

ВАРИАНТ ОПТИМИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

И.Д. Бондарев
Л.В. Фёдоров

sigma@vpk.npomash.ru

АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов, Московская обл.,
Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача оптимизации эллиптической оболочки вращения переменной толщины, нагруженной внешним давлением, с учетом конструктивно-технологических ограничений. Приведен вариант решения на основе сочетания хорошо известных численных методов: алгоритма поиска локального минимума некоторой функции и метода конечных элементов, определяющего эту функцию по заданным критериям. Предлагаемый вариант решения используется для широкого круга практических задач оптимизации конструкций, когда не удается получить удобных для проектирования аналитических выражений. При этом не предполагается ограничений при реализации алгоритма поиска минимума функции, метода конечных элементов, а также связывающего их программного обеспечения. Выполнен сравнительный анализ результатов в зависимости от начального положения в пространстве параметров и настроек приведенного алгоритма. В качестве начальных параметров рассмотрены два варианта. В первом в качестве начального положения в пространстве параметров использована толщина в полюсе, полученная из условий устойчивости, во втором — максимальная толщина, определенная из условия прочности по эквивалентным напряжениям. Показано, что применение ограничений по эквивалентным напряжениям и критической нагрузке в качестве первых приближений отдельно друг от друга приводит к схожим результатам

Ключевые слова

Эллиптическая оболочка вращения, оптимизация, локальный минимум, метод конечных элементов, прочность, устойчивость

Поступила 01.03.2024

Принята 22.04.2024

© Автор(ы), 2025

Введение. При проектировании конструкций летательных аппаратов остро актуален вопрос их массового совершенства. Проблема сводится к поиску значений проектных параметров, называемых оптимальными, при которых обеспечивается работоспособность конструкции в заданных условиях при минимуме ее массы. Сложность такой постановки заключается в индивидуальности проектных параметров, накладываемых на них технологических и конструктивных ограничений, а также нагрузок в каждом отдельном случае.

Для ряда типовых конструкций и комбинаций нагрузок задача оптимизации может быть решена аналитически. Однако в ряде практических задач некоторые допущения могут казаться недостаточными или вовсе недопустимыми, поэтому более практичным представляется использование численных методов.

Применение численных методов при проектировании предполагает реализацию алгоритма изменения параметров проектирования для получения оптимального результата.

Известны методы топологической оптимизации [1–3], применяемые в различных областях машиностроения [4–6], в том числе в аэрокосмической отрасли [7]. Некоторые из этих методов реализованы в программных комплексах конечно-элементного моделирования и могут быть использованы при проектировании силовых конструкций [8, 9]. Однако границы применимости этих методов зачастую задают конструктивно-технологические ограничения и выбор критериев, определяющих целевую функцию [10].

Простой перебор проектных параметров приводит к резкому увеличению времени проектировочного расчета. В связи с этим целесообразно сочетание численных методов расчета с численными методами оптимизации. При таком подходе исходные данные для численного расчета определяются на основании полученных результатов использования алгоритма поиска минимума функции.

В настоящей работе такой подход реализован для задачи расчета эллиптического днища переменной толщины, находящегося под действием внешнего давления. Такие конструкции имеют достаточно широкое применение в различных отраслях машиностроения.

Для эллиптических оболочек постоянной толщины имеются аналитические выражения для меридиональных и кольцевых напряжений, полученные на основе безмоментной теории [11–14]. Приведено выражение для определения критического давления потери устойчивости [15]. Отметим, что данное выражение получено из формулы для сферической оболочки, которая в свою очередь рассматривалась как пологая [16, 17].

В случае переменной толщины эллиптической оболочки, аналитические выражения для определения критического давления отсутствуют. Это связано с достаточно сложной исходной системой уравнений, описывающих такую оболочку [18, 19].

Далее рассмотрена возможность оптимизации эллиптического днища переменной толщины в целях получения конструкции минимальной массы при учете конструктивно-технологических ограничений с помощью связи двух численных методов расчета: алгоритма поиска локального минимума некоторой функции и метода конечных элементов (МКЭ) в качестве метода, вычисляющего критерии определения этой функции. В качестве алгоритма поиска локального минимума в настоящей работе рассмотрен известный численный метод — алгоритм с адаптированным шагом изменения проектных параметров. Этот алгоритм предполагает увеличение шага при движении в сторону экстремума и уменьшение шага при попадании в его область до изменения целевой функции в рамках заранее установленной точности [20]. В настоящей работе все проектные параметры являются геометрическими, поэтому границы их областей варьирования определяются конструктивно-технологическими ограничениями.

При таком подходе на первом этапе задаются начальные значения параметров для проектирования. С помощью МКЭ рассчитывают и определяют значение целевой функции. На основе полученных результатов алгоритм локального минимума функции определяет следующие значения параметров проектирования и для них проводится новый расчет МКЭ. Процедура повторяется до тех пор, пока разность текущего значения целевой функции и ее значения в предыдущей итерации не достигнет заданной точности.

Постановка задачи. В рамках задачи рассматривается шарнирно-опертая оболочка, нагруженная внешним давлением p . Ввиду конструктивно-технологических ограничений конструкция предполагает разделение на четыре участка, определяемых толщинами h_i и радиусами R_j (рис. 1).

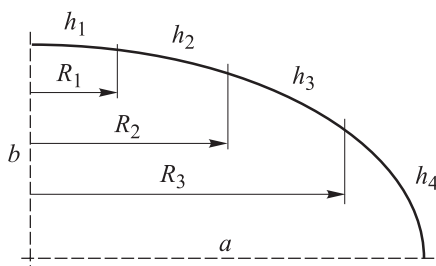


Рис. 1. Геометрическая схема конструкции

Предполагается, что геометрические параметры a , b , R_3 , а также внешнее давление p остаются постоянными.

Таким образом, варьируемыми параметрами являются толщины h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и радиусы R_j ($j = 1, 2$).

Целевой функцией является отношение

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i h_i}{\sum_{i=1}^4 A_{i0} h_{i0}},$$

где V — объем конструкции; V_0 — объем конструкции при начальных параметрах; A_i — площадь поверхности, образованной вращением дуги i -го участка вокруг малой полуоси; A_{i0} — площадь поверхности, образованной вращением дуги i -го участка вокруг малой полуоси при начальных параметрах; h_{i0} — начальная толщина i -го участка.

Критериями f существования в той или иной точке пространства проектных параметров выступают собственное значение λ , соответствующее первой форме потери устойчивости, и максимальные эквивалентные напряжения σ_ε , удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\min}} \geq 1; \quad \frac{[\sigma]}{\sigma_\varepsilon} \geq 1,$$

где $\lambda_{\min}$ — минимальное допустимое значение λ ; $[\sigma]$ — допускаемые напряжения.

Критерии λ и σ_ε могут быть вычислены в любом программном комплексе, основанном на МКЭ. Для этого на Python реализован управляющий модуль, цель которого извлекать из алгоритма поиска локального минимума текущие значения проектных параметров h_i и R_j , передавать их в решатель комплекса МКЭ, извлекать критерии λ и σ_ε из результатов решения и передавать их в основной алгоритм для вычисления критерия f .

Приближение от постоянной толщины, обеспечивающей устойчивость. В качестве первого приближения предлагается использовать постоянную толщину $h_{i0} = \delta_{\text{тр}}$ по всем участкам оболочки, определяемую из выражения

$$p_{\text{кр}} = p = k \frac{E \delta_{\text{тр}}^2 b^2}{a^4},$$

где $p_{\text{кр}}$ — критическое давление потери устойчивости; k — коэффициент, определяемый по [15]; E — модуль упругости материала.

После завершения работы алгоритма он запускается заново с полученными значениями параметров в качестве начальных до тех пор, пока разность результатов станет несущественной и будет удовлетворять заданной точности расчета.

Алгоритм поиска локального минимума подразумевает изменение шагов Δh_i и ΔR_j , поэтому получаемые результаты зависят от их начальных значений Δh_{i0} и ΔR_{j0} . Изменение целевой функции при $\Delta h_{i0} = 0,025 \delta_{\text{тр}}$ и $\Delta R_{j0} = 0,01a$ приведено на рис. 2, а, в. Здесь и далее каждый запуск алгоритма отделен вертикальной штриховой прямой и обозначен соответствующим числовым значением (1–4). Во избежание загромождения графиков критерий по эквивалентным напряжениям не изображен, поскольку выполнен в каждой итерации расчета по МКЭ.

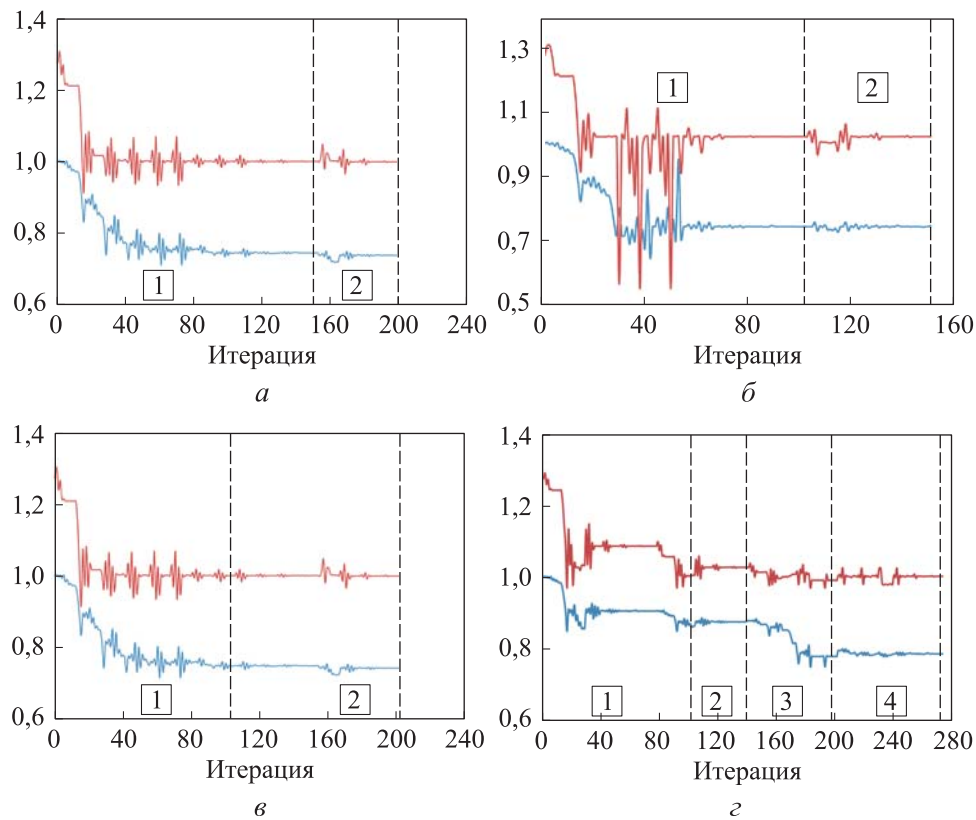


Рис. 2. Изменения целевой функции при $\Delta h_{i0} = 0,025 \delta_{\text{тр}}$ (а–г):

$\Delta R_{j0} = 0,01a$, $f = 0,738$ (а); $\Delta R_{j0} = 0,015a$, $f = 0,743$ (б);

$\Delta R_{j0} = 0,01a$, $f = 0,776$ (в); $\Delta h_{i0} = 0,01 \delta_{\text{тр}}$, $\Delta R_{j0} = 0,01a$, $f = 0,784$ (г);

синие и красные кривые — V/V_0 и $\lambda/\lambda_{\min}$

Для заданных начальных параметров h_i и R_j результатом расчета является набор проектных параметров $h_1 = h_2 = 0,9h_{i0}$; $h_3 = 0,8h_{i0}$; $h_4 = 0,65h_{i0}$; $R_1 = 0,18a$; $R_2 = 0,55a$, соответствующих значению целевой функции $f = 0,738$. Таким образом, использование приведенного алгорит-

ма позволяет сэкономить более 25 % массы конструкции по сравнению с оболочкой постоянной толщины.

При увеличении начального шага $\Delta R_{j0} = 0,015a$ ввиду отдаленности от оптимума на начальных итерациях возможны чрезмерные увеличения шагов, что способно привести к ошибкам типа $R_1 > R_2$ или $R_1 < 0$ и дестабилизации счета (рис. 2, б). При этом полученный минимум критерия $f = 0,743$ оказывается близким к определенному ранее.

Увеличение шага $\Delta h_{i0} = 0,025 \delta_{\text{тр}}$ при $\Delta R_{j0} = 0,01a$ в меньшей степени дестабилизирует счет, однако полученный оптимум $f = 0,776$ более найденного ранее, с начальными шагами $\Delta h_{i0} = 0,025 \delta_{\text{тр}}$ и $\Delta R_{j0} = 0,01a$ (см. рис. 2, в).

Уменьшение шага $\Delta h_{i0} = 0,01 \delta_{\text{тр}}$ при $\Delta R_{j0} = 0,01a$ приводит к излишней чувствительности алгоритма к локальным минимумам и, как следствие, к значительному увеличению затрат вычислительных мощностей. При этом полученный через большое число итераций результат $f = 0,784$ оказывается больше полученного ранее (рис. 2, г).

Уменьшение шага $\Delta R_{j0} < 0,01a$ нецелесообразно, поскольку это требует чрезмерного уменьшения размеров конечных элементов, увеличения числа узлов и, как следствие, затрат вычислительных ресурсов в каждой итерации расчета по МКЭ.

Приближение от толщин, обеспечивающих прочность по эквивалентным напряжениям. В качестве первого приближения также возможно использование контура, переменная толщина которого обеспечивает постоянство эквивалентных напряжений (рис. 3). В этом случае толщина δ определяется из выражений:

$$\sigma_1 = \frac{pc^2}{2\delta b}; \quad \sigma_2 = \frac{pc^2}{2\delta b} \left[2 - \left(\frac{a}{c} \right)^4 \right];$$

$$c^2 = \sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}; \quad \sigma_3 = [\sigma] = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2},$$

где σ_1 — меридиональное напряжение; σ_2 — кольцевое напряжение; x — координата от полюса вдоль большой полуоси.

В качестве начальной толщины i -го участка h_i выбрана максимальная толщина этого участка в соответствии с рис. 3. Для возможности сопоставления результатов, получаемых от разных приближений, начальные шаги Δh_{i0} и ΔR_{j0} , а также V_0 принимаются такими же, как и на рис. 2, а. Изменение целевой функции приведено на рис. 4.

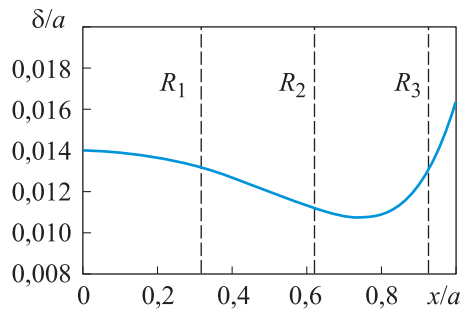
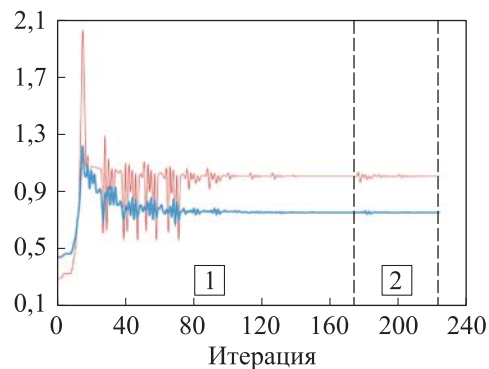


Рис. 4. Изменение целевой функции при $\Delta h_{i0} = 0,025 \delta_{\text{тр}}$ и $\Delta R_{j0} = 0,01a$; синие и красные кривые — V/V_0 и $\lambda/\lambda_{\min}$ (приближение от толщин, обеспечивающих прочность по эквивалентным напряжениям)

Рис. 3. Толщина контура, обеспечивающая постоянство эквивалентных напряжений



Результат $f = 0,745$ оказывается близким к результату, найденному по приближению от постоянной толщины, обеспечивающей устойчивость оболочки. При этом для его достижения потребовалось больше итераций расчетов по МКЭ. Однако следует отметить, что число итераций зависит от начального отдаления оптимума. Оно в этой формулировке определяется переменной толщиной, обеспечивающей постоянство эквивалентных напряжений, которая в свою очередь зависит от соотношения a и b .

Заключение. Решена задача оптимизации гладкой эллиптической оболочки вращения, нагруженной внешним давлением, с учетом конструктивно-технологических ограничений. Предложен подход комбинирования алгоритма поиска локального минимума некоторой функции с МКЭ, определяющим эту функцию по заданным критериям. При этом рассмотрены отличия получаемых результатов в зависимости от настроек алгоритма и начального положения в пространстве параметров. Установлено, что в качестве начальных могут быть использованы параметры, которые соответствуют предельным значениям каждого критерия. Так, в рассмотренной задаче использование в качестве первых приближений ограничений по максимальным эквивалентным напряжениям и ограничений по критической нагрузке приводят к схожим результатам. При этом параметры, соответствующие границам допустимых значений критериев, могут быть определены по известным зависимостям.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Косых П.А., Азаров А.В. Теория и анализ методов топологической оптимизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, № 4.
DOI: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-4-2264>
- [2] Кишов Е.А., Комаров В.А. Топологическая оптимизация силовых конструкций методом выпуклой линеаризации. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2018, т. 17, № 1, с. 137–149.
DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-137-149>
- [3] Коршунов В.А., Пономарев Д.А., Родионов А.А. Современная методология оптимизации силовых схем конструкций. *Труды Крыловского государственного научного центра*, 2020, № S1, с. 73–81. EDN: PQLCJZ
- [4] Сорокин Д.В., Бабкина Л.А., Бразговка О.В. Проектирование элементов конструкций различного назначения на основе топологической оптимизации. *Космические аппараты и технологии*, 2022, т. 6, № 2, с. 61–82.
DOI: <https://doi.org/10.26732/j.st.2022.2.01>
- [5] Магидов И.С., Михайловский К.В. Топологическая оптимизация силового элемента отсека летательного аппарата из металломатричного композиционного материала. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2022, № 1, с. 53–60.
DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-1-53-60>
- [6] Егорычев В.С., Рязанов А.И., Хаймович А.И. Оптимизация режимных и конструктивных параметров генератора мелкодисперсного металлического расплава. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2023, № 1, с. 63–74.
DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2023-22-1-63-74>
- [7] Башин К.А., Торсунов Р.А., Семенов С.В. Методы топологической оптимизации конструкций, применяющиеся в аэрокосмической отрасли. *Вестник ПНИПУ, Аэрокосмическая техника*, 2017, № 51, с. 51–61.
DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.05>
- [8] Галиновский А.Л., Филимонов А.С., Баданина Ю.В. и др. Сравнительно-сопоставительное исследование программных комплексов трехмерного численного моделирования путем анализа результатов топологической оптимизации изделий ракетно-космической техники. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2023, № 1, с. 42–51. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-1-42-51>
- [9] Максимов П.В., Фетисов К.В. Анализ методов доработки конечно-элементной модели после топологической оптимизации. *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, № 9, с. 58–60. DOI: <https://doi.org/10.18454/IRJ.2016.51.102>
- [10] Ковалёв С.П., Шаймарданов М.Ю. Метод учета технологических ограничений при оптимизации топологии изделий машиностроения. *Информационные технологии*, 2018, т. 24, № 2, с. 75–80. EDN: YPOXXW

- [11] Разин А.Ф. Проблема оптимального проектирования композитных корпусов ракетных двигателей твердого топлива. *Известия РАН. МТТ*, 2018, № 4, с. 74–84. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232990000711-2>
- [12] Азаров А.В. Проблема проектирования аэрокосмических сетчатых композитных конструкций. *Известия РАН. МТТ*, 2018, № 4, с. 84–92. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232990000700-0>
- [13] Юдин А.С., Щитов Д.В. О расчете эллиптических оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки*, 2004, № S3, с. 29–36. EDN: HSOTND
- [14] Сухарев В.А., Завалий А.А. Напряженно-деформированное состояние оболочек вращения. *Известия сельскохозяйственной науки Тавриды*, 2018, № 16, с. 73–81. EDN: YТУКАР
- [15] Погорелов А.В. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., Наука, 1966.
- [16] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.
- [17] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967.
- [18] Власов В.З. Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
- [19] Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тбилиси, Мецнреба, 1965.
- [20] Уайлд Д.Д. Методы поиска экстремума. М., Наука, 1967.

Бондарев Иван Дмитриевич — инженер АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143966, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33).

Фёдоров Леонид Викторович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143966, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Бондарев И.Д., Фёдоров Л.В. Вариант оптимизации эллиптической оболочки переменной толщины. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2025, № 2 (153), с. 20–31. EDN: NUAOWM

**OPTIMIZATION OPTION FOR AN ELLIPTICAL SHELL
OF THE VARIABLE THICKNESS**

I.D. Bondarev

sigma@vpk.npomash.ru

L.V. Fedorov

JSC “MIC “NPO Mashinostroyenia”, Reutov, Moscow Region, Russian Federation

Abstract

The paper considers a problem of optimization of the revolving elliptical shell of the variable thickness loaded with external pressure taking into account the design and technological limitations. It presents a solution option based on combination of the well-known numerical methods including an algorithm for finding the local minimum of a certain function and the finite element method that determines this function by the specified criteria. The presented approach is applicable to solving this problem, since it is used for a wide range of practical problems in design optimization, when it is impossible to obtain analytical expressions convenient for the design. In this case, no restrictions are assumed in implementing the algorithm for finding the function minimum, the finite element method, and the software that connects them. A comparative analysis of the obtained results is performed depending on the initial position in space of the parameters and settings of the presented algorithm. Two options are considered as the initial parameters. In the first, the pole thickness obtained from the stability conditions is applied as the initial position in the parameter space. In the second, the maximum thickness obtained from the strength condition for the equivalent stresses is used. The paper shows that using the equivalent stress and critical load constraints as the first approximations separately from each other leads to similar results

Keywords

Revolving elliptic shell, optimization, local minimum, finite element method, strength, stability

Received 01.03.2024

Accepted 22.04.2024

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Kosykh P.A., Azarov A.V. Theory and analysis of the topology optimization methods. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2023, no. 4 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-4-2264>
- [2] Kishov E.A., Komarov V.A. Topology optimization of a load-bearing structure via the method of convex linearization. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie* [Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering], 2018, vol. 17, no. 1, pp. 137–149 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-137-149>
- [3] Korshunov V.A., Ponomarev D.A., Rodionov A.A. Up-to-date methodology for optimization of structural force diagrams. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra* [Transactions of the Krylov State Research Centre], 2020, no. S1, pp. 73–81 (in Russ.). EDN: PQLCJZ

- [4] Sorokin D.V., Babkina L.A., Brazgovka O.V. Designing various-purpose subassemblies based on topological optimization. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii* [Spacecrafts & Technologies], 2022, vol. 6, no. 2, pp. 61–82 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.26732/j.st.2022.2.01>
- [5] Magidov I.S., Mikhaylovskiy K.V. Topological optimization of the strength element of the aircraft compartment made of metal-matrix composite material. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2022, no. 1, pp. 53–60 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2022-1-53-60>
- [6] Egorychev V.S., Ryazanov A.I., Khaymovich A.I. Optimization of operation mode and design parameters of a finely-dispersed metallic liquid-alloy generator. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroyeniye* [Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering], 2023, no. 1, pp. 63–74 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2023-22-1-63-74>
- [7] Bashin K.A., Torsunov R.A., Semenov S.V. Topology optimization methods in aerospace industry. *Vestnik PNIPU, Aerokosmicheskaya tekhnika* [PNRPU Aerospace Engineering Bulletin], 2017, no. 51, pp. 51–61 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.05>
- [8] Galinovskiy A.L., Filimonov A.S., Badanina Yu.V., et al. Comparative correlation study of software systems for three-dimensional numerical simulation by analyzing results of the RST product topological optimization. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2023, no. 1, pp. 42–51 (in Russ.).
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2023-1-42-51>
- [9] Maksimov P.V., Fetisov K.V. The analysis of methods of refinement of the finite element model after topology optimization. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal* [International Research Journal], 2016, no. 9, pp. 58–60 (in Russ.).
DOI: <https://doi.org/10.18454/IRJ.2016.51.102>
- [10] Kovalev S.P., Shaymardanov M.Yu. Methods of applying manufacturing constraints in topology optimization. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2018, vol. 24, no. 2, pp. 75–80 (in Russ.). EDN: YPOXXW
- [11] Razin A.F. The problem of optimum design of composite housings of solid propellant rocket engines. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 418–426.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654418040076>
- [12] Azarov A.V. The problem of designing aerospace mesh composite structures. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 427–434. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654418040088>
- [13] Yudin A.S., Shchitov D.V. On calculation of elliptical rotation shells loaded with internal pressure. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Ser. Estestvennyye nauki* [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences], 2004, no. S3, pp. 29–36 (in Russ.). EDN: HSOTND
- [14] Sukharev V.A., Zavaliy A.A. The stress-strain state of shells of revolution. *Izvestiya selskokhozyaystvennoy nauki Tavridy* [Transactions of Taurida Agricultural Science], 2018, no. 16, pp. 73–81 (in Russ.). EDN: YTUKAP

- [15] Pogorelov A.V. Geometricheskaya teoriya ustoychivosti obolochek [Geometric theory of shell stability]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
- [16] Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
- [17] Volmir A.S. Ustoychivost deformiruemykh system [Buckling of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967.
- [18] Vlasov V.Z. Izbrannye trudy. T. 1 [Selected works. Vol. 1]. Moscow, AN SSSR Publ., 1962.
- [19] Vekua I.N. Teoriya tonkikh plogikh obolochek peremennoy tolshchiny [Theory of thin shallow shells of variable thickness]. Tbilisi, Metsinreba Publ., 1965.
- [20] Wilde D.J. Optimum seeking methods. Hoboken, Prentice-Hall, 1965.

Bondarev I.D. — Engineer, JSC “MIC “NPO Mashinostroyenia” (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143960 Russian Federation).

Fedorov L.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Researcher Fellow, JSC “MIC “NPO Mashinostroyenia” (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143960 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Bondarev I.D., Fedorov L.V. Optimization option for an elliptical shell of the variable thickness. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2025, no. 2 (153), pp. 20–31 (in Russ.). EDN: NUAOWM