

ДИНАМИКА ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С НЕКРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ

О.Н. Тушев

tushev@bmstu.ru

Е.К. Кондратьев

kondratyev@eugenek.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

В общем случае предположено, что под действием аддитивных и мультипликативных возмущений возбуждается каждый элемент линейной механической системы. Решение выполнено методом Боголюбова в два приближения с небольшим изменением. Движение представляется в виде суммы «медленной» и «быстрой» составляющих. Предложена формализация задачи, позволившая в векторном уравнении движения выделить воздействия как скалярные элементы с матричными коэффициентами специального вида, что принципиально упростило аналитические преобразования. Поскольку внешние воздействия представляют собой аperiодические процессы, то во втором приближении осреднение быстрых гармоник на периоде заменено сегрегацией движений, как и в первом приближении. Показано, что в системе могут возникнуть низкочастотные колебания на комбинационных частотах гармоник внешних воздействий, включающих в себя множественные обычные и параметрические резонансы, а также постоянные составляющие. Используемая формализация позволила не только единообразно описать все возможные варианты приложения аддитивной и мультипликативной составляющих нагрузки, но и получить решение поставленной задачи структурно в том же виде, что и для скалярного уравнения. Приведен пример, в котором результаты сопоставлены с решением, полученным численным моделированием движения

Ключевые слова

Линейная система, аддитивные воздействия, параметрические воздействия, медленное движение, быстрое движение, сегрегация, резонанс, постоянная составляющая

Поступила 25.03.2024

Принята 27.04.2024

© Автор(ы), 2024

Введение. Динамические эффекты, свойственные механическим системам под действием аддитивных и мультипликативных возмущений, известны давно. Впервые такие динамические эффекты механических систем выявлены при исследовании динамики физического маятника с изменяемыми параметрами или маятника, точка крепления которого совершает вертикальные колебания.

Маятник представляет собой простую систему с одной степенью свободы, что дает возможность получить аналитическое решение. Динамическое поведение параметрически возбужденного маятника во многом аналогично поведению и других более сложных систем, например, многостепенному маятнику. Динамика системы описывается уравнениями Матье или Хилла. В зависимости от свойств внешнего возбуждения существуют два варианта рассмотрения задачи [1].

Вариант 1. Потеря устойчивости и динамическое поведение системы при воздействии в области низких частот. При внешнем возбуждении в системе возникают параметрические и аддитивные резонансы. Известным результатом исследования области неустойчивости является, например, диаграмма Айнса — Стретта, на которой обозначены границы областей неустойчивости для маятника при вертикальном воздействии в форме синуса [2]. Такая задача в несколько других, более общих постановках приведена в [3–6]. Динамика линейной системы при двух периодических воздействиях рассмотрена в [7, 8], при этом возникают параметрические резонансы на частоте, равной разности частот внешних воздействий.

Вариант 2. Частоты внешних воздействий существенно превышают собственную частоту системы. Маятник, расположенный вертикально (в перевернутом положении, что соответствует максимальной потенциальной энергии), становится устойчивым. Первые результаты решения этой задачи получены академиком П.Л. Капицей [9]. Основополагающие результаты в проблеме повышения устойчивости механических систем за счет вибраций опубликованы В.Н. Челомеем [10, 11]. Для их получения использован метод, разработанный Н.Н. Боголюбовым и развитый Ю.Л. Митропольским [12, 13]. Эти результаты обобщены для маятника с многими степенями свободы [14, 15]; эксперимент и теория маятника с тремя степенями свободы рассмотрены в [16].

Представляет интерес задача, являющаяся обобщением задачи при вертикальной вибрации маятника, а именно, при косо́й вибрации, когда угол направления вибрации отличен от 0 и $\pi/2$. При этом возникает стационарное перемещение (уход) маятника. Этот эффект проявляется

в образовании паразитных перемещений стрелок приборов и во вращении гаек в незатянутых резьбовых соединениях [12, 17].

Важной особенностью результатов, полученных в [18–20], является то, что они справедливы при условии периодичности внешних воздействий и, как частный случай, синусоидальных. Если снять это ограничение, то число вариантов динамического поведения параметрически возбуждаемых систем существенно увеличивается и границы между двумя подходами стираются [21].

Решение задачи. Полагаем, что к каждому элементу линейной системы с n степенями свободы приложены аддитивная и мультипликативная составляющие возмущения в виде гармоник с некрратными частотами $p_{1i}, p_{2i}, \forall i$. При этом необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: $\omega_n \ll \min_i(p_{1i}, p_{2i})$, где ω_n — наибольшая собственная частота системы. Тогда систему уравнений движения можно записать следующим образом:

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + \mu c_{ii} x_i \cos p_{1i} t = a_i \cos p_{2i} t, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где m_i — масса; c_{ij} — жесткость; μ — малый параметр; c_{ii} — диагональный элемент матрицы жесткости; a_i — амплитуда аддитивного воздействия.

Введем в рассмотрение понятия матричной (I_{ii}) и векторной (I_i) единиц, все элементы которых равны нулю, за исключением элементов с номерами ii и i , равных единице. Понятно, что с их помощью можно представить любую матрицу или вектор в виде суперпозиции по элементам. Они позволяют формализовать задачу в очень удобном векторном виде для аналитического решения в принципе так же, как и для системы с одной степенью свободы. Преобразуем систему уравнений (1) и получим:

$$M \ddot{X} + \left(C + \mu \sum_{i=1}^n I_{ii} c_{ii} \cos p_{1i} t \right) X = \sum_{i=1}^n I_i a_i \cos p_{2i} t$$

или

$$\ddot{X} + R \left(E + \sum_{i=1}^n B_i \cos p_{1i} t \right) X = \sum_{i=1}^n F_i \cos p_{2i} t, \quad (2)$$

где $M = \text{diag}(m_i, \forall i)$; $C = [c_{ij}]_n^n$; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $R = M^{-1}C$; E — единичная матрица; $B_i = \mu c_{ii} C^{-1} I_{ii}$; $F_i = M^{-1} I_i a_i$.

Отметим, что уравнение (2) структурно полностью совпадает с уравнением Хилла, но только с правой частью, как, например, для маятника с косой вибрацией точки подвеса [16]. Введенная формализация удобна еще и тем, что любая комбинация приложения внешних нагрузок не изменяет вид уравнения (2), преобразуются только коэффициенты. Допустим, что к элементу системы с номером k приложено мультипликативное полигармоническое воздействие, а к элементу системы с номером l — только аддитивное. Тогда в уравнении (2) коэффициенты B_i и F_i трансформируются к виду:

$$B_i^{(k)} = \mu C^{-1} I_{kk} c_{ii}, \quad F_i^{(l)} = M^{-1} I_l a_i.$$

Представим решение уравнения (2) в виде суперпозиции движений — медленного X_0 с частотами порядка собственных и быстрого ΔX с частотами внешней нагрузки:

$$X = X_0 + \Delta X. \tag{3}$$

Подставив решение (3) в уравнение (2), получим

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0 + \Delta \ddot{X} + R X_0 + R \sum_{i=1}^n B_i \cos p_{1i} t X_0 + R \Delta X + \\ + R \sum_{i=1}^n B_i \cos p_{1i} t \Delta X = \sum_{i=1}^n F_i \cos p_{2i} t. \end{aligned} \tag{4}$$

В первом приближении полагаем, что $\Delta X \cong 0$, также необходимо, чтобы равенство (4) выполнялось для быстрой и медленной составляющих раздельно. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{X}_0 + R X_0 = 0; \\ \Delta \ddot{X} = \sum_{i=1}^n F_i \cos p_{2i} t - R \sum_{i=1}^n B_i \cos p_{1i} t X_0. \end{aligned} \tag{5}$$

После интегрирования (5) при допущении $X_0 \cong \text{const}$ имеем:

$$\Delta X = R \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_{1i}^2} B_i \cos p_{1i} t X_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_{2i}^2} F_i \cos p_{2i} t. \tag{6}$$

Во втором приближении подставим (5) и (6) в уравнение (4), затем, выполнив простые преобразования с сегрегацией «быстрой» и «медленной» составляющих, получим уравнение медленного движения в следующем виде:

$$\ddot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \frac{1}{p_{1j}^2} B_i R B_j \cos(p_{1i} - p_{1j}) t \right] X_0 =$$

$$= \frac{1}{2} R \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{p_{2j}^2} B_i F_j \cos(p_{1i} - p_{2j}) t. \quad (7)$$

Полагаем, что наиболее интересно, когда комбинационные частоты $p_{1i} - p_{1j}$, $p_{1i} - p_{2j}$ достаточно малы и определяют медленное движение. Характер уравнения (7) указывает, что в общем случае решение весьма «многолико» и может содержать в принципе множественные обычные и параметрические резонансы, а также постоянные составляющие. При $i = j$ в левой части уравнения проявляется постоянная составляющая, которая определяет известный эффект повышения жесткости системы при быстрых параметрических вибрациях [6], что трансформирует спектр собственных частот и, как показано в [9], увеличивает ее устойчивость. Для наглядности рассмотрим некоторые конкретные варианты.

Вариант 1. Аддитивное и мультипликативное воздействия приложены только к одному элементу с номером k :

$$\ddot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2p_{1k}^2} B_k R B_k \right] X_0 = \frac{1}{2p_{2k}^2} R B_k F_k \cos(p_{2k} - p_{1k}) t. \quad (8)$$

Несложно получить частное решение уравнения (8):

$$X_0 = \frac{1}{2p_{1k}^2} \left\{ R \left[E + \frac{1}{2p_{1k}^2} B_k R B_k \right] - (p_{1k} - p_{2k})^2 E \right\}^{-1} R B_k F_k \cos(p_{2k} - p_{1k}) t.$$

Понятно, что в системе возможен резонанс при совпадении комбинационной частоты с одной из собственных, а при $p_{1k} = p_{2k} = p$ взамен колебаний возникает постоянная составляющая \tilde{X}_0 :

$$\tilde{X}_0 = \frac{1}{2p^2} \left[E + \frac{1}{2p^2} B_k R B_k \right]^{-1} B_k F_k.$$

Вариант 2. К предыдущему варианту нагрузки добавляется параметрическое воздействие на элемент с номером 1:

$$\begin{aligned} & \ddot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_{1k}^2} B_k R B_k + \frac{1}{p_{1l}^2} B_l R B_l + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{p_{1k}^2} B_l R B_k + \frac{1}{p_{1l}^2} B_k R B_l \right) \cos(p_{1k} - p_{1l}) t \right) \right] X_0 = \\ & = \frac{1}{2} R \left[\frac{1}{p_{2k}^2} B_k F_k \cos(p_{1k} - p_{2k}) t + \frac{1}{p_{2k}^2} B_l F_k \cos(p_{1l} - p_{2k}) t \right]. \end{aligned}$$

Из уравнения следует, что теоретически в системе могут одновременно возбуждаться три резонанса, один из которых параметрический; возможны и различные варианты постоянных составляющих в решении.

Обобщим результаты, распространив их на систему с диссипацией энергии путем введения в уравнение (2) члена $Q\dot{X}$, Q может задаваться различными способами, например, как диагональная матрица коэффициентов диссипации. Тогда соотношение (5) преобразуется к виду

$$\Delta\ddot{X} + Q\Delta\dot{X} = \sum_{i=1}^n (F_i \cos p_{2i}t - RB_i \cos p_{1i}t) X_0. \quad (9)$$

Выполнив простые преобразования с учетом того, что $X_0 \cong \text{const}$, получим частное решение уравнения (9) в виде

$$\Delta X = \sum_{i=1}^n [(L_{1i} \cos p_{1i}t - H_{1i} \sin p_{1i}t)X_0 - L_{2i} \cos p_{2i}t + H_{2i} \sin p_{2i}t], \quad (10)$$

где

$$L_{1i} = \left[E + \frac{1}{p_{1i}^2} Q^2 \right]^{-1} R I_{ii}; \quad L_{2i} = \left[E + \frac{1}{p_{1i}^2} Q^2 \right]^{-1} F_i;$$

$$H_{1i} = Q \left[E + \frac{1}{p_{1i}^2} Q^2 \right]^{-1} R I_{ii}; \quad H_{2i} = Q \left[E + \frac{1}{p_{1i}^2} Q^2 \right]^{-1} F_i.$$

Выполнив аналогичные предыдущему варианту операции, имеем следующее уравнение для медленного движения:

$$\ddot{X}_0 + Q\dot{X}_0 + R \left[E + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (B_i L_{1j} \cos(p_{1i} - p_{1j})t - B_j H_{1j} \sin(p_{1i} - p_{1j})t) \right] X_0 =$$

$$= \frac{1}{2} R \sum_{i,j=1}^n (B_i L_{2j} \cos(p_{1i} - p_{2j})t - B_j H_{2j} \sin(p_{2j} - p_{2i})t). \quad (11)$$

Получение и сравнение результатов. Для иллюстрации полученных

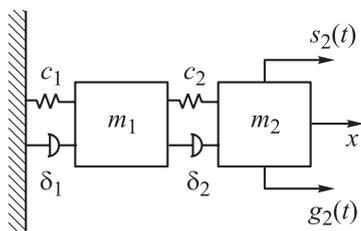


Рис. 1. Модель системы

результатов рассмотрим модель системы с двумя степенями свободы (рис. 1). К второй массе приложены аддитивное и мультипликативное воздействия; применено уравнение медленного движения (8) (вариант 1), которые заданы функциями

$$g_2(t) = \mu x_2(t) \cos p_{12}t; \quad s_2(t) = A \cos p_{22}t.$$

Приведем численные значения параметров системы: $c_1 = 20$ Н/м; $c_2 = 10$ Н/м; $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 5$ кг; $\nu = 1000$; $\mu = 0,2$; $\delta_1 = \delta_2 = 2,5$.

Приближенное решение $x_{0i}(t)$, $i = 1, 2$ полученное в настоящей работе, сравнивалось с результатами численного моделирования $x_i(t)$ исходного уравнения движения. Расчеты проводились с помощью программного пакета Wolfram Mathematica. На рис. 2, 3 сплошной кривой приведены графики $x_{0i}(t)$, штриховой — $x_i(t)$. Анализ проводился для следующих вариантов.

Вариант 1. Режим совпадения частот: $p_{12} = p_{22} = 11$ Гц (см. рис. 2).

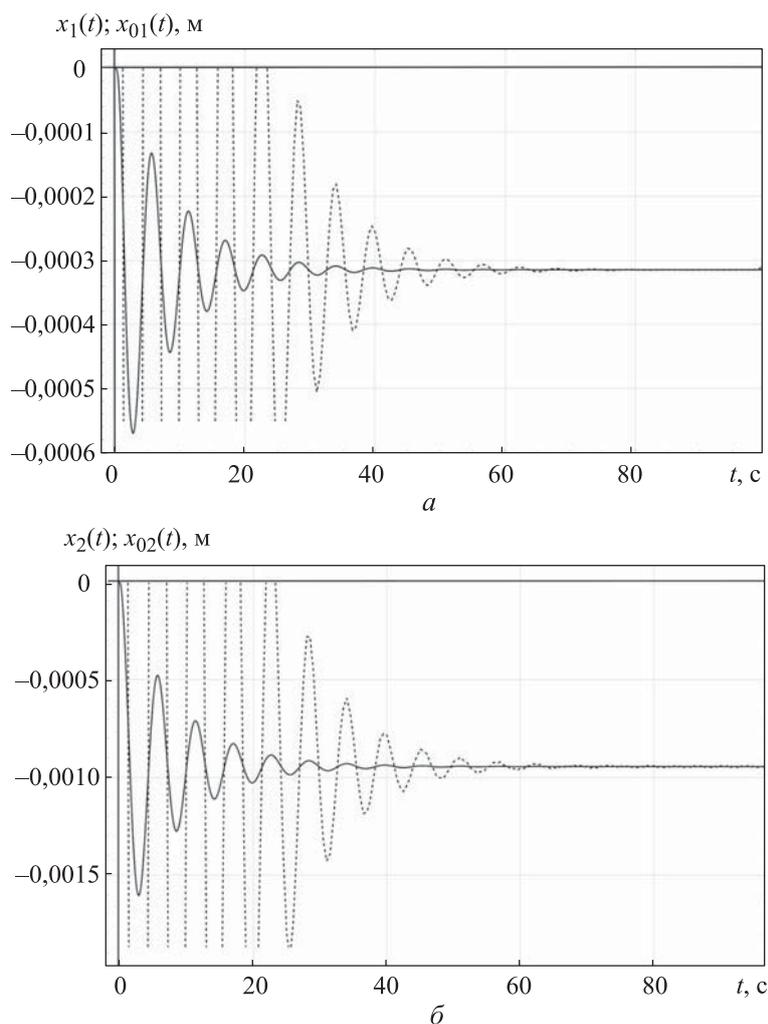


Рис. 2. Графики движения первого (а) и второго (б) тел; режим совпадения частот

После затухания переходных процессов постоянные составляющие решения равны $\tilde{x}_{01} = -3,139 \cdot 10^{-4}$ м, $\tilde{x}_{02} = -9,419 \cdot 10^{-4}$ м, $\tilde{x}_1 = -3,074 \cdot 10^{-4}$ м, $\tilde{x}_2 = -9,334 \cdot 10^{-4}$ м, с погрешностями $\Delta_1 = 2,12$ %; $\Delta_2 = 0,91$ %.

Вариант 2. Резонансный режим. Собственные частоты с учетом того, что внешнее параметрическое воздействие трансформирует собственный спектр системы, определяются выражением

$$\omega_0 = \sqrt{R \left[E + \frac{1}{2p_{12}^2} B_i R B_i \right]} = \begin{bmatrix} 0,225 \\ 0,503 \end{bmatrix} \text{ Гц.}$$

Частотам внешнего воздействия в таком случае присваиваются следующие значения: $p_{12} = 11$ Гц, $p_{22} = p_{12} + (\omega_0)_{21}$. Рассмотрение режима на частоте $(\omega_0)_{11}$ приводит к схожим результатам (см. рис. 3).

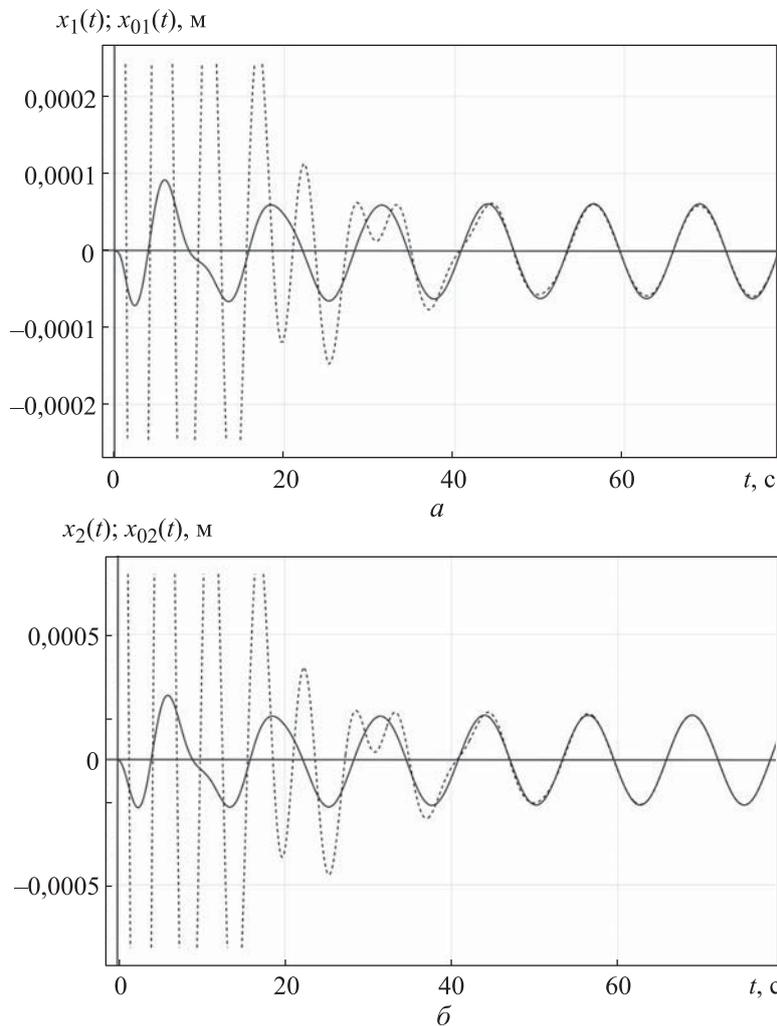


Рис. 3. Графики движения первого (а) и второго (б) тел (резонансный режим)

После затухания переходных процессов средние погрешности по амплитудным значениям составляют $\Delta_1 = 3,2 \%$, $\Delta_2 = 1,2 \%$.

Выводы. Высокочастотные аддитивное и мультипликативное полигармонические воздействия с некратными частотами генерируют низкочастотные колебания всех типов, если комбинационные частоты гармонических составляющих попадают в диапазон спектра собственных частот системы.

Предложенная формализация позволила записать векторное уравнение движения многомерной системы, совпадающее с уравнением Хилла. Это дало возможность получить решение в удобном для анализа виде; установить его характер в каждом конкретном случае нагружения (резонансные режимы, постоянные составляющие, трансформация спектра собственных частот).

Использование в методе Боголюбова во втором приближении повторной сегрегации по частотам (как в первом приближении) вместо осреднения высокочастотных членов на периоде позволяет избежать трудности, если процессы по существу апериодические (полигармоника с некратными частотами).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Смирнов А.С., Смольников Б.А. История механического резонанса — от первоначальных исследований до авторезонанса. *Чебышевский сборник*, 2022, т. 23, № 1, с. 269–292. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292>
- [2] Грибков В.А., Хохлов А.О. Прием, упрощающий решение задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых маятниковых систем. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2015, № 11, с. 29–38. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2015-11-29-38>
- [3] Сейранян А.П., Ябуно Х., Цумото К. Неустойчивость и периодические движения физического маятника с колеблющейся точкой подвеса. *Докл. Акад. наук*, 2005, т. 404, № 2, с. 192–197. EDN: HSIYBB
- [4] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter stability with mechanical applications*. Singapore, World Scientific, 2004.
- [5] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, no. 3, pp. 293–513.
- [6] Акчурина Л.В., Каверина В.К. Рекуррентные формулы коэффициентов ряда Фурье при решении уравнения Матье в задачах систем с трением. *Вопросы теории и приложений математических моделей механики и процессов переноса*, 2018, № 4, с. 32–34. EDN: VUECYR
- [7] Челомей С.В. Нелинейные колебания с параметрическим возбуждением. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1977, № 3, с. 44–53.

- [8] Челомей С.В., Щеглов Г.А. О динамической устойчивости прямого трубопровода, нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости. *Изв. АН. МТТ*, 1998, № 6, с. 175–184. EDN: VVKNAJ
- [9] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *ЖЭТФ*, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.
- [10] Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. *Докл. АН СССР*, 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
- [11] Челомей В.Н. Избранные труды. М., Машиностроение, 1989.
- [12] Боголюбов Н.Н., Садовников Б.И. Об одном варианте метода усреднения. *Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия*, 1961, № 3, с. 24–34.
- [13] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974.
- [14] Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата, Наука, 1981.
- [15] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. АН. МТТ*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [16] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрацией. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [17] Иориш Ю.И. Виброметрия. М., МАШГИЗ, 1963.
- [18] Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б. Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе. *Вестник ВГУ. Сер. Физика, математика*, 2018, № 3, с. 105–125. EDN: VBAJOY
- [19] Абрамов А.А., Курочкин С.В. Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2007, т. 47, № 3, с. 414–423. EDN: IAGRIP
- [20] Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position of double pendulum. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 2, p. 457–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.09.007>
- [21] Тушев О.Н., Чернов Д.С. Квазистатический «уход» маятника при возмущении точки подвеса высокочастотной полигармонической вибрацией с некратными частотами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 4–16. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-4-16>

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Кондратьев Евгений Константинович — инженер кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Тушев О.Н., Кондратьев Е.К. Динамика линейной механической системы под действием аддитивных и мультипликативных полигармонических высокочастотных воздействий с некратными частотами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2024, № 2 (149), с. 121–133. EDN: SZGJSA

**LINEAR MECHANICAL SYSTEM DYNAMICS UNDER
THE INFLUENCE OF ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE
POLYHARMONIC HIGH-FREQUENCY EFFECTS
WITH THE NON-MULTIPLE FREQUENCIES**

O.N. Tushev

E.K. Kondratyev

tushev@bmstu.ru

kondratyev@eugenek.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper assumes that in a general case each element of a system is being excited. It provides solution by the Bogolyubov method in two approximations with a slight modification. Motion is represented as the sum of the “slow” and “fast” components. Problem formalization is proposed making it possible to identify influences in the motion vector equation as the scalar elements with the matrix coefficients of a special form, which fundamentally simplified the analytical transformations. Since external influences appear to be the aperiodic processes, fast harmonics averaging over a period in the second approximation is replaced by the motion segregation, as in the first approximation. The paper shows that low-frequency oscillations could appear in the system at combination frequencies of the external influence harmonics, including the multiple ordinary and parametric resonances, as well as the constant components. The formalization used makes it possible not only to uniformly describe all the possible options in applying the load additive and multiplicative components, but also to obtain a solution to the problem posed structurally in the same form as for the scalar equation. The results are confirmed by an example, where they are compared with the solution obtained by the motion numerical simulation

Keywords

Linear system, additive influences, parametric influences, slow motion, fast motion, segregation, resonance, constant component

Received 25.03.2024

Accepted 27.04.2024

© Author(s), 2024

REFERENCES

- [1] Smirnov A.S., Smolnikov B.A. The history of mechanical resonance — from initial studies to autoresonance. *Chebyshevskiy sbornik*, 2022, vol. 23, no. 1, pp. 269–292 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-1-269-292>
- [2] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. A method to simplify solution of stability problem for parametrically stabilized statically unstable pendulum systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2015, no. 11, pp. 29–38 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2015-11-29-38>
- [3] Seyranyan A.P., Yabuno Kh., Tsumoto K. Instability and periodic motion of a physical pendulum with a vibrating suspension point (theoretical and experimental approach). *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 9, pp. 467–472. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.2074117>
- [4] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. Multiparameter stability with mechanical applications. Singapore, World Scientific, 2004.
- [5] Yaluno H., Miura M., Aoshima N.J. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on the symmetry-breaking of the bifurcation. *Sound and Vibration*, 2004, vol. 273, no. 3, pp. 293–513.
- [6] Akchurina L.V., Kaverina V.K. Recurrent formulas of Fourier series coefficients in solving the Mathieu equation in problems of systems with friction. *Voprosy teorii i prilozheniy matematicheskikh modeley mekhaniki i protsessov perenosa* [Questions of theory and applications of mathematical models of mechanics and transfer processes], 2018, no. 4, pp. 32–34 (in Russ.). EDN: VUECYR
- [7] Chelomey S.V. Nonlinear oscillations with parametric excitation. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1977, no. 3, pp. 44–53 (in Russ.).
- [8] Chelomey S.V., Shcheglov G.A. On the dynamic stability of a rectilinear pipeline acted upon by a variable axial force due to the flow of a pulsating fluid. *Izv. AN. MTT*, 1998, no. 6, pp. 175–184 (in Russ.). EDN: VVKNAJ
- [9] Kapitsa P.L. Dynamic stability of a pendulum at an oscillating suspension point. *ZhETF*, 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–597 (in Russ.).
- [10] Chelomey V.N. On the possibility of increasing the stability of elastic systems by means of vibrations. *Dokl. AN SSSR*, 1956, vol. 110, no. 3, pp. 345–347 (in Russ.).
- [11] Chelomey V.N. *Izbrannyye trudy* [Selected works]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1989.
- [12] Bogolyubov N.N., Sadovnikov B.I. On one variant of the averaging method. *Vestnik MGU. Ser. 3. Fizika, astronomiya*, 1961, no. 3, pp. 24–34 (in Russ.).
- [13] Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
- [14] Strizhak T.G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa “mayatnik”* [Methods of studying dynamic systems of the “pendulum” type]. Alma-Ata, Nauka Publ., 1981.

- [15] Chelomey S.V. On two problems of dynamical stability of oscillatory systems formulated by academicians P.L. Kapitsa and V.N. Chelomei. *Mech. Solids*, 1999, vol. 34, no. 6, pp. 134–140.
- [16] Chelomey V.N. Paradoxes in the mechanics due to the vibrations. *Dokl. AN SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67 (in Russ.).
- [17] Iorish Yu.I. *Vibrometriya [Vibrometry]*. Moscow, MASHGIZ Publ., 1963.
- [18] Belomytseva E.G., Kurin A.F., Tulenko E.B. The Cauchy problem for the Mathieu equation with damping at parametric resonance. *Vestnik VGU. Ser. Fizika, matematika [Proc. of VSU. Ser. Phys. Math.]*, 2018, no. 3, pp. 105–125 (in Russ.). EDN: VBAJOY
- [19] Abramov A.A., Kurochkin S.V. Calculation of solutions to the Mathieu equation and of related quantities. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 3, pp. 397–406. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542507030050>
- [20] Arkhipova L.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of upper statically unstable position of double pendulum. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 2, pp. 457–469. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.09.007>
- [21] Tushev O.N., Chernov D.S. Pendulum quasi-static drift effect at suspension point excitation by high-frequency polyharmonic multiple frequency vibration. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 4–16 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-4-16>

Tushev O.N. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Kondratyev E.K. — Engineer, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Tushev O.N., Kondratyev E.K. Linear mechanical system dynamics under the influence of additive and multiplicative polyharmonic high-frequency effects with the non-multiple frequencies. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2024, no. 2 (149), pp. 121–133 (in Russ.). EDN: SZGJSA