

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МОДАЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДЕМПФИРОВАНИЯ ОТ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

С.Н. Дмитриев<sup>1</sup>

dmitrievsn@bmstu.ru

Р.К. Хамидуллин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов,  
Московская обл., Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложена методика обработки результатов модальных испытаний, основанная на представлении демпфирования в окрестности резонансных пиков в виде функции от частоты колебаний. Такой подход применен для повышения качества идентификации модальных параметров систем с проявлениями нелинейностей. Методика позволяет учитывать изменения демпфирования в окрестности резонансных пиков, возникающих в основном из-за зависимости демпфирования от амплитуды колебаний, а также существенную несимметричность пиков, обычно связанную с проявлением гистерезиса при уменьшении или возрастании частоты колебаний. При обработке на основе экспериментально полученных амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик построена функция демпфирования, характеризующая изменение демпфирования в конструкции от частоты колебаний. В окрестности резонансных пиков проведена аппроксимация функции демпфирования полиномом второй степени для определения соотношения между коэффициентами полинома. Методом наименьших квадратов выполнен итерационный подбор коэффициентов демпфирования для каждого тона колебаний с учетом взаимного влияния тонов. Методика реализована в среде MATLAB. Верификация проведена сравнением результатов обработки с результатами, полученными с помощью методов PolyMAX, Time MDOF и метода половинной мощности

### Ключевые слова

*Модальный анализ, вибрационные испытания, нелинейное демпфирование, демпфирование колебаний, передаточная функция*

Поступила 15.03.2024

Принята 23.04.2024

© Автор(ы), 2024

**Введение.** Модальные испытания применяются для определения частот, форм и декрементов тонов собственных колебаний. На основе результатов испытаний проводится верификация математических моделей объекта испытаний, а при серийном производстве выявляются неточности, возникшие на этапах изготовления и сборки. Важность экспериментального модального анализа обусловлена еще тем, что это единственный способ определения фактических значений параметров демпфирования, определяющих уровни откликов конструкции на внешнее воздействие.

В ракетостроении актуальность модального анализа особенно высока из-за необходимости учета влияния собственных тонов колебаний конструкции на систему управления и стабилизации летательного аппарата (ЛА). Упругие динамические характеристики ЛА могут существенно влиять на точность навигации и стабилизации, поэтому закладываются в его систему управления.

Идентификация модальных параметров по полученным амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ) может быть затруднена в связи со взаимным влиянием тонов колебаний, а также проявлением нелинейности объекта испытаний. В частности, это может проявляться в виде существенной несимметричности АЧХ в окрестности резонансной частоты.

Существующие методы обработки результатов модальных испытаний предполагают наличие некоторой математической модели объекта испытаний. Чаще всего эта модель основана на гипотезе Базиля, т. е. на предположении описания с помощью набора не связанных между собой уравнений гармонического осциллятора. При колебаниях, хорошо разделенных по частотам тонов, для определения частоты колебаний и коэффициента модального демпфирования отдельного тона эти уравнения могут быть использованы по отдельности (метод SDOF [1]), при наличии же близких тонов уравнения используются совместно (метод MDOF [1]). В уравнения движения по каждому тону колебаний закладывается некоторая модель демпфирования, чаще всего пропорционального скорости. В ряде работ успешно применены альтернативные модели диссипативных сил, пропорциональных перемещениям [2, 3], также и перемещениям и ускорениям [4, 5]. В настоящей работе предложена более сложная модель, в которой одновременно присутствуют диссипативные силы, пропорциональные перемещениям, скоростям и ускорениям. В этом случае в уравнениях, описывающих АЧХ, вместо отдельного коэффициента, учитывающего влияние демпфирования, появляется функция, являющаяся полным квадратичным полиномом от частоты вынуждающей силы. В предлагаемой методике принято, что данная функция является произвольной функцией частоты, опре-

деляемой в ходе эксперимента. Она названа «функцией демпфирования». При определении собственных частот и коэффициентов демпфирования функция локально, на некотором диапазоне частот, аппроксимируется полиномом второй степени. В рамках моделей демпфирования, принятых в работах [2–5], отдельные слагаемые могут быть интерпретированы как вклад конструкционного демпфирования, пропорционального перемещению, вязкого демпфирования, пропорционального скорости, и демпфирования, обусловленного ударами из-за наличия люфтов [4, 5]. Предложенный алгоритм определения функции демпфирования существенно сложнее традиционного способа нахождения логарифмического декремента колебаний по ширине резонансного пика. Этот алгоритм предполагает совместное исследование АЧХ и фазочастотных характеристик (ФЧХ) в некоторой окрестности резонансного пика для определения численных значений коэффициентов полинома. Эти дополнительные затраты оправдываются тем, что удастся лучше аппроксимировать пики АЧХ с ярко выраженной асимметрией и в некоторых случаях выявить скрытые, не проявляющиеся на АЧХ тона колебаний. Приведено сравнение обработок результатов испытаний элементов конструкций с использованием разработанной методики и с помощью программного пакета PolyMAX [6, 7] компании LMS, а также метода Pick Picking [8], используемого для обработки результатов испытаний систем с хорошо разделенными тонами колебаний.

**Функция демпфирования.** Рассмотрим модальные испытания, проводимые с использованием синусоидального возбуждения с плавно изменяющейся частотой. Приведем описание механизмов демпфирования, позволяющих аппроксимировать функцию демпфирования полиномом второй степени [1–8].

Обычно выделяют три основных механизма демпфирования: внешнее вязкое трение, внутреннее трение в материале и конструкционное демпфирование, обусловленное действием сил сухого трения. В сложных конструкциях, таких как ЛА, взаимодействуют все три механизма диссипации энергии, что приводит к сложной, нелинейной зависимости демпфирования от большого числа факторов. При этом зачастую основным механизмом рассеяния энергии является сухое трение, которое, как известно, не зависит от частоты колебаний. Способ учета демпфирования, не зависящего от частоты колебаний, предложен и обоснован Е.С. Сорокиным [9]. При использовании для анализа стационарных гармонических колебаний метода комплексных амплитуд [10] трение по способу, обоснованному Е.С. Сорокиным, представляется в динамических уравнениях движения мнимой частью матрицы жесткости:

$$M\ddot{x} + K(1 + if_k)x = P. \quad (1)$$

Здесь  $M$  — матрица масс;  $K$  — матрица жесткости;  $\ddot{x}$ ,  $x$  — векторы ускорений и перемещений узловых точек;  $i$  — мнимая единица;  $f_k$  — безразмерный коэффициент;  $P$  — внешняя вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону. Физически мнимая часть матрицы жесткости соответствует позиционным силам сухого трения, которые при гармонических колебаниях будут изменяться в противофазе со скоростью.

На практике используется модель вязкого трения, пропорционального вектору скорости узловых точек  $\dot{x}$ . В таком случае уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = P, \quad (2)$$

где  $D$  — матрица демпфирования.

Недостатком модели (2) является плохое соответствие экспериментальным исследованиям, согласно которым элементы ЛА могут иметь нелинейную зависимость демпфирования и жесткости от амплитуды колебаний [11–13]. Для решения этой проблемы используются модели демпфирