} - \frac{N_{M_z\Pi 0}}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $N_{X\Pi 0}, N_{Y\Pi 0}, N_{M_z\Pi 0}$ — показания приборов после опыта при исходном положении модели; $N_{XG} = N_{XG}(\alpha)$ — определяется перед экспериментом на различных углах атаки модели без потока. Окончательно составляющие аэродинамической нагрузки вычисляются по формулам

$$X = k_X N_X; \quad Y = k_Y N_Y; \quad M_{z\Pi} = k_{M_z} N_{M_z}, \quad (8)$$

где X, Y — продольная и нормальная аэродинамические силы; $M_{z\Pi}$ — аэродинамический момент тангажа.

Момент тангажа относительно носка профиля модели:

$$M_z = M_{z\Pi} - L_n Y, \quad (9)$$

где L_n — расстояние от передней кромки профиля до места наклейки тензодатчиков (электрической оси, где момент равен нулю), измеряющих продольный момент.

Множественная линейная корреляция аэродинамических сил. В аэродинамических исследованиях часто приходится рассматривать статистические связи между несколькими аэродинамическими силами и моментами (рис. 4) [15, 16].

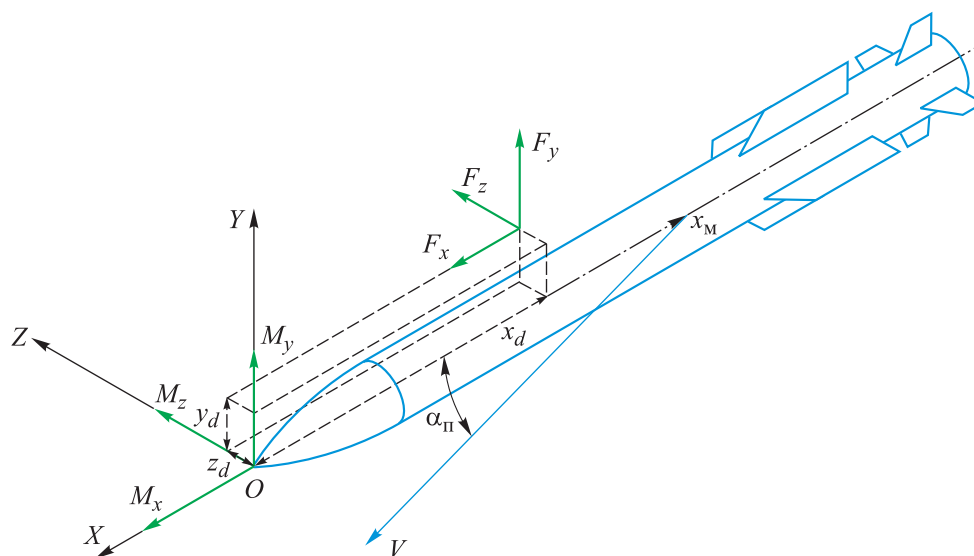


Рис. 4. Схема приложения аэродинамических сил и моментов

Наиболее простой формой такой связи является линейная корреляция. Например, в случае зависимости момента от аэродинамических сил можно искать уравнение связи в виде $M_z = aX + bY + c$. Подъемная сила и положение центра давления изменяются при изменении угла атаки, поскольку меняется подъемная сила. Так, увеличение угла атаки приводит к возрастанию подъемной силы, т. е. на тело действует дополнительная распределенная нагрузка, которая может быть приведена к сосредоточенной силе. Вертикальная составляющая у этой силы есть и должна быть учтена. Поскольку общий момент относительно аэродинамического фокуса не меняется при изменении угла атаки, полагают, что дополнительная результирующая сосредоточенная сила (приращение подъемной силы от изменения угла атаки) прикладывается в точке фокуса. Ее плечо равно нулю, т. е. аэродинамический фокус принимают за точку приложения прироста подъемной силы. Наряду с аэродинамическим фокусом по углу атаки используется понятие второго фокуса по углу отклонения ЛА. Понятие «аэродинамический фокус» оказывается полезным при анализе устойчивости ЛА в области линейного участка зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки. Это связано с тем, что положение аэродинамического фокуса на дозвуковых скоростях (докритических числах Маха) зависит только от аэродинамической схемы и не меняется при изменении угла атаки, в отличие от положения центра давления, которое меняется при изменении угла атаки. На сверхзвуковых скоростях (закри-

тических числах Маха) положение аэродинамического фокуса зависит от числа Маха. Случаи нелинейных множественных связей являются сложными и здесь рассматриваться не будут. Рассмотрим задачу определения коэффициентов a, b, c линейного уравнения регрессии $M_z = aX + bY + c$ так, чтобы это уравнение возможно лучше соответствовало экспериментальным данным. Геометрически это означает, что плоскость $M_z = aX + bY + c$ должна быть как можно ближе к экспериментальным точкам [7–9]. В этой задаче под лучшей близостью понимается следующее: сумма квадратов отклонений (по аппликате) экспериментальных точек от плоскости должна быть наименьшей.

Допустим, что имеются некоторые экспериментальные точки весовых испытаний (табл. 1). В столбце частот указано, сколько раз продублирован эксперимент по определению (X, Y, M_z) . Согласно принципу наименьших квадратов, предположим, что сумма минимальна $S = \sum m [M_z - (aX + bY + c)]^2$ и берется по всем экспериментальным точкам. Для этого частные производные S по параметрам должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c} &= -2 \sum m [M_z - (aX + bY + c)] = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum m [M_z - (aX + bY + c)] X = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum m [M_z - (aX + bY + c)] Y = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения для определения коэффициентов a, b, c :

$$\begin{aligned}c \sum m + a \sum mX + b \sum mY &= \sum m M_z; \\ c \sum mX + a \sum mX^2 + b \sum mXY &= \sum m X M_z; \\ c \sum mY + a \sum mXY + b \sum mY^2 &= \sum m Y M_z.\end{aligned}$$

Таблица 1

Схема представления результатов тензовесовых испытаний

Лобовое сопротивление X	Подъемная сила Y	Момент тангажа M_z	Частота
X_1	Y_1	M_{z1}	m_1
X_2	Y_2	M_{z2}	m_2
...	...	...	...
X_k	Y_k	M_{zk}	m_k

Из первого уравнения следует, что $c = \bar{M}_z - a\bar{X} - b\bar{Y}$, где $\bar{M}_z = \frac{\sum m M_z}{\sum m}$;
 $\bar{X} = \frac{\sum m X}{\sum m}$; $\bar{Y} = \frac{\sum m Y}{\sum m}$, следовательно, уравнение связи имеет вид
 $M_z = \bar{M}_z + a(X - \bar{X}) + b(Y - \bar{Y})$.

Уравнения для определения коэффициентов a , b , c можно упростить, введя отклонения $\delta_X = X - \bar{X}$; $\delta_Y = Y - \bar{Y}$; $\delta_{M_z} = M_z - \bar{M}_z$. Уравнение связи запишем как $\delta_{M_z} = a\delta_X + b\delta_Y$. Коэффициенты a и b определим из нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} a \sum m \delta_X^2 + b \sum m \delta_X \delta_Y &= \sum m \delta_X \delta_{M_z}; \\ a \sum m \delta_X \delta_Y + b \sum m \delta_Y^2 &= \sum m \delta_Y \delta_{M_z}. \end{aligned}$$

Для решения этих уравнений введем коэффициенты линейной корреляции между X и Y , X и M_z , Y и M_z :

$$r_{XY} = \frac{\sum m \delta_X \delta_Y}{N \sigma_X \sigma_Y}; \quad r_{YM_z} = \frac{\sum m \delta_Y \delta_{M_z}}{N \sigma_Y \sigma_{M_z}}; \quad r_{XM_z} = \frac{\sum m \delta_X \delta_{M_z}}{N \sigma_X \sigma_{M_z}} \quad (N = \sum m).$$

Тогда приведенные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} a N \sigma_X^2 + b N r_{XY} \sigma_X \sigma_Y &= N r_{XM_z} \sigma_X \sigma_{M_z}; \\ a N r_{XY} \sigma_X \sigma_Y + b N \sigma_Y^2 &= N r_{YM_z} \sigma_Y \sigma_{M_z}, \end{aligned}$$

после сокращений получим

$$\begin{aligned} a \sigma_X + b r_{XY} \sigma_Y &= r_{XM_z} \sigma_{M_z}; \\ a r_{XY} \sigma_X + b \sigma_Y &= r_{YM_z} \sigma_{M_z}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a = \frac{r_{XM_z} \sigma_{M_z} - b r_{XY} \sigma_Y}{\sigma_X}; \quad b = \frac{r_{YM_z} \sigma_{M_z} - a r_{XY} \sigma_X}{\sigma_Y}.$$

Используя эти формулы можно полностью решить задачу определения коэффициентов уравнения множественной линейной связи $M_z - \bar{M}_z = a(X - \bar{X}) + b(Y - \bar{Y})$.

Соответствующая плоскость — это плоскость регрессии момента M_z относительно параметров X и Y . За коэффициент линейной связи M_z с X и Y принимают сводный совокупный коэффициент корреляции между M_z и парой (X, Y)

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{m \ln}}{N \sigma_{M_z}^2}}.$$

Преобразуем коэффициент R . Параметр S принимает наименьшее значение при указанных значениях коэффициентов a , b , c , тогда

$$\begin{aligned} \min S &= \sum m [\delta_{M_z} - a\delta_X - b\delta_Y]^2 = \sum m \delta_{M_z}^2 + a^2 \sum m \delta_X^2 + b^2 \sum m \delta_Y^2 - \\ &\quad - 2a \sum m \delta_X \delta_{M_z} - 2b \sum m \delta_Y \delta_{M_z} + 2ab \sum m \delta_X \delta_Y = \\ &= N \sigma_{M_z}^2 \left[1 + \left(a \frac{\sigma_X}{\sigma_{M_z}} \right)^2 + \left(b \frac{\sigma_Y}{\sigma_{M_z}} \right)^2 - 2a \frac{\sigma_X}{\sigma_{M_z}} r_{XM_z} - \right. \\ &\quad \left. - 2b \frac{\sigma_Y}{\sigma_{M_z}} r_{YM_z} + 2ab \frac{\sigma_X \sigma_Y}{\sigma_{M_z}^2} r_{XY} \right]. \end{aligned}$$

После простых преобразований получим

$$\min S = N \sigma_{M_z}^2 \left[1 - \frac{r_{XM_z}^2 + r_{YM_z}^2 - 2r_{XY} r_{XM_z} r_{YM_z}}{1 - r_{XY}^2} \right],$$

следовательно, коэффициент корреляции представим так:

$$R = \sqrt{\frac{r_{XM_z}^2 + r_{YM_z}^2 - 2r_{XY} r_{XM_z} r_{YM_z}}{1 - r_{XY}^2}}.$$

Эта формула позволяет вычислить R при известных r_{XY} , r_{XM_z} , r_{YM_z} .

Совокупный коэффициент R всегда находится между нулем и единицей:

– при $R = 0$ между моментом M_z и X , Y нет линейной зависимости, так как в этом случае $\min S = N \sigma_{M_z}^2$, т. е.

$$\sum m (\delta_{M_z} - a\delta_X - b\delta_Y)^2 = \sum m \delta_{M_z}^2,$$

следовательно, $a\delta_X + b\delta_Y = 0$;

– при $R = 1$ между M_z и X , Y имеется функциональная линейная связь, поскольку $\min S = 0$, т. е.

$$\sum m (\delta_{M_z} - a\delta_X - b\delta_Y)^2 = 0,$$

следовательно, все экспериментальные точки лежат в плоскости регрессии:

$$M_z - \bar{M}_z = a(X - \bar{X}) + b(Y - \bar{Y}).$$

Для определения влияния на полученный результат каждого фактора в отдельности, вычисляем парциальный коэффициент корреляции. При изучении зависимости между X , Y , M_z парциальные коэффициенты корреляции рассчитываем по формуле [16]

$$r_{XM_z(Y)} = \frac{r_{XM_z} - r_{XY} r_{YM_z}}{\sqrt{(1 - r_{XY}^2)(1 - r_{YM_z}^2)}}.$$

По этой формуле определим меру линейной зависимости между X и M_z , оставляя постоянным значение Y , т. е. измеряем влияние только X на M_z .

Парциальный коэффициент между M_z и Y при постоянном значении x вычисляется как

$$r_{YM_z(X)} = \frac{r_{YM_z} - r_{XY} r_{XM_z}}{\sqrt{(1 - r_{XY}^2)(1 - r_{XM_z}^2)}}.$$

Если необходимо определить парциальный коэффициент корреляции между X и Y , оставляя постоянным M_z , то расчет выполняется по формуле

$$r_{XY(M_z)} = \frac{r_{XY} - r_{XM_z} r_{YM_z}}{\sqrt{(1 - r_{XM_z}^2)(1 - r_{YM_z}^2)}}.$$

Множественная линейная корреляция между колебаниями аэродинамических сил. Рассмотрим зависимость между колебаниями аэродинамических сил при измерениях на трехкомпонентных тензовесах [17]: лобового сопротивления (X), подъемной силы (Y) и момента тангажа (M_z). Результаты наблюдения колебаний сил и момента можно представить графически в виде поля корреляции, а также эмпирических рядов зависимостей $\bar{Y}_X(X)$ и $\bar{X}_Y(Y)$. Если установлен характер связи по эмпирическим данным, то можно найти и уравнение зависимости $Y = f(X)$.

Вычислим эмпирические ряды зависимостей $\bar{Y}_X(X)$ и $\bar{X}_Y(Y)$, для чего используем формулы

$$\bar{Y}_X = Y_0 + \frac{\sum m_{XY} Y'}{m_X} h_Y \quad \text{и} \quad \bar{X}_Y = X_0 + \frac{\sum m_{XY} X'}{m_Y} h_X.$$

В результате получим ряд числовых значений (табл. 2), характеризующих корреляционную связь $\bar{Y}$ и X .

Таблица 2

Числовые значения, характеризующие корреляционную связь

Параметр	Числовые значения									
$X \cdot 10^{-1}$, кг	0,15	0,35	0,55	0,75	0,95	1,15	1,35	1,55		
$\bar{Y}_X \cdot 10^{-1}$	0,37	0,64	0,73	0,82	0,99	1,26	1,23	1,42		
$Y \cdot 10^{-1}$, кг	0,15	0,35	0,55	0,75	0,95	1,15	1,35	1,55	1,75	1,95
$\bar{X}_Y \cdot 10^{-1}$	0,38	0,54	0,53	0,68	0,80	0,80	0,90	1,05	1,12	1,22

По значениям X (середина интервала) и вычисленным $\bar{Y}_X$ строим эмпирическую кривую зависимости между $\bar{Y}_X$ и X , по значениям Y (середина интервала) и вычисленным $\bar{X}_Y$ — кривую зависимости между Y и $\bar{X}_Y$.

Приведенные в табл. 2 эмпирические ряды дают только приближенные значения характера связи, следовательно, вычисленная эмпирическая кривая, описывающая закон изучаемой связи, не будет точно отражать теоретическую функцию $Y = f(X)$. В рассматриваемом случае необходимо найти соответствующее уравнение связи исследуемых явлений. Для этого построим теоретическую кривую зависимости. На основании полученных эмпирических кривых полагаем существование прямолинейной зависимости между X и Y . Найдем эту теоретическую прямую, которая наиболее близко проходила бы около эмпирической зависимости общего вида $Y = aX + b$.

Для оценки близости используется метод наименьших квадратов. При определении параметров a и b прямой используем уравнения регрессии и выразим их через замену переменных, в целях упрощения расчетов применим способ моментов и сначала определим условную теоретическую линию [8] $Y' = a'X' + b'$. Затем, подставляя $Y' = \frac{Y - Y_0}{h_Y}$

и $X' = \frac{X - X_0}{h_X}$, перейдем к искомой теоретической прямой

$$nb' + a' \sum m_X X' = \sum m_X y'_x;$$

$$b' \sum m_X X' + a' \sum m_X X'^2 = \sum m_X X' Y'_X.$$

Здесь $\bar{Y}'_X = \frac{\sum m_{XY} Y'}{m_Y}$; $m_X \bar{Y}'_X = \sum m_{XY} Y'$.

Подставляя полученные экспериментальные данные в уравнение регрессии, получаем $Y = 0,708X + 0,034$. В рассматриваемом случае это уравнение теоретической прямой регрессии Y на X ; здесь $a = 0,708$; $b = 0,034$. Чтобы построить теоретическую прямую, достаточно найти координаты двух крайних точек (X_1, Y_1) и (X_8, Y_8) . Ординаты крайних точек прямой будут $Y_1 = 0,045$; $Y_8 = 0,144$. Аналогично находим уравнение прямой регрессии X и Y . Здесь

$$\bar{X}'_Y = \frac{\sum mX'}{m_Y},$$

тогда $m_Y \bar{X}'_Y = \sum mX'$. Полученные коэффициенты подставляем в уравнения и решаем:

$$\begin{aligned} 200b' + 92a' &= -40; & -200 \cdot 92b' - 92 \cdot 92a' &= 40; & a' &= 0,445; \\ 92b' + 978a' &= 398; & 92 \cdot 200b' + 978 \cdot 200a' &= 398 \cdot 200; & b' &= -0,405. \end{aligned}$$

В уравнение $X' = a'Y' + b'$ подставим $a' = 0,445$, $b' = -0,405$, тогда $X' = 0,445Y' - 0,405$. Далее выполним подстановку

$$X' = \frac{X - X_0}{h_X} = \frac{X - 0,075}{0,02}; \quad Y' = \frac{Y - Y_0}{h_Y} = \frac{Y - 0,075}{0,02}; \quad X = 0,445Y + 0,034.$$

Таким образом,

$$\bar{X}' = \frac{\sum m_X X'}{N} = -0,2 \quad (N = \sum m_X = \sum m_Y); \quad \bar{X} = X_0 + \bar{X}' h_X = 0,071;$$

$$\bar{Y}' = \frac{\sum m_{YY'}}{N} = 0,46; \quad \bar{Y} = Y_0 + \bar{Y}' h_Y = 0,0842;$$

$$N\sigma_X^2 = \sum m_X X'^2 h_X^2 - N\bar{X}'^2; \quad \sigma_X^2 = \frac{\sum m_X X'^2 h^2}{N} - \bar{X}'^2;$$

$$\sigma_X^2 = h_X^2 \left[\frac{596}{200} - \left(\frac{-40}{200} \right)^2 \right] = h_X^2 (2,98 - 0,04) = h_X^2 \cdot 2,94;$$

$$\sigma_X = h_X \cdot 1,715 = 0,034; \quad \sigma_X = 0,034 \quad (\sigma'_X = 1,715);$$

$$N\sigma_Y^* = \sum m_Y Y'^2 h_Y^* - N\bar{Y}'^2;$$

$$\sigma_Y^8 = \frac{\sum m_Y Y'^2 h_Y^2}{N} - \bar{Y}'^2;$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^* &= h_Y^* \left[\frac{978}{200} - \left(\frac{92}{200} \right)^2 \right] = h_Y^* (4,89 - 0,2116) = h_Y^* \cdot 4,6784; \\ \sigma_Y &= h_Y \cdot 2,163 = 0,043; \\ \sigma_Y &= 0,043 \quad (\sigma'_Y = 2,163).\end{aligned}$$

Аналогично предшествующим вычислениям определим статистические характеристики $\bar{M}_z$ и σ_{M_z} :

$$\begin{aligned}\bar{M}'_z &= \frac{\sum m_n M'_z}{N} = -0,405; \quad \bar{M}_z = M_{z0} + \bar{M}'_z h_{M_z} = 0,098; \\ \sigma_{M_z}^2 &= h_{M_z}^2 \left[\frac{583}{200} - \left(\frac{-81}{200} \right)^2 \right] = h_{M_z}^2 (2,915 - 0,164) = h_{M_z}^2 \cdot 2,751; \\ \sigma_X &= h_X \cdot 1,658 = 0,0497; \quad \sigma_{M_z} \approx 0,050; \quad \sigma'_{M_z} = 1,658.\end{aligned}$$

Отсюда рассчитаем коэффициенты корреляции [11] между аэродинамическими силами X и Y после проведения испытаний:

$$r_{XY} = \frac{\sum m_{XY} X'Y' - N\bar{X}'\bar{Y}'}{N\sigma'_X\sigma'_Y} = 0,561;$$

$$\rho_{Y/X} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0,7095; \quad Y - \bar{Y} = \rho_{Y/X} (X - \bar{X});$$

$$Y - 0,0842 = 0,7095(X - 0,071);$$

$$Y - 0,0842 = 0,7095X - 0,0504; \quad Y = 0,71X + 0,034;$$

между аэродинамической силой Y и моментом M_z :

$$r_{YM_z} = \frac{\sum m_{YM_z} Y'M'_z - N\bar{Y}'\bar{M}'_z}{N\sigma'_Y\sigma'_{M_z}} = 0,607; \quad r_{YM_z} \geq 0,607;$$

между аэродинамической силой X и моментом M_z :

$$r_{XM_z} = \frac{\sum m_{XM_z} X'M'_z - N\bar{X}'\bar{M}'_z}{N\sigma_X\sigma_{M_z}} = 0,455.$$

Для определения параметров a и b плоскости регрессии M_z на X и Y используем уравнения [10, 11]

$$a\sigma_X + br_{XY}\sigma_Y = r_{XM_z}\sigma_{M_z};$$

$$ar_{XY}\sigma_X + b\sigma_Y = r_{YM_z}\sigma_{M_z}.$$

Подставляя найденные значения, получаем: $r_{XY} = 0,561$; $\sigma_X = 0,034$; $r_{YM_z} = 0,607$; $\sigma_Y = 0,043$; $r_{XM_z} = 0,455$; $\sigma_{M_z} = 0,050$; $a = 0,249$; $b = 0,60$.

Таким образом, уравнение плоскости регрессии M_z на X и Y имеет вид

$$\begin{aligned} M_z - \bar{M}_z &= a(X - \bar{X}) + b(Y - \bar{Y}); \\ M_z - \bar{M}_z &= 0,24(X - \bar{X}) + 0,60(Y - \bar{Y}). \end{aligned}$$

Совокупный коэффициент корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{XM_z}^2 + r_{YM_z}^2 - 2r_{XY}r_{XM_z}r_{YM_z}}{1 - r_{XY}^2}}; \quad R = 0,622.$$

Частные коэффициенты корреляции составляют $r_{XY(M_z)} = 0,403$; $r_{XM_z(Y)} = 0,173$; $r_{YM_z(X)} = 0,478$.

Совокупный коэффициент корреляции хотя и значительный, но очень мало превышает M_z с X , M_z с Y [18, 19]. Это указывает на то, что обе силы X и Y в смысле влияния на M_z по существу повторяют друг друга [20]. В результате обработки данных определена высокая корреляция между M_z , X и Y . Совокупный коэффициент корреляции можно оценить как

$$\theta_R = \frac{N-3}{2} \frac{R^2}{1-R^2} \quad \text{при } k_1 = 2 \text{ и } k_2 = N-3.$$

Заключение. В аэродинамическом эксперименте при исследовании малоизученных аэродинамических сил и моментов часто в программу исследования приходится включать множество независимых переменных, полагая, что в дальнейшем большая часть эффектов, взятых приближенными, будет отсеяна, так как они окажутся незначимыми. Форма уравнения связи должна устанавливаться анализом ее объективной природы. Показано, как на этой основе можно записать уравнение связи более сложной формы, чем линейная. Результаты анализа формул для расчета коэффициентов позволяют сделать вывод о том, что только для линейного уравнения такой план эксперимента дает независимые оценки коэффициентов уравнения. В квадратичном уравнении независимым образом определяется лишь линейный коэффициент, а в кубическом уравнении ни один коэффициент так не определяется. Это означает, что исключение из уравнений какого-либо коэффициента как незначимого вызывает необходимость пересчета оценок связанных с ним коэффициентов. Применение метода наименьших квадратов имеет четкий алгоритм, если аппроксимиро-

ющая зависимость представляет собой полином любой степени. Характер экспериментальных данных во многих случаях не дает возможности успешно применить полиномиальную модель. Однако многие виды зависимостей приведены к полиномиальной структуре логарифмированием или заменой переменных. Следует иметь в виду, что часто на практике возникает ситуация с изменением силы X в таком ограниченном интервале, что изменение $\bar{Y}'_X$ в нем достаточно близко отображается отрезком прямой (или, например, параболы второго порядка). Однако всегда необходимо иметь в виду, что природа этой зависимости может приводить к более сложному уравнению связи. Нельзя использовать полученные на ограниченном материале линейные уравнения для вычисления значений Y , соответствующих значениям X , значительно выходящим за пределы того интервала, в котором лежали эмпирические значения, т. е. для экстраполяции. В случае когда объективная природа связи определяет ее криволинейный характер, прямая, полученная эмпирически, в определенных случаях может быть пригодной для описания этого эксперимента, но для экстраполяции она совершенно недопустима, поскольку не отражает подлинного объективного характера зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алиева Д.А., Гришин И.И., Колинько К.А. и др. Комплексные экспериментальные исследования продольных аэродинамических характеристик модели CRM в Т-103 ЦАГИ. *Ученые записки ЦАГИ*, 2019, т. 50, № 5, с. 47–60. EDN: GRQJVV
- [2] Сидняев Н.И. Исследование аэродинамических характеристик затупленных тел вращения при обтекании сверхзвуковым потоком с массообменом. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2006, № 4, с. 9–17. EDN: HUNPHX
- [3] Сидняев Н.И. Аэродинамические характеристики гиперзвуковых летательных аппаратов с поверхностным массообменом. *Математическое моделирование*, 2008, т. 20, № 6, с. 23–34. EDN: JTEFUH
- [4] Кравченко Д.А. Расчетные методы вычисления аэродинамических производных демпфирования магистрального самолета. *Техника воздушного флота*, 2015, т. 89, № 2, с. 33.
- [5] Сидняев Н.И. Обзор методик исследования обтекания гиперзвуковым потоком газа тел с разрушающимся покрытием. *Теплофизика и аэромеханика*, 2004, т. 11, № 4, с. 501–522. EDN: OIIAQN
- [6] Сидняев Н.И. Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения. М., ФИЗМАТЛИТ, 2017.
- [7] Алиева Д.А., Гришин И.И., Колинько К.А. и др. Гистерезис и асимметрия аэродинамических характеристик при развитии отрыва потока на модели самолета

с прямым крылом большого удлинения. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2022, № 6, с. 34–40. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528122600242>

[8] Ахметшин Т.Ф. Сертификация авиационной техники. *Вестник УГАТУ*, 2014, т. 18, № 2, с. 10–18. EDN: SEAXNB

[9] Кононюк А.Е. Основы научных исследований. Киев, Освита України, 2012.

[10] Алиева Д.А., Колинко К.А., Храбров А.Н. Гистерезис аэродинамических характеристик профиля NASA 0018 при малых дозвуковых скоростях. *Теплофизика и аэромеханика*, 2022, т. 29, № 1, с. 45–59. EDN: HZPRWO

[11] Кашуба Н.С. Математическое планирование научно-технических исследований. *Оценка эффективности образовательных инноваций и технологий. Матер. Шестой Всерос. науч.-практ. конф.* Славянск-на-Кубани, КубГУ, 2004, с. 127–131. EDN: VITQOL

[12] Сафронов А.И., Зоркин В.А., Потапенко В.В. Анализ и баллистическое проектирование лабораторной установки малого калибра с присоединенными камерами подгона. *Вестник СГАУ им. Академика С.П. Королёва*, 2011, № 3-2, с. 266–270. EDN: OWQPZR

[13] Маслов А.А., Шумский В.В., Ярославцев М.И. Импульсная аэродинамическая труба с комбинированным нагревом и стабилизацией параметров. *Прикладная механика и техническая физика*, 2012, т. 53, № 6, с. 3–10. EDN: PIDUFD

[14] Буй В.Т., Калугин В.Т., Хлупнов А.И. Коррекция результатов весовых испытаний модели применительно к условиям свободного потока при малых дозвуковых скоростях. *Космонавтика и ракетостроение*, 2016, № 1, с. 86–93. EDN: VPQESZ

[15] Калугин В.Т., Луценко А.Ю., Слободянюк Д.М. Исследование аэродинамических характеристик различных конструкций крышки люка парашютного контейнера при отделении от возвращаемого аппарата. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 2, с. 65–74. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-65-74>

[16] Боровой В.Я., Бражко В.Н., Егоров И.В. и др. Диагностика и численное моделирование течения в гиперзвуковых аэродинамических трубах импульсного действия. *Ученые записки ЦАГИ*, 2013, т. 44, № 5, с. 28–38. EDN: RCIYHB

[17] Гудков И.А., Лаптева Л.А., Тищенко Д.Ю. и др. Методика расчета коэффициента подъемной силы бикалиберных и аэробаллистических ракет. *Известия РАН*, 2023, № 4, с. 167–172. EDN: KVTXHU

[18] Калугин В.Т., Слободянюк Д.М. Численное определение аэродинамических характеристик возвращаемого аппарата и лобового теплозащитного экрана при его отделении с учетом взаимного интерференционного влияния. *Известия вузов. Сер. Авиационная техника*, 2020, № 3, с. 53–60. EDN: TZJJUE

[19] Khrabrov A.N., Kravchenko D.A. Computational investigation of unsteady aerodynamic characteristics of a modern airliner. *Proc. 29th ICAS*, 2014, paper ICAS2014_0442. EDN: UFIEIJ

[20] Калутин В.Т., Чилингаров А.Р., Воронцов С.А. и др. Моделирование процессов обтекания и расчет силовых характеристик органов управления транспортных средств с винтокольцевыми движителями. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2007, № 3, с. 85–90. EDN: IADZZN

Сидняев Николай Иванович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Баттулга Энхжаргал — аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Сидняев Н.И., Баттулга Э. Статистическая обработка тензовесовых испытаний аэродинамических сил. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2025, № 2 (153), с. 50–69. EDN: OIELDG

STATISTICAL PROCESSING OF THE STRAIN-GAUGE WEIGHING TESTS OF THE AERODYNAMIC FORCES

N.I. Sidnyaev

E. Battulga

sidnyaev@bmstu.ru

enhee_jrgl@yahoo.com

BMSTU, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers a technique for statistical processing of results of the aerodynamic experiment using the three-component in-model strain-gauge weighers to determine the aerodynamic loads. It provides design features of the strain-gauge weighers, operating principle of the strain-gauge resistor sensors, and the scheme of the weighing aerodynamic experiment using the in-model strain gauge weigher. Planning the experiment assumes that the adopted regression analysis assumptions are valid; and the initial mathematical model coefficients would be assessed using the least squares method, which makes it possible to obtain the best linear estimates. The aerodynamic forces and torque influence on the studied resulting indicator is confirmed using the correlation analysis. Dependence degrees of the aerodynamic forces and torques are studied and measured in the correlation analysis. The aerodynamic loads distribution is shown in the Table, where frequencies of the

Keywords

Aerodynamic experiment, strain-gauge weigher, regression, equation, deviation, force, statistics

aerodynamic load values pairs are indicated. At the intersection of each column and row in the Table, a frequency is provided indicating, how many times at the given values of the aerodynamic drag force there are specified values of the lift force. Analysis of the aerodynamic loads pairwise action is performed. The number of degrees of freedom is computed according to the general rule: the number of degrees of freedom is equal to the number of all the indicators, from which the dispersion is computed, reduced by the number of relations connecting them

Received 04.09.2024

Accepted 21.03.2025

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Alieva D.A., Grishin I.I., Kolinko K.A., et al. Complex experimental tests of CRM model longitudinal aerodynamic characteristics in T-103 at TsAGI. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2019, vol. 50, no. 5, pp. 47–60 (in Russ.). EDN: GRQJWV
- [2] Sidnyaev N.I. Investigation of aerodynamic characteristics of blunted bodies of rotation under supersonic flow with mass transfer. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2006, no. 4, pp. 9–17 (in Russ.). EDN: HUHPHX
- [3] Sidnyaev N.I. Aerodynamic performances of hypersonic aircrafts with surface mass transfer. *Math. Models Comput. Simul.*, 2009, vol. 1, no. 3, pp. 343–352. EDN: UELSXX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048209030016>
- [4] Kravchenko D.A. Computational methods for calculating aerodynamic derivatives of mainline airplane damping. *Tekhnika vozdushnogo flota*, 2015, vol. 89, no. 2, p. 33 (in Russ.).
- [5] Sidnyaev N.I. Review of methods for studying hypersonic gas flows past bodies with ablating coating. *Thermophys. Aeromech.*, 2004, vol. 11, no. 4, pp. 489–508. EDN: VSJVAF
- [6] Sidnyaev N.I. Obtekanie giperzvukovykh letatelnykh apparatov v usloviyakh poverkhnostnogo razrusheniya [Flowing of hypersonic aircraft under surface fracture conditions]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2017.
- [7] Alieva D.A., Grishin I.I., Kolinko K.A., et al. Hysteresis and asymmetry of the aerodynamic characteristics of aircraft model with high aspect ratio straight wing under the flow separation. *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 6, pp. 729–735. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462822601280>
- [8] Akhmetshin T.F. Aviation techniques certification. *Vestnik UGATU*, 2014, vol. 18, no. 2, pp. 10–18 (in Russ.). EDN: SEAXNB
- [9] Kononyuk A.E. Osnovy nauchnykh issledovaniy [Fundamentals of scientific research]. Kiev, Osvita Ukrainy Publ., 2012.

- [10] Alieva D.A., Kolinko K.A., Khrabrov A.N. Hysteresis of the aerodynamic characteristics of NACA 0018 airfoil at low subsonic speeds. *Thermophys. Aeromech.*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 43–57. EDN: ZNTGTV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0869864322010036>
- [11] Kashuba N.S. [Mathematical planning of scientific and technical research]. *Otsenka effektivnosti obrazovatelnykh innovatsiy i tekhnologiy. Mater. Shestoy vseros. nauch.-prakt. konf.* [Evaluation of the effectiveness of educational innovations and technologies]. Slavyansk-na-Kubani, KubGU Publ., 2004, pp. 127–131 (in Russ.). EDN: VITQOL
- [12] Safronov A.I., Zorkin V.A., Potapenko V.V. Analysis and ballistics design of a laboratory installation system a small calibre with a joined drive on chambers. *Vestnik SGAU im. Akademika S.P. Koroleva*, 2011, no. 3-2, pp. 266–270 (in Russ.). EDN: OWQPZR
- [13] Maslov A.A., Shumskiy V.V., Yaroslavtsev M.I. Short-duration wind tunnel with combined heating and stabilization of parameters. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 805–811. EDN: RGFRVD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412060016>
- [14] Buy V.T., Kalugin V.T., Khlupnov A.I. Correction of force tests of a model in relation to the conditions of free flow at low subsonic speeds. *Kosmonavtika i raketostroyeniye* [Cosmonautics and Rocket Engineering], 2016, no. 1, pp. 86–93 (in Russ.). EDN: VPQESZ
- [15] Kalugin V.T., Lutsenko A.Yu., Slobodyanyuk D.M. Aerodynamic study of the parachute container hatch door with various design parameters in its separation from the reentry vehicle. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2022, no. 2, pp. 65–74 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2022-2-65-74>
- [16] Borovoy V.Ya., Brazhko V.N., Egorov I.V., et al. Diagnostics and numerical simulation of flows in hypersonic short-duration wind tunnels. *TsAGI Sc. J.*, 2013, vol. 44, no. 5, pp. 609–626. DOI: <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2014010778>
- [17] Gudkov I.A., Lapteva L.A., Tishchenko D.Yu., et al. Methodology for calculating the normal-force coefficient of bi-caliber and aeroballistic missiles. *Izvestiya RARAN*, 2023, no. 4, pp. 167–172 (in Russ.). EDN: KVTXHU
- [18] Kalugin V.T., Slobodyanyuk D.M. Numerical determination of the aerodynamic characteristics of the re-entry vehicle and the front heat shield during its separation taking into account mutual interference influence. *Russ. Aeronaut.*, 2020, vol. 63, no. 3, pp. 425–433. EDN: JUDFMN. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799820030071>
- [19] Khrabrov A.N., Kravchenko D.A. Computational investigation of unsteady aerodynamic characteristics of a modern airliner. *Proc. 29th ICAS*, 2014, paper ICAS2014_0442. EDN: UFIEIJ
- [20] Kalugin V.T., Chilingarov A.R., Vorontsov S.A., et al. Modeling of streamline processes and calculation of force characteristics of vehicle controls with propeller-ring propulsors. *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2007, no. 3, pp. 85–90 (in Russ.). EDN: IADZZN

Sidnyaev N.I. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Battulga E. — Post-Graduate Student, Department of Higher Mathematics, BMSTU (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Sidnyaev N.I., Battulga E. Statistical processing of the strain-gauge weighing tests of the aerodynamic forces. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2025, no. 2 (153), pp. 50–69 (in Russ.). EDN: OIELDG