

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДЕЛЬНОГО СТАТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЕКЦИОННОГО НОЖНИЧНОГО ПОДЪЕМНИКА

С.В. Никитин

Д.Е. Бортыков

А.А. Грачев

А.В. Ащеулов

nikitin_sv@spbstu.ru

bortyakov_de@spbstu.ru

grachev_aa@spbstu.ru

atsheulov_av@spbstu.ru

СПбПУ, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация

В инженерных методах расчета грузоподъемных механизмов, работающих с малыми скоростями, конструкции механизмов обычно рассматриваются в виде статических моделей в самом нагруженном положении. При этом не учитываются неизбежно действующие в реальных механизмах силы трения покоя, которые необходимо преодолеть приводу при включении. Создана статическая модель многосекционного ножничного подъемника, в которой учтены силы трения покоя в ползунах и моменты сил трения покоя в шарнирах. Для моделирования различных конструкций ножничного подъемника его математическая модель построена по блочной системе так, что положение привода в механизме задано номерами звеньев, к которым он крепится, и его координатами относительно этих звеньев. С учетом неоднозначности расположения привода в модели разработана процедура определения направления действия моментов сил трения в шарнирах крепления привода. В результате расчетов различных вариантов конструкций ножничного подъемника определено, что нагруженность конструкции с учетом сил трения покоя составляет 20 % и более. Построенная модель ножничного подъемника может быть использована при проектировании и оптимизации параметров подобных конструкций, а предлагаемый метод применим при создании моделей иных механизмов, учитывающих силы трения покоя

Ключевые слова

Механизм, ножничный подъемник, параметрическая модель, статический анализ, силы трения покоя

Поступила 10.07.2023

Принята 07.10.2024

© Автор(ы), 2025

Введение. Расчет конструкции ножничного подъемника в пакетах конечного-элементного анализа требует трудоемкого процесса создания детальной модели подъемника. Для качественного анализа прочности отдельных элементов конструкции такой метод должен применяться на последних стадиях проектирования, когда все геометрические параметры выбраны окончательно. Подобный анализ рассматриваемых конструкций механизмов выполнен в [1–4]. Результаты указанных работ плохо верифицируются, что связано с замалчиванием авторами параметров исследуемых конструкций, принятых ограничений и допущений моделей, принципов выбора расчетных положений, которые оказываются не самыми нагруженными. Кинематические и силовые характеристики ножничных подъемников разных типов и с различным расположением приводных устройств исследованы с помощью САД-систем в [5–7], при этом результаты также плохо верифицируются.

Аналитические модели позволяют выполнить общий анализ нагруженности элементов конструкции механизма. Методика кинематического и силового анализов конструкции ножничного подъемника, основанная на аналитической модели, приведена в [8–12]. Попытка в аналитической модели учесть силы инерции звеньев подъемника и вывод о незначительности этих сил по сравнению со статической составляющей в механизмах подобного типа сделаны в [13]. Работа системы управления ножничного подъемника на модели, учитывающей инерционные свойства звеньев и трение в ползунах, исследована в [14]. Акцент на исследовании динамики работы гидропривода ножничного подъемника сделан в [15], однако модель механизма не приведена.

Силы трения в элементах конструкции механизма традиционно учитываются в состоянии его движения [16–18], когда известны относительные скорости смещения трущихся элементов и, следовательно, направления сил трения. Учет сил трения в элементах конструкции механизма на примере ножничного подъемника выполнен в [19, 20] в предположении, что механизм находится в состоянии срыва, т. е. в состоянии равновесия между движущими и препятствующими движению силами, когда действуют максимальные силы трения покоя известного направления.

Определенное место расположения привода в структуре модели механизма ножничного подъемника указано в [1–15, 19, 20]. Аналитические модели построены при его расположении только на нижней секции подъемника, что упрощает построение систем уравнений. При анализе напряженного состояния методом конечных элементов привод как элемент в САД-модели может отсутствовать.

В моделях ножничного подъемника [19, 20] силы и моменты сил трения учтены только там, где их направление могло быть определено интуитивно. В связи с этим в параметрической модели [20] пренебрегают трением в шарнирах крепления привода, так как при различном расположении этих шарниров направление действия моментов сил трения может быть разным. Кроме того, в [19, 20] не указано влияние учтенных сил трения на общую нагруженность механизма, а также не определена целесообразность их учета. Таким образом, *цели настоящей работы* следующие:

- создать удобную параметрическую модель статического равновесия ножничного подъемника, в которой структура подъемника, определяемая расположением привода, будет задаваться парой дискретных параметров;
- разработать математическую процедуру определения направления действия моментов сил трения;
- оценить влияние сил трения на общую нагруженность элементов конструкции ножничного подъемника, т. е. насколько силы или напряжения в элементах, найденные с учетом сил трения, будут отличаться от параметров, рассчитанных без учета сил трения.

Модель многосекционного ножничного подъемника. Созданная модель многосекционного ножничного подъемника является статической, т. е. находится в состоянии равновесия — действующие силы не вызывают ускорений элементов конструкции. Рассматривается момент срыва, когда движение еще не началось, однако на элементы конструкции действуют наибольшие силы трения покоя. В свою очередь привод развивает тяговое усилие, необходимое для преодоления всех действующих на конструкцию механизмов нагрузок, включая силы трения, чтобы начать движение на подъем.

Многосекционный ножничный подъемник может быть выполнен по нескольким различным конструктивным схемам. Разрабатываемая модель позволяет рассчитывать такие схемы, как крепление привода на различных рычагах подъемника (рис. 1, а), в том числе и в одной секции, крепление одного шарнира привода к грузовой платформе (рис. 1, б), другого — к нижней опорной части (рис. 1, в).

Исходными параметрами для расчета являются: число секций подъемника n_s ; текущая высота H подъема грузовой платформы относительно опорной части; угол наклона γ конструкции к горизонтальной поверхности; длина рычага секции l ; масса груза m_l ; координаты расположения центра тяжести груза x_l , y_l относительно неподвижного шарнира грузовой платформы; масса грузовой платформы m_p ; координата расположения

центра тяжести x_p платформы относительно неподвижного шарнира; масса i -й секции m_{si} (массы секций могут быть различны и приложены в центре среднего шарнира рычагов подъемника); масса привода m_{DRV} ; координаты точек крепления привода x_A, y_A, x_B, y_B . Вариант расчетной схемы задается параметрами n_A, n_B , определяющими номера рычагов крепления привода в конструкции механизма подъемника. Нумерация начинается с верхнего рычага, закрепленного на неподвижном шарнире грузовой платформы (см. рис. 1, а). Кроме того, выполняются следующие соотношения: $n_A < n_B$, т. е. первая точка крепления привода всегда располагается на рычаге с меньшим номером, чем вторая точка крепления. Если $n_A = 0$, то первая точка крепления привода находится на грузовой платформе (см. рис. 1, б); если $n_B = 2n_s + 1$, то вторая точка крепления привода — на грузовой платформе (см. рис. 1, в).

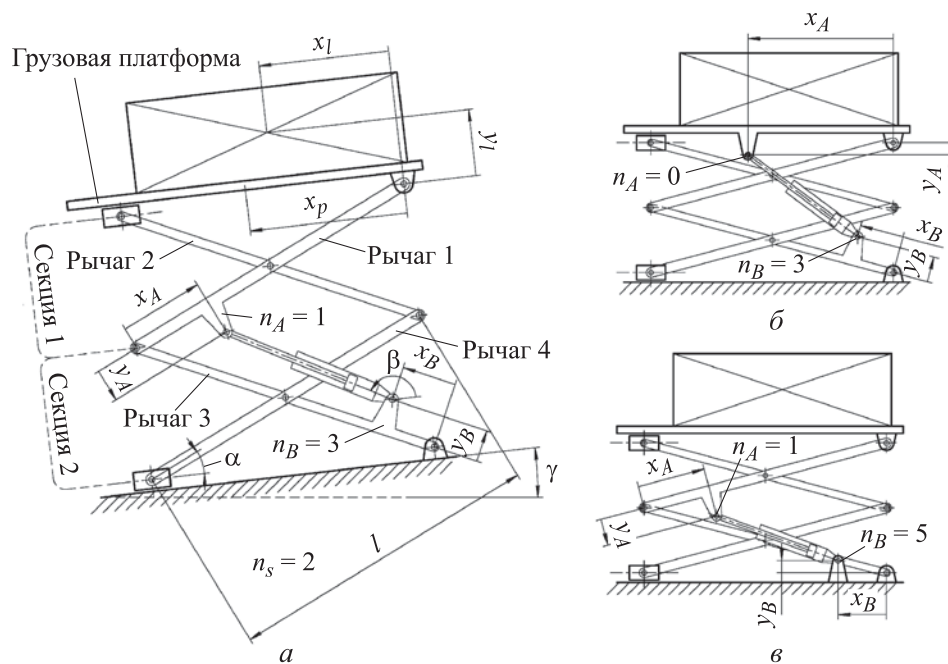


Рис. 1. Расчетные схемы конструкций многосекционного ножничного подъемника

Отметим, что на схемах (см. рис. 1) приведены положительные направления заданных координат центров масс x_l, y_l, x_p и точек крепления привода x_A, y_A, x_B, y_B в механизме. Кроме того, должны быть предварительно заданы площади поперечного сечения A_i и моменты сопротивления сечений W_i относительно плоскости изгиба рычагов для каж-

дой i -й секции подъемника, коэффициенты трения покоя в шарнирах механизма μ_J и ползунах μ_{CR} , диаметры приведения сил трения в шарнирах d_J .

Реакции в шарнирах рассматриваемого механизма и тяговое усилие привода определяются из решения системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{b} + \mathbf{b}_{FR}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов при неизвестных; $\mathbf{R}$ — вектор неизвестных реакций, включая тяговое усилие привода R_{DRV} ; $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_{FR}$ — векторы свободных членов уравнения, определяемые массами элементов конструкции и значениями сил и моментов сил трения в элементах конструкции механизма. Для определения сил и моментов сил трения используется метод последовательных приближений [20].

Расчетный алгоритм сводится к следующей последовательности действий.

Шаг 1. Определение геометрических параметров, расчетного положения подъемника и действующих весовых нагрузок.

Шаг 2. Составление уравнений статики (1), т. е. определение значений элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$.

Шаг 3. Вычисление значений вектора $\mathbf{b}_{FR}$ по заданным приближениям значений сил (F_{fric}) и моментов (M_{fric}) сил трения. Причем на первом этапе задаются нулевые значения приближений этих параметров.

Шаг 4. Решение системы линейных алгебраических уравнений (1).

Шаг 5. Вычисление по заданным значениям реакций $\mathbf{R}$ новых приближений сил (F_{fric}^*) и моментов (M_{fric}^*) сил трения покоя.

Шаг 6. Проверка условий окончания итерационного процесса:

$$\left| F_{fric}^* - F_{fric} \right| < \text{eps}F \quad \text{и} \quad \left| M_{fric}^* - M_{fric} \right| < \text{eps}M,$$

где $\text{eps}F$, $\text{eps}M$ — требуемая точность определения сил и моментов сил трения. Если хотя бы одно условие не выполняется, необходимо скопировать векторы $F_{fric} = F_{fric}^*$, $M_{fric} = M_{fric}^*$ и вернуться к шагу 3. Здесь может оказаться целесообразным добавить проверку условия ограничения числа итераций в процессе вычислений, поскольку в некоторых положениях механизма, например в мертвой точке, реакции опор и силы трения окажутся слишком велики и для их точного определения может потребоваться большое число итераций, причем завышенные требования к точности будут не оправданы.

Шаг 7. Вычисление напряжения σ_i в рычагах ножничного подъемника по найденным значениям реакций опор R , сил F_{fric} и моментов M_{fric} сил трения.

Строить модель многосекционного ножничного подъемника удобно по секциям, учитывая, что реакции опор для верхней секции оказываются внешними силами, действующими на секцию, находящуюся ниже. Расчетная схема конструкции механизма, в которой отдельно рассматриваются грузовая платформа и две различные секции подъемника, приведены на рис. 2.

Геометрические параметры заданного положения подъемника определяются следующими соотношениями:

$$h = \frac{H}{n_s}$$

— высота секции подъемника;

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad (2)$$

— тригонометрические функции, определяющие угол α наклона рычага относительно направления расположения опорной поверхности (см. рис. 1, а);

$$x = l \cos \alpha$$

— координата подвижных шарниров секции подъемника.

Для определения угла β наклона привода относительно направления расположения опорной поверхности (см. рис. 1, а) задают систему координат XOY с центром в точке крепления неподвижного шарнира к основанию (рис. 2, а) и находят координаты точек крепления $A (X_A, Y_A)$ и $B (X_B, Y_B)$ подвижных шарниров секций подъемника.

В общем случае координата крепления шарнира привода определяется номерами секции и рычага n_{sp} (четным или нечетным), на котором шарнир привода закреплен. Соответствующий алгоритм приведен ниже.

Если $n_{Pt} = 0$ // точка крепления — грузовая платформа

$$X_{Pt} = -x_{Pt}; \quad Y_{Pt} = H - y_{Pt}.$$

Если $n_{Pt} = n_B = 2n_s + 1$ // точка крепления — грузовая платформа

$$X_{Pt} = -x_{Pt}; \quad Y_{Pt} = y_{Pt}.$$

Иначе // точка крепления — один из рычагов подъемника.

$n_{sPt} = \lfloor (n_{Pt} - 1) / 2 \rfloor + 1$ // определение номера секции закрепления шарнира привода, причем индексация секций начинается с 1, и $\lfloor \cdot \rfloor$ — оператор округления к меньшему числу, если n_{Pt} — четное,

$$X_{Pt} = -x - x_{Pt} \cos \alpha + y_{Pt} \sin \alpha;$$

$$Y_{Pt} = H - n_{sPt}h + x_{Pt} \sin \alpha - y_{Pt} \cos \alpha,$$

если n_{Pt} — нечетное,

$$X_{Pt} = -x_{Pt} \cos \alpha + y_{Pt} \sin \alpha;$$

$$Y_{Pt} = H - n_{sPt}h + x_{Pt} \sin \alpha + y_{Pt} \cos \alpha.$$

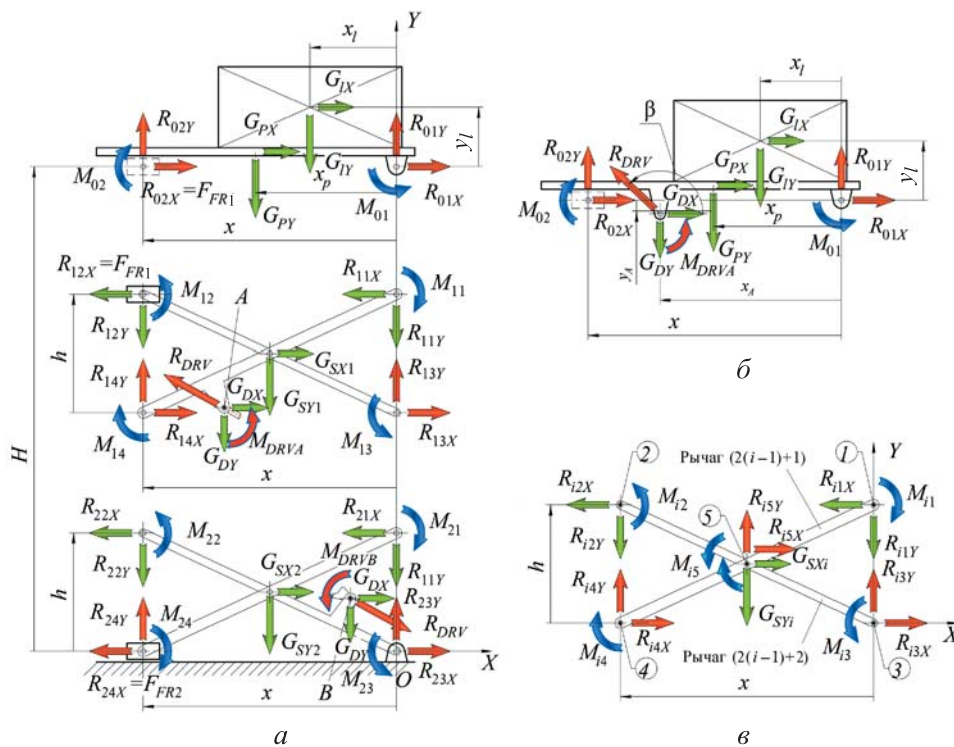


Рис. 2. Расчетные схемы секций модели ножничного подъемника

В алгоритме индексом Pt обозначены точки крепления шарнира A или B привода. Таким образом, угол наклона привода определяется соотношениями:

$$\cos \beta = \frac{X_A - X_B}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}};$$

$$\sin \beta = \frac{Y_A - Y_B}{\sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}}.$$
(3)

Расчетные весовые нагрузки, учитывая заданный угол γ наклона подъемника к горизонтальной плоскости и их положительные направления, приведенные на рис. 2, а, определяются соотношениями:

$G_{lX} = -m_l g \sin \gamma$; $G_{lY} = m_l g \cos \gamma$ — составляющие массы груза;

$G_{pX} = -m_p g \sin \gamma$; $G_{pY} = m_p g \cos \gamma$ — составляющие массы грузовой платформы;

$G_{sXi} = -m_{Si} g \sin \gamma$; $G_{sYi} = m_{Si} g \cos \gamma$ — составляющие массы секций подъемника.

Предположим, что масса привода поровну распределяется между точками А и В его крепления $G_{DX} = -m_{DRV} g \sin(\gamma / 2)$; $G_{DY} = m_{DRV} g \cos(\gamma / 2)$.

Систему для определения неизвестных реакций R_{01X} , R_{01Y} , R_{02X} , R_{02Y} в опорных шарнирах грузовой секции можно составить из уравнений баланса сил вдоль горизонтальной и вертикальной осей, а также уравнения моментов относительно подвижного шарнира (рис. 2, б, в):

$$\begin{aligned} R_{01X} + R_{02X} + G_{pX} + G_{lX} &= 0; \\ R_{01Y} + R_{02Y} - G_{pY} - G_{lY} &= 0; \\ R_{01X}x - G_{pY}(x - x_p) - G_{lY}(x - x_l) - G_{lX}y_l + M_{01} - M_{02} &= 0; \\ R_{02X} &= |R_{02Y}| \mu_{CR}. \end{aligned} \quad (4)$$

Четвертое уравнение системы (4) определяет силу трения покоя FFR_1 между ползуном и грузовой платформой, причем в уравнениях учтено истинное направление действия этой силы на платформу. В уравнении моментов также учтено истинное направление действия моментов трения покоя в шарнирах M_{01} , M_{02} , действующих при подъеме механизма:

$$M_{01} = \frac{\mu_J d_J}{2} \sqrt{R_{01X}^2 + R_{01Y}^2}; \quad M_{02} = \frac{\mu_J d_J}{2} \sqrt{R_{02X}^2 + R_{02Y}^2}.$$

Если грузовая платформа приводится в движение приводом, то система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} R_{01X} + R_{02X} + R_{DRV} \cos \beta + G_{pX} + G_{lX} + G_{DX} &= 0; \\ R_{01Y} + R_{02Y} + R_{DRV} \sin \beta - G_{pY} - G_{lY} - G_{DY} &= 0; \\ R_{01X}x - G_{pY}(x - x_p) - G_{lY}(x - x_l) - G_{lX}y_l + (G_{DX} + R_{DRV} \cos \beta) y_A - & \\ - (G_{DY} + R_{DRV} \sin \beta)(x - x_A) + M_{01} - M_{02} + M_{DRVA} &= 0; \\ R_{02X} &= |R_{02Y}| \mu_{CR}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь учтены составляющие G_{DX} , G_{DY} привода, движущая сила R_{DRV} и момент сил трения M_{DRVA} в шарнире крепления А.

Для удобства записи уравнений шарниры каждой секции механизма индексированы таким образом, что шарниры 1 и 4 расположены на рычаге

с нечетным номером, а шарниры 2 и 3 — на рычаге с четным номером (см. рис. 2, в). Шарнир 5 является связующим между рычагами секции.

Система уравнений для i -й секции составляется из двух уравнений равновесия сил вдоль осей координат OX и OY , а также двух уравнений моментов сил отдельно для каждого рычага относительно шарнира 5 для рычагов с четным и нечетным номерами отдельно относительно шарниров 3 и 4:

$$\begin{aligned} -R_{i1X} - R_{i2X} + R_{i3X} + R_{i4X} + G_{SXi} &= 0; \\ -R_{i1Y} - R_{i2Y} + R_{i3Y} + R_{i4Y} - G_{SYi} &= 0; \\ R_{i2X}h/2 + R_{i2Y}x/2 + R_{i3X}h/2 + R_{i3Y}x/2 + M_{i2} + M_{i3} + M_{i5} &= 0; \\ R_{i1X}h/2 - R_{i1Y}x/2 + R_{i4X}h/2 - R_{i4Y}x/2 - M_{i1} - M_{i4} - M_{i5} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях моментов учтено действие на один рычаг только половины сил массы секции, а также истинное направление действия моментов сил трения в шарнирах M_{i1} , M_{i2} , M_{i3} , M_{i4} , M_{i5} при работе механизма на подъем. Причем момент в шарнире 5 действует на рычаг с четным номером в положительном направлении, а на рычаг с нечетным номером — в отрицательном. Моменты сил трения определяются соотношением

$$M_{ij} = \frac{\mu_j d_j}{2} \sqrt{R_{ijX}^2 + R_{ijY}^2},$$

где j — индекс, соответствующий номеру шарнира.

Реакции в шарнире 5 i -й секции можно определить из соотношений равновесия любого рычага секции, например, для нечетного рычага

$$\begin{aligned} R_{i5X} &= R_{i1X} - R_{i4X} - G_{SXi} / 2; \\ R_{i5Y} &= R_{i1Y} - R_{i4Y} + G_{SYi} / 2. \end{aligned} \quad (7)$$

По аналогии с приведенной системой (6) запишем уравнения для секций, содержащих шарниры крепления привода. Например, для секции 1 (см. рис. 2, а), содержащей шарнир крепления привода А на нечетном рычаге, система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} -R_{11X} - R_{12X} + R_{13X} + R_{14X} + R_{DRV} \cos \beta + G_{SX1} + G_{DX} &= 0; \\ -R_{11Y} - R_{12Y} + R_{13Y} + R_{14Y} + R_{DRV} \sin \beta - G_{SY1} - G_{DY} &= 0; \\ R_{12X}h/2 + R_{12Y}x/2 + R_{13X}h/2 + R_{13Y}x/2 + M_{12} + M_{13} + M_{15} &= 0; \\ R_{11X}h/2 - R_{11Y}x/2 + R_{14X}h/2 - R_{14Y}x/2 + \\ + (R_{DRV} \cos \beta + G_{DX})(h/2 - x_A \sin \alpha + y_A \cos \alpha) + \\ + (R_{DRV} \sin \beta - G_{DY})(x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha - x/2) - \\ - M_{11} - M_{14} - M_{15} + M_{DRVA} &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

реакции в шарнире 5 будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} R_{15X} &= R_{11X} - R_{14X} - R_{DRV} \cos \beta - G_{SX1} / 2 - G_{DX}; \\ R_{15Y} &= R_{11Y} - R_{14Y} - R_{DRV} \sin \beta + G_{SY1} / 2 + G_{DY}. \end{aligned}$$

Для секции 2 (см. рис. 2, а), в которой крепится шарнир привода В, тяговое усилие R_{DRV} имеет отрицательный знак. Кроме того, учитывается истинное направление действия реакции $R_{24X} = F_{FR2}$, являющейся силой трения между ползуном нижней секции и основанием механизма:

$$\begin{aligned} -R_{21X} - R_{22X} + R_{23X} + R_{24X} - R_{DRV} \cos \beta + G_{SX2} + G_{DX} &= 0; \\ -R_{21Y} - R_{22Y} + R_{23Y} + R_{24Y} - R_{DRV} \sin \beta - G_{SY2} - G_{DY} &= 0; \\ R_{22X}h/2 + R_{22Y}x/2 + R_{23X}h/2 + R_{23Y}x/2 + \\ + (R_{DRV} \cos \beta - G_{DX})(x_B \sin \alpha + y_B \cos \alpha - h/2) + \\ + (R_{DRV} \sin \beta + G_{DY})(x_B \cos \alpha - y_B \sin \alpha - x/2) + \\ + M_{22} + M_{23} + M_{25} + M_{DRVB} &= 0; \\ R_{21X}h/2 - R_{21Y}x/2 + R_{24X}h/2 - R_{24Y}x/2 - M_{21} - M_{24} - M_{25} &= 0; \\ R_{24X} &= -|R_{24Y}| \mu_{CR}. \end{aligned} \quad (9)$$

Реакции в шарнире 5 для секции 2 (см. рис. 2, а) определяются выражениями (7).

Моменты сил трения в шарнирах крепления привода M_{DRVA} и M_{DRVB} будут определяться соотношениями

$$M_{DRVA} = \frac{\mu_J d_J}{2} |R| r_A; \quad M_{DRVB} = \frac{\mu_J d_J}{2} |R| r_B, \quad (10)$$

где r_A, r_B — параметры, определяющие направления действия этих моментов.

Параметры r_A, r_B принимают значения $-1, 1$ или 0 и зависят от направления поворота привода относительно тел, с которыми он соединяется. Ножничный подъемник в двух положениях, когда при подъеме шарниры А, В и С, D крепления привода и рычага, к которому крепится привод, перемещаются в положения А', В' и С', D', показан на рис. 3. В соответствии с векторными диаграммами угол δ' между векторами А'В' и С'D' больше угла δ между векторами АВ и CD. На схеме рис. 3, а поворот привода относительно рычага происходит в направлении по ходу часовой стрелки, а на рис. 3, б — против хода часовой стрелки. В этом же направлении возникают и моменты сил трения, действующие на рычаг со стороны привода.

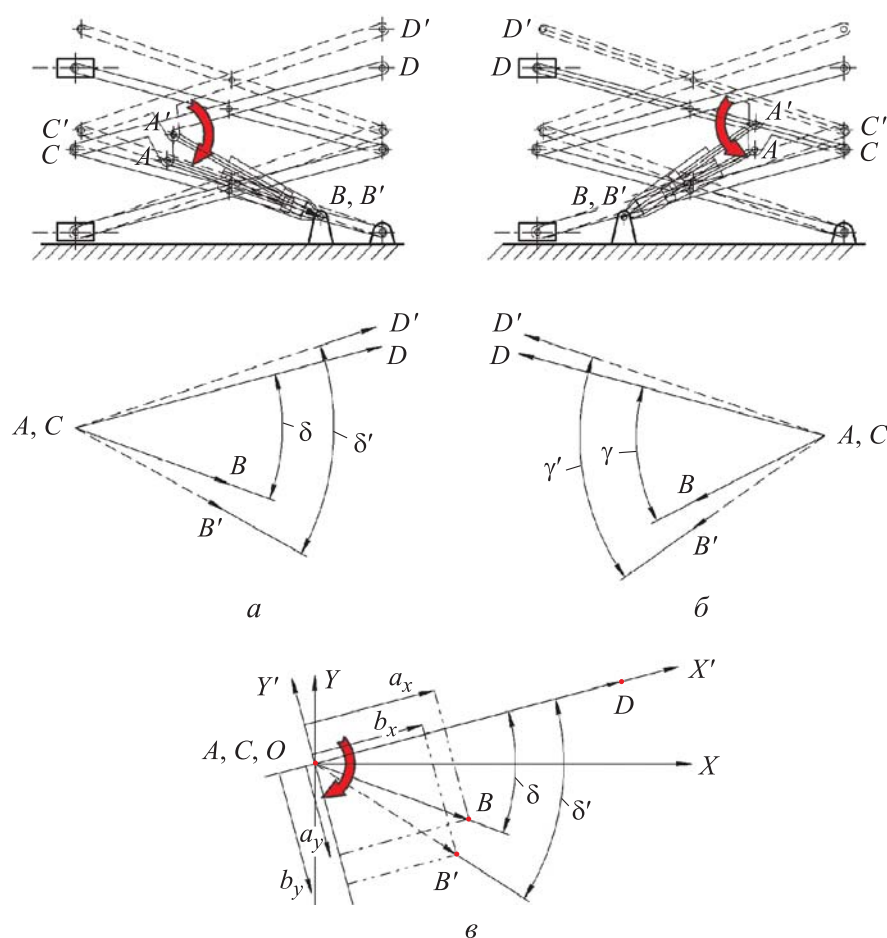


Рис. 3. Расчетные схемы определения направления вращения привода относительно рычага подъемника

Для получения математической зависимости, указывающей на направление вращения привода относительно рычага подъемника, необходимо рассмотреть два положения привода, которые заданы векторами AB и $A'B'$ в системе координат, связанной с векторами CD и $C'D'$. Точки начала векторов A, A', C, C' совмещаются в начале системы координат O . Векторы $C'D'$ и $A'B'$ поворачиваются относительно центра O так, чтобы векторы $C'D'$ и CD совпали по направлению (рис. 3, в). Вводится система координат $X'OY'$, ось OX' которой направлена вдоль вектора CD .

Пусть в исходной прямоугольной системе координат векторы AB и CD заданы координатами $AB (ABX, ABY, 0)$, $CD (CDX, CDY, 0)$, а векторы $A'B'$ и $C'D'$ — координатами $A'B' (AB'X, AB'Y, 0)$, $C'D' (CD'X, CD'Y, 0)$.

В системе координат $X'OY'$ вектор AB , обозначенный как « a », и вектор $A'B'$, обозначенный как « b » (см. рис. 3, в), будут иметь координаты:

$$a(a_x = |AB| \cos \delta, a_y = |AB| \sin \delta, a_z = 0);$$

$$b(b_x = |A'B'| \cos \delta', b_y = |A'B'| \sin \delta', b_z = 0).$$

Векторное произведение $a \times b$ содержит только одну компоненту $c = (a \times b) = (0, 0, c_z)$, где $c_z = |AB| \sin \delta |A'B'| \cos \delta' - |AB| \cos \delta |A'B'| \sin \delta'$, знак которой и будет определять направление вращения вектора AB относительно CD , так как получившийся вектор c будет создавать с векторами a и b правую тройку векторов.

Углы δ и δ' между векторами положения элементов механизма определяются исходя из соотношений между их координатами в исходной системе координат (см. рис. 2), скалярным и векторным произведениями:

$$\cos \gamma = \frac{(AB \times CD)}{|AB| \cdot |CD|} = \frac{AB_X \cdot CD_X + AB_Y \cdot CD_Y}{\sqrt{(AB_X^2 + AB_Y^2)(CD_X^2 + CD_Y^2)}};$$

$$\cos \gamma' = \frac{AB'_X \cdot CD'_X + AB'_Y \cdot CD'_Y}{\sqrt{(AB'^2_X + AB'^2_Y)(CD'^2_X + CD'^2_Y)}};$$

$$\sin \gamma = \frac{(AB \times CD)}{|AB| \cdot |CD|} = \frac{AB_X \cdot CD_Y - AB_Y \cdot CD_X}{\sqrt{(AB_X^2 + AB_Y^2)(CD_X^2 + CD_Y^2)}};$$

$$\sin \gamma' = \frac{AB'_X \cdot CD'_Y - AB'_Y \cdot CD'_X}{\sqrt{(AB'^2_X + AB'^2_Y)(CD'^2_X + CD'^2_Y)}}.$$

Таким образом, компонента c_z вектора c задается отношением

$$c_z = \frac{\left[(AB_X \cdot CD_Y - AB_Y \cdot CD_X)(AB'_X \cdot CD'_X + AB'_Y \cdot CD'_Y) - (AB_X \cdot CD_X + AB_Y \cdot CD_Y)(AB'_X \cdot CD'_Y - AB'_Y \cdot CD'_X) \right]}{\sqrt{(CD_X^2 + CD_Y^2)(CD'^2_X + CD'^2_Y)}},$$

а параметр r в (10) определяется знаком c_z , на который влияет только числитель приведенного выражения:

$$r = \text{sign} \left(\begin{aligned} &(AB_X \cdot CD_Y - AB_Y \cdot CD_X)(AB'_X \cdot CD'_X + AB'_Y \cdot CD'_Y) - \\ &-(AB_X \cdot CD_X + AB_Y \cdot CD_Y)(AB'_X \cdot CD'_Y - AB'_Y \cdot CD'_X) \end{aligned} \right).$$

В рассматриваемой задаче определения направлений действия моментов сил трения в шарнирах крепления привода положения элементов

подъемника, соответствующие векторам AB , $A'B'$, CD , $C'D'$, задаются их известным расположением.

Так, для точки крепления A (см. рис. 2, а):

$$AB(-\cos \beta, -\sin \beta, 0), A'B'(-\cos \beta', -\sin \beta', 0),$$

$$CD(\cos \alpha, \sin \alpha, 0), C'D'(\cos \alpha', \sin \alpha', 0),$$

где углы α' и β' определяются соотношениями (2) и (3) при высоте секции $h' = h + \Delta h$, где Δh — малое приращение высоты подъема секции. Тогда

$$r_A = \text{sign} \left(\begin{aligned} &(\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)(\cos \beta' \cos \alpha' - \cos \beta' \sin \alpha') - \\ &-(\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha)(\cos \beta' \sin \alpha' + \sin \beta' \cos \alpha') \end{aligned} \right).$$

Для точки крепления привода B :

$$AB(-\cos \beta, \sin \beta, 0), A'B'(-\cos \beta', \sin \beta', 0),$$

$$CD(-\cos \alpha, \sin \alpha, 0), C'D'(-\cos \alpha', \sin \alpha', 0),$$

$$r_B = \text{sign} \left(\begin{aligned} &(\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)(-\cos \beta' \cos \alpha' + \cos \beta' \sin \alpha') - \\ &-(-\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha)(\cos \beta' \sin \alpha' + \sin \beta' \cos \alpha') \end{aligned} \right).$$

Если точка A крепления привода располагается на грузовой платформе (см. рис. 2, б), то направление векторов CD и $C'D'$ можно задать вдоль одной оси координат, например OX :

$$CD = C'D'(1, 0, 0),$$

тогда $r_A = \text{sign}(-\sin \beta \cos \beta' + \cos \beta \sin \beta')$.

Полная система уравнений (1) для определения реакций шарниров механизма получается объединением в единую композицию уравнений по секциям. Например, для получения математической модели подъемника, схема которого приведена на рис. 2, а, необходимо объединить выражения (4), (8) и (9).

При решении системы (1) определяются значения компонент вектора реакций R шарниров механизма. Зная реакции, находят максимальную продольную силу $N_{j \max}$ и максимальный изгибающий момент $M_{j \max}$ для каждого j -го рычага конструкции. Максимальные суммарные напряжения $\sigma_{j \max}$ могут быть определены при известных площадях A_i и моментах сопротивления W_i поперечных сечений для рычагов i -й секции:

$$\sigma_{j \max} = \frac{N_{j \max}}{A_i} + \frac{M_{j \max}}{W_i}.$$

Расчетные эксперименты. Для выявления степени влияния сил и моментов сил трения в шарнирах на нагруженность конструкции ножничного подъемника в момент перехода от состояния покоя к движению выполнен ряд расчетов с использованием созданной обобщенной модели.

Выбрано четыре варианта похожих конструкций двухсекционного ножничного подъемника с различным расположением в них привода (рис. 4). Основным аналогом являлась конструкция, описанная в [3].

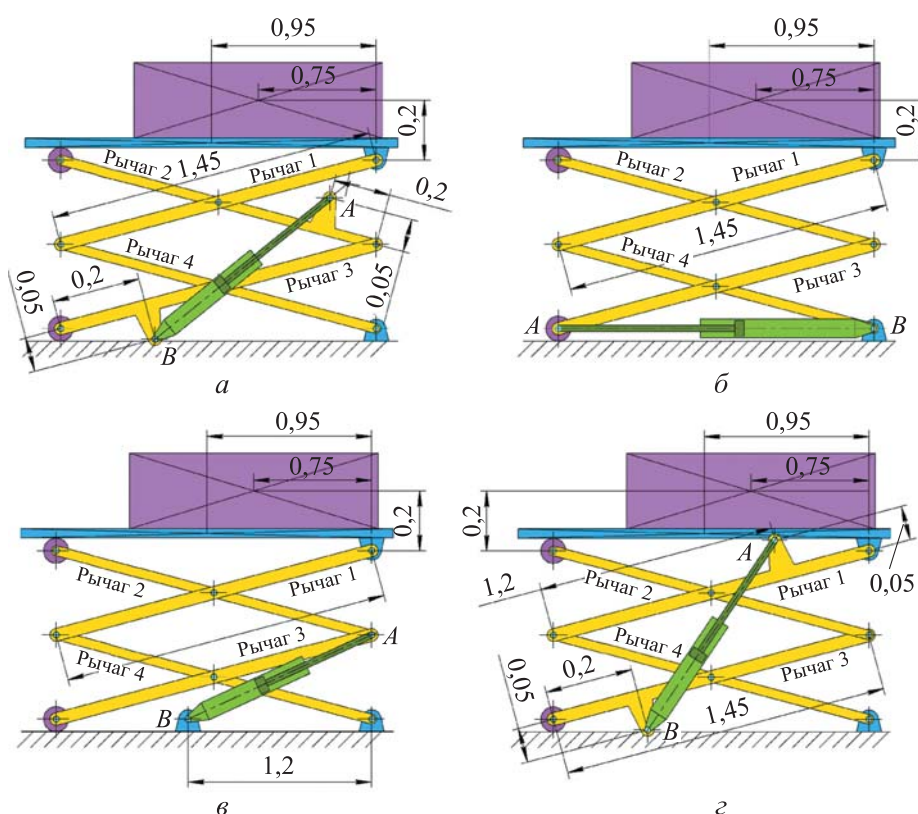


Рис. 4. Схемы вариантов 1–4 (а–г) конструкции ножничного подъемника

Одинаковыми параметрами для всех вариантов конструкции являются: число секций подъемника $n_s = 2$; угол наклона конструкции к горизонтальной поверхности $\gamma = 0$; длина рычага секции $l = 1,45$ м; масса груза $m_l = 500$ кг; координаты расположения центра тяжести груза относительно неподвижного шарнира грузовой платформы $x_l = 0,75$ м, $y_l = 0,2$ м; масса грузовой платформы $m_p = 100$ кг; координата расположения центра тяжести относительно неподвижного шарнира $x_p = 0,95$ м; массой привода решено пренебречь ($m_{DRV} = 0$) из-за необходимости его выбора в каждом конкретном случае.

В качестве рычагов секций подъемника используется стальная труба прямоугольного сечения $80 \times 40 \times 5$ мм, при этом увеличение на 20 % массы рычагов соответствует массе секций $m_{s1,2} = 58$ кг. Площадь поперечного сечения рычагов $A_{1,2} = 10,57$ см²; момент сопротивления сечения $W_{1,2} = 19,6$ см³.

Значения коэффициентов трения покоя приняты на 20 % больше, чем соответствующие значения коэффициентов в состоянии движения*: в шарнирах механизма $\mu_f = 0,12$ для пары сталь–бронза; в ползунах $\mu_{CR} = 0,018$, как для роликов с шарикоподшипниками качения; диаметр оси шарниров $d_f = 0,05$ м.

Расчеты с учетом трения представляют итерационный процесс и ведутся с заданной точностью расчетов сил трения в 1 Н, а моментов сил трения — в 0,1 Н·м.

Значения параметров моделей, характеризующих расположение точек крепления привода в конструкции, приведены в таблице.

Параметры вариантов конструкции механизма

Номер варианта	Параметры расположения точек крепления привода	
	<i>A</i>	<i>B</i>
1	$n_A = 2; x_A = 0,2 \text{ м}; y_A = 0,05 \text{ м}$	$n_B = 3; x_B = 0,2 \text{ м}; y_B = 0,05 \text{ м}$
2	$n_A = 3; x_A = 0; y_A = 0$	$n_B = 5; x_B = 0; y_B = 0$
3	$n_A = 2; x_A = 0; y_A = 0$	$n_B = 5; x_B = 1,2 \text{ м}; y_B = 0$
4	$n_A = 1; x_A = 1,2 \text{ м}; y_A = -0,05 \text{ м}$	$n_B = 3; x_B = 0,2 \text{ м}; y_B = 0,05 \text{ м}$

Отметим, что некоторые схемы (варианты 2, 3, 4) могут быть заданы различным сочетанием параметров. Например, для схемы варианта 3 конструкции точка *A* крепления привода может быть отнесена как к рычагу 2 верхней платформы, так и к рычагу 3 нижней, а точка *B* присоединяется к неподвижному шарниру рычага 4, которая также относится к нижней платформе ($n_B = 5$).

Для анализа результатов расчетов необходимо задать допускаемые напряжения в металлоконструкции подъемника. Для стали Ст3 и коэффи-

* Брауде В.И., Гохберг М.М., Звягин И.Е. и др. Справочник по кранам: В 2 т. Т. 2. Характеристики и конструктивные схемы кранов. Крановые механизмы, их детали и узлы. Техническая эксплуатация кранов. М., Машиностроение, 1988.

циента запаса 1,5 имеем $[\sigma_{\text{доп}}] = 166 \text{ МПа}^{**}$, для стали 09Г2С при толщине стенки проката до 9 мм и том же коэффициенте запаса — $[\sigma_{\text{доп}}] = 233 \text{ МПа}$.

Вычислительные эксперименты для каждого варианта конструкции выполняют на высоте подъема платформы $H = 0,3 \dots 2,0 \text{ м}$ с шагом 0,05 м. Определяют тяговые усилия привода R_{DRV} (рис. 5), необходимые для срабатывания механизма из состояния покоя, и максимальные напряжения $\sigma_{j \max}$ (рис. 6), возникающие в рычагах подъемника. Для оценки влияния сил и моментов сил трения в шарнирах определяют отклонения (в процентном соотношении) рассчитанных сил и напряжений от их значений, найденных без влияния трения:

$$dR = \frac{R_{DRV_F} - R_{DRV}}{R_{DRV}} \cdot 100 \% ; \quad (11)$$

$$d\sigma = \frac{\sigma_{j \max F} - \sigma_{j \max}}{\sigma_{j \max}} \cdot 100 \% . \quad (12)$$

В (11), (12) параметры с обозначением F в нижнем индексе соответствуют найденным с учетом сил трения.

Результаты расчета параметров R_{DRV} привода для различных вариантов конструкции механизма подъемника приведены на рис. 5, а. Параметр отклонения расчетных значений dR определяется по (11) (рис. 5, б). Параметр $iter$ (рис. 5, в) — число итераций расчета сил и моментов сил трения с установленной точностью.

Результаты расчета максимальных напряжений σ для каждого рычага конструкции подъемника и влияния на них сил трения $d\sigma$ (12) приведены на рис. 6. Номера кривых соответствуют номерам рычагов в расчетной модели.

Анализируя результаты расчетов (см. рис. 5, 6) по каждому варианту конструкции, можно заключить следующее.

Наибольшее тяговое усилие R_{DRV} для всех вариантов конструкции развивается на малой высоте подъема H и уменьшается с ее увеличением. Наибольшая нагрузка привода ($\sim 150 \text{ кН}$) рассчитана для варианта 2 конструкции, причем для обеспечения подъема развивается тяговое усилие привода, тогда как в остальных вариантах — толкающее. Для варианта 4 конструкции тяговые усилия, развиваемые приводом, наименьшие

^{**} Брауде В.И., Гохберг М.М., Звягин И.Е. и др. Справочник по кранам. В 2 т. Т. 1. Характеристики материалов и нагрузок. Основы расчета кранов, их приводов и металлических конструкций. М., Машиностроение, 1988.

и составляют 31 кН на малой высоте подъема и до 11 кН на большей высоте подъема.

Характер изменения влияния сил трения на необходимое тяговое усилие привода dR нелинейный. Наибольшие значения dR для варианта 3 достигают 18,5 % и уменьшаются до 5 % на высоте подъема 1,5 м.

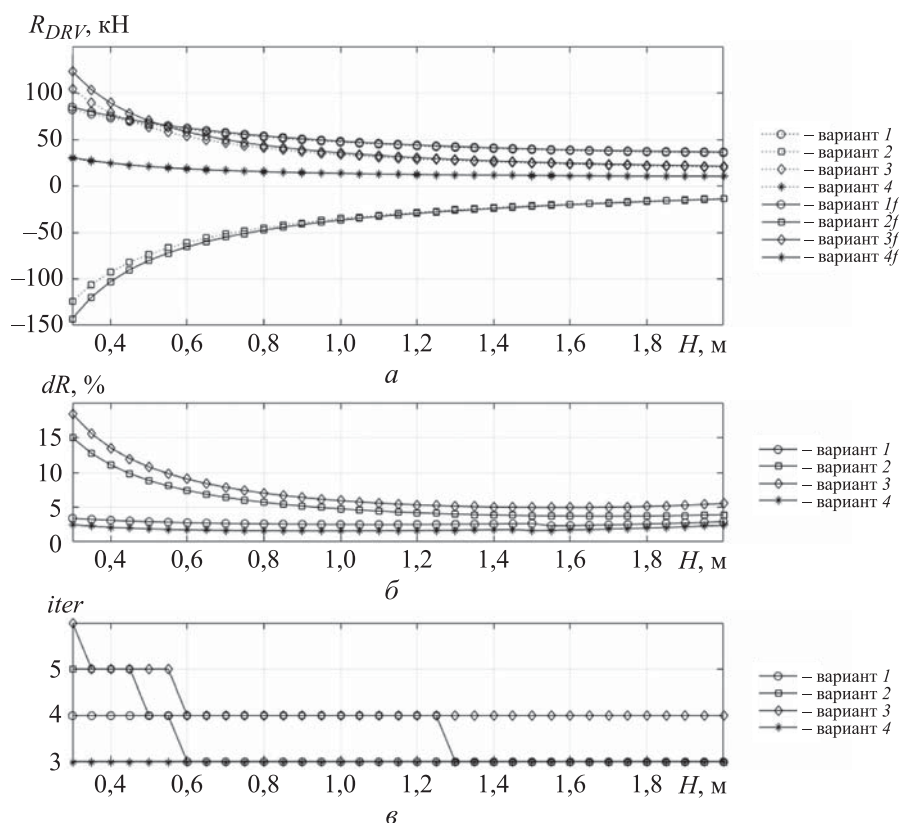


Рис. 5. Результаты расчета параметров R_{DRV} (а), dR (б), $iter$ (в) в приводе подъемника в зависимости от текущей высоты H (штриховой кривой показаны результаты, полученные без учета сил и моментов трения)

Напряжения в наиболее нагруженных рычагах для вариантов 1–3 конструкции механизма (см. рис. 6) в его нижнем положении ($H = 0,3$ м) превышают выбранные ранее допускаемые напряжения как для Ст3, так и для 09Г2С. Поэтому минимальную рабочую высоту подъема необходимо увеличить. Например, для варианта 1 конструкции она должна составлять 1,05 м при использовании 09Г2С и 1,7 м — для Ст3.

Влияние учета сил трения $d\sigma$ на расчетное напряжение также изменяется нелинейно: с увеличением расчетной высоты подъема H напряжение уменьшается, а затем увеличивается. Наибольшее влияние (~ 23 %) наблюдается для рычага 3 варианта 3 конструкции подъемника.

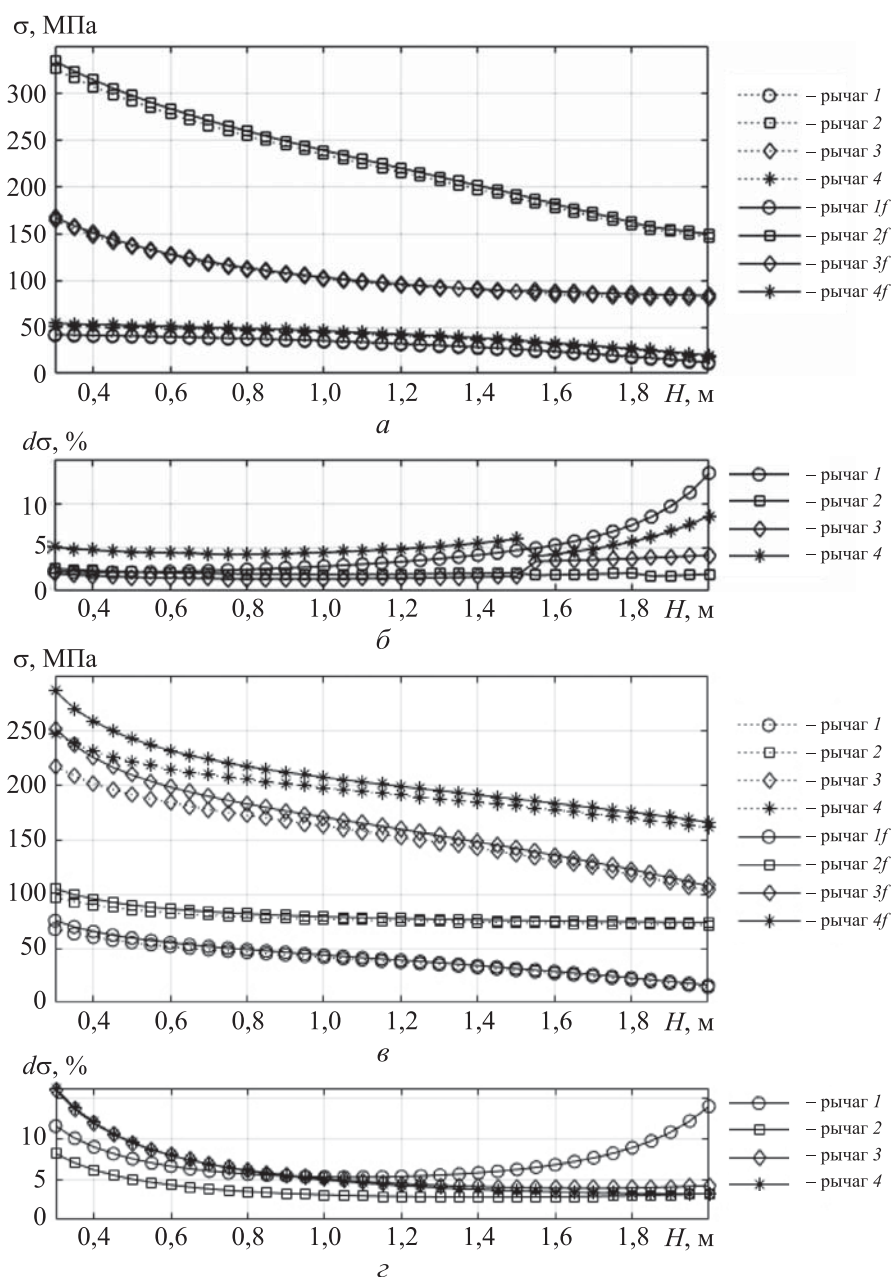


Рис. 6 (начало). Результаты расчета максимальных напряжений σ для каждого рычага конструкции подъемника и влияния на них сил трения $d\sigma$ в зависимости от текущей высоты H :
варианты 1 (а, б), 2 (в, г) конструкции

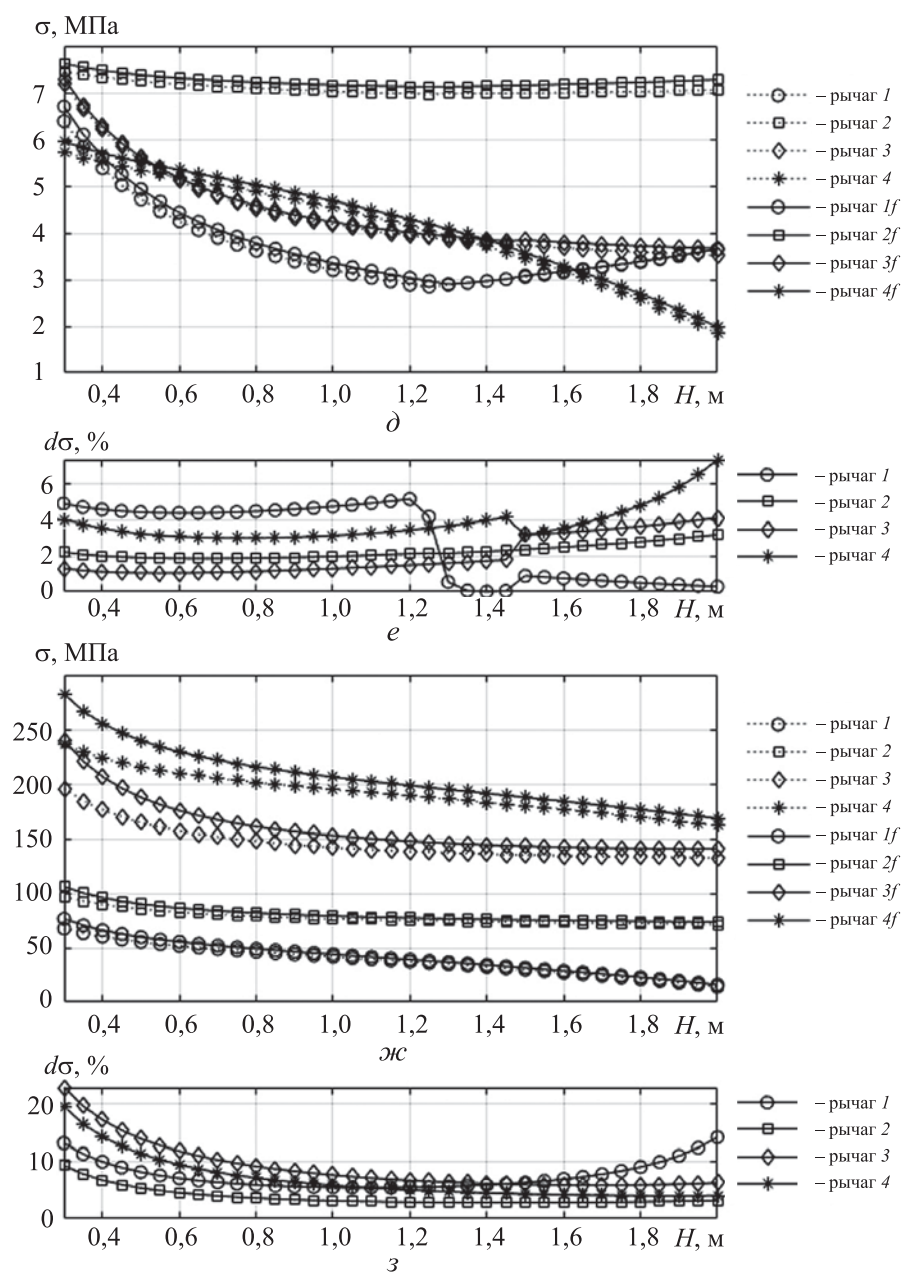


Рис. 6 (окончание). Результаты расчета максимальных напряжений σ для каждого рычага конструкции подъемника и влияния на них сил трения $d\sigma$ в зависимости от текущей высоты H : варианты 3 (δ , e), 4 ($ж$, $з$) конструкции

Отдельно следует рассмотреть результат, полученный для варианта 1 конструкции механизма подъемника. Этот вариант со всеми исходными данными предложен в [3]. В результате расчета, выполненного по объемной модели методом конечных элементов, получена нагрузка ~ 31 кН в приводе на высоте 0,3 м, а напряжение в конструкции рычагов на максимальной высоте подъема составляет 57 МПа. Приведенные данные (см. рис. 5, 6, а) указывают на более высокие значения этих показателей: 85 кН по усилию привода на высоте подъема 0,3 м и 150 МПа по напряжениям в наиболее нагруженном рычаге на высоте подъема 2 м.

Разность результатов главным образом объясняется различием расчетных схем: нижний шарнир в конечно-элементной модели [3], который в реальной конструкции связан с ползуном, оказался закреплен от перемещений, что противоречит условиям работы реальной конструкции.

Значительные различия нагруженности конструкций ножничных подъемников, отличающихся только параметрами, которые характеризуют расположение привода в механизме, свидетельствуют о возможности оптимизации конструкции [20]. Процедура оптимизации конструкции с помощью приведенной модели требует частого пересчета нагрузок, особенно в областях их больших значений. В экспериментах (см. рис. 5, в) по определению сил трения с заданной точностью необходимо провести 4–6 итераций пересчета нагрузок. В конструкциях с другим расположением привода, особенно в тех, где положения механизма будут близки к мертвым точкам, может потребоваться большее число итераций. Это в значительной степени повлияет на продолжительность выполнения оптимизационного поиска. Использование в процедуре оптимизации конструкции механизма твердотельной CAD-модели и расчет ее нагруженности методом конечных элементов менее целесообразны.

Заключение. Разработана обобщенная статическая модель механизма ножничного подъемника, учитывающая влияние сил и моментов сил трения в элементах конструкции и позволяющая быстро выполнить расчет различных по конструктивному исполнению и параметрам вариантов конструкции.

В результате анализа расчетов разных вариантов конструкции механизма ножничного подъемника выявлено, что пренебрежение силами трения уменьшает реальный запас прочности конструкции и может привести к выбору привода, не обеспечивающего достаточного тягового усилия. Так, в рассмотренных конструкциях влияние сил трения на возникающие максимальные напряжения достигало 23 % (вариант 3 конструкции) напряжений, определенных без учета сил трения. По необходимому тяговому

усилию максимальное влияние составило 18,5 % (вариант 3 конструкции). Это влияние особенно велико в областях возникновения больших нагрузок, которые и должны быть учтены в проектировочных расчетах таких конструкций.

Простота использования разработанной модели позволяет применять ее как для оценки нагруженности конкретного варианта конструкции при проектировании, так и при оптимизационных исследованиях, заключающихся в рассмотрении различных вариантов. Учитывая применение в модели непрерывных и дискретных параметров, наряду с классическими методами оптимизации можно использовать и эвристические (например, генетические алгоритмы).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kiran K.-M., Chandrasheker J., Mahipal M., et al. Design & analysis of hydraulic scissor lift. *IRJET*, 2016, vol. 3, no. 6, pp. 1647–1653.
- [2] Gaffar G.-M., Rohan H., Karan D., et al. Design, manufacturing & analysis of hydraulic scissor lift. *IJERGS*, 2015, vol. 3, no. 2-2, pp. 733–740.
- [3] Dengiz C.-G., Şenel M.-C., Yıldızlı K., et al. Design and analysis of scissor lifting system by using finite elements method. *J. Mater. Sc.*, 2018, vol. 6, pp. 58–63.
DOI: <https://doi.org/10.13189/ujms.2018.060202>
- [4] Sabde A.-M., Jamgekar R.-S. Design and analysis of hydraulic scissor lift by FEA. *IRJET*, 2016, vol. 3, no. 10, pp. 1277–1292.
- [5] Stancek J., Bulej V. Design of driving system for scissor lifting mechanism. *Acad. J. Manuf. Eng.*, 2015, vol. 13, no. 4, pp. 38–43.
- [6] Corrado A., Polini W., Canale L., et al. To design a belt drive scissor lifting table. *IJETI*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 515–525.
- [7] Rani D., Agarwal N., Tirth V. Design and fabrication of hydraulic scissor lift. *Int. J. Mech. Eng.*, 2015, vol. 5, no. 2, pp. 81–87.
- [8] Spackman H.M. Mathematical analysis of scissor lifts. San Diego, Naval Ocean Systems Center, 1989. DOI: <https://doi.org/10.21236/ADA225220>
- [9] Tao L., Jian S. Simulative calculation and optimal design of scissor lifting mechanism. *Chinese Control and Decision Conf.*, 2009, pp. 2079–2082.
DOI: <https://doi.org/10.1109/CCDC.2009.5192393>
- [10] Islam T., Yin Ch., Jian S., et al. Dynamic analysis of scissor lift mechanism through bond graph modeling. *IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2014, pp. 1393–1399. DOI: <https://doi.org/10.1109/AIM.2014.6878277>
- [11] Ciupan C., Ciupan E., Pop E. Algorithm for designing a hydraulic scissor lifting platform. *MATEC Web Conf.*, 2019, vol. 299, art. 03012.
DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201929903012>

- [12] Arunkumar G., Kartheeshwaran R., Siva J. Investigation on design, analysis and topological optimization of hydraulic scissor lift. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2054, art. 012081. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2054/1/012081>
- [13] Астахов Э.И., Гарах В.А., Макаров А.Д. Моделирование динамики подъема площадки ножничного подъемника. *Теоретическая и прикладная механика*, 2009, № 24, с. 313–317.
- [14] Pappalardo C.-M., La Regina R., Guida D. Multibody modeling and nonlinear control of a pantograph scissor lift mechanism. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 129–167. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40537.3605>
- [15] Stawiński L., Kosucki A., Morawiec A., et al. A new approach for control the velocity of the hydrostatic system for scissor lift with fixed displacement pump. *Arch. Civ. Mech. Eng.*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 1104–1115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.acme.2019.06.001>
- [16] Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Исследование механизмов с учетом сил трения в кинематических парах. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2018, № 7, с. 147–159. EDN: USKGQM
- [17] Marques F., Flores P., Claro J.-C., et al. Modeling and analysis of friction including rolling effects in multibody dynamics: a review. *Multibody Syst. Dyn.*, 2019, vol. 45, no. 4, pp. 223–244. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-018-09640-6>
- [18] Евграфов А.Н., Петров Г.Н. Алгоритм определения реакций в шарнирах рычажных механизмов с неидеальными кинематическими парами. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2020, № 9, с. 114–126. EDN: ZBLYUV
- [19] Бортяков Д.Е., Соколов В.П. Учет трения в шарнирах многозвенных механизмов. *Научно-технические ведомости СПбГПУ*, 2012, № 3-2, с. 121–125. EDN: PESLBF
- [20] Никитин С.В., Бортяков Д.Е., Грачев А.А. Метод оптимизации конструкции ножничного подъемника. *Современное машиностроение. Наука и образование*, 2022, № 11, с. 310–328. EDN: AMLPWN

Никитин Сергей Васильевич — канд. техн. наук, доцент Высшей школы транспорта СПбПУ (Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29).

Бортяков Данил Евгеньевич — канд. техн. наук, доцент Высшей школы транспорта СПбПУ (Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29).

Грачев Алексей Андреевич — канд. техн. наук, доцент Высшей школы транспорта СПбПУ (Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29).

Ащеулов Александр Витальевич — д-р техн. наук, профессор Высшей школы транспорта СПбПУ (Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Никитин С.В., Бортыков Д.Е., Грачев А.А. и др. Параметрическая модель предельного статического состояния многосекционного ножничного подъемника. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2025, № 1 (152), с. 83–107. EDN: TVSKWA

**PARAMETRIC MODEL OF THE LIMITING STATIC STATE
OF A MULTISECTION SCISSOR LIFT**

S.V. Nikitin

nikitin_sv@spbstu.ru

D.E. Bortyakov

bortyakov_de@spbstu.ru

A.A. Grachev

grachev_aa@spbstu.ru

A.V. Ashcheulov

atsheulov_av@spbstu.ru

SPbPU, St. Petersburg, Russian Federation

Abstract

Engineering methods in computing the low-speed lifting mechanisms usually consider the design as a static model in its most loaded position. In this case, the static friction forces that inevitably act in the real mechanisms and that the drive should overcome when switching on are not taken into account. The paper presents a created static model of the multi-section scissor lift, which takes into consideration the static friction forces in sliders and the moments of the static friction forces in hinges. To simulate various scissor lift designs, the mathematical model is constructed using a block system so that the drive position in the mechanism is specified by the numbers of links, to which it is attached, and its coordinates relative to these links. Taking into account ambiguity of the drive location in the model, a procedure is developed to determine direction of the moments of friction forces action in the drive mount hinges. The presented computation results for various options of the scissor lift design show that the structure loading taking into account the static friction forces, is 20 % or more. The constructed model taking into account its features could be used in design and optimization of the similar structures parameters, and the proposed method is applicable in creating models of other mechanisms that account for the static friction forces

Keywords

Mechanism, scissor lift, parametric model, static analysis, static friction forces

Received 10.07.2023

Accepted 07.10.2024

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Kiran K.-M., Chandrasheker J., Mahipal M., et al. Design & analysis of hydraulic scissor lift. *IRJET*, 2016, vol. 3, no. 6, pp. 1647–1653.
- [2] Gaffar G.-M., Rohan H., Karan D., et al. Design, manufacturing & analysis of hydraulic scissor lift. *IJERGS*, 2015, vol. 3, no. 2-2, pp. 733–740.
- [3] Dengiz C.-G., Şenel M.-C., Yıldızlı K., et al. Design and analysis of scissor lifting system by using finite elements method. *J. Mater. Sc.*, 2018, vol. 6, pp. 58–63.
DOI: <https://doi.org/10.13189/ujms.2018.060202>
- [4] Sabde A.-M., Jamgekar R.-S. Design and analysis of hydraulic scissor lift by FEA. *IRJET*, 2016, vol. 3, no. 10, pp. 1277–1292.
- [5] Stancek J., Bulej V. Design of driving system for scissor lifting mechanism. *Acad. J. Manuf. Eng.*, 2015, vol. 13, no. 4, pp. 38–43.
- [6] Corrado A., Polini W., Canale L., et al. To design a belt drive scissor lifting table. *IJETI*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 515–525.
- [7] Rani D., Agarwal N., Tirth V. Design and fabrication of hydraulic scissor lift. *Int. J. Mech. Eng.*, 2015, vol. 5, no. 2, pp. 81–87.
- [8] Spackman H.M. Mathematical analysis of scissor lifts. San Diego, Naval Ocean Systems Center, 1989. DOI: <https://doi.org/10.21236/ADA225220>
- [9] Tao L., Jian S. Simulative calculation and optimal design of scissor lifting mechanism. *Chinese Control and Decision Conf.*, 2009, pp. 2079–2082.
DOI: <https://doi.org/10.1109/CCDC.2009.5192393>
- [10] Islam T., Yin Ch., Jian S., et al. Dynamic analysis of scissor lift mechanism through bond graph modeling. *IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2014, pp. 1393–1399. DOI: <https://doi.org/10.1109/AIM.2014.6878277>
- [11] Ciupan C., Ciupan E., Pop E. Algorithm for designing a hydraulic scissor lifting platform. *MATEC Web Conf.*, 2019, vol. 299, art. 03012.
DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201929903012>
- [12] Arunkumar G., Kartheeshwaran R., Siva J. Investigation on design, analysis and topological optimization of hydraulic scissor lift. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2054, art. 012081.
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2054/1/012081>
- [13] Astakhov E.I., Garakh V.A., Makarov A.D. Modelling the lifting dynamics of a scissor lift platform. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2009, no. 24, pp. 313–317 (in Russ.).
- [14] Pappalardo C.-M., La Regina R., Guida D. Multibody modeling and nonlinear control of a pantograph scissor lift mechanism. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 129–167. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40537.3605>
- [15] Stawiński L., Kosucki A., Morawiec A., et al. A new approach for control the velocity of the hydrostatic system for scissor lift with fixed displacement pump. *Arch. Civ. Mech. Eng.*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 1104–1115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.acme.2019.06.001>

- [16] Semenov Yu.A., Semenova N.S. Investigation of mechanisms with account of friction forces in kinematic pairs. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Modern Mechanical Engineering: Science and Education], 2018, no. 7, pp. 147–159 (in Russ.). EDN: USKGQM
- [17] Marques F., Flores P., Claro J.-C., et al. Modeling and analysis of friction including rolling effects in multibody dynamics: a review. *Multibody Syst. Dyn.*, 2019, vol. 45, no. 4, pp. 223–244. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11044-018-09640-6>
- [18] Evgrafov A.N., Petrov G.N. Algorithm for determining reactions in joints of lever mechanisms with non-ideal kinematic pairs. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Modern Mechanical Engineering: Science and Education], 2020, no. 9, pp. 114–126 (in Russ.). EDN: ZBLYUV
- [19] Bortyakov D.E., Sokolov V.P. Allowance for friction in hinges of multijointed gears. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU*, 2012, no. 3-2, pp. 121–125 (in Russ.). EDN: PESLBF
- [20] Nikitin S.V., Bortyakov D.E., Grachev A.A. Method for optimising the design of a scissor lift. *Sovremennoe mashinostroenie. Nauka i obrazovanie* [Modern Mechanical Engineering: Science and Education], 2022, no. 11, pp. 310–328 (in Russ.). EDN: AMLPWN

Nikitin S.V. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Higher School of Transport, SPbPU (Politekhnikeskaya ul. 29, St. Petersburg, 195251 Russian Federation).

Bortyakov D.E. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Higher School of Transport, SPbPU (Politekhnikeskaya ul. 29, St. Petersburg, 195251 Russian Federation).

Grachev A.A. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Higher School of Transport, SPbPU (Politekhnikeskaya ul. 29, St. Petersburg, 195251 Russian Federation).

Ashcheulov A.V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Higher School of Transport, SPbPU (Politekhnikeskaya ul. 29, St. Petersburg, 195251 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Nikitin S.V., Bortyakov D.E., Grachev A.A., et al. Parametric model of the limiting static state of a multisection scissor lift. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2025, no. 1 (152), pp. 83–107 (in Russ.). EDN: TVSKWA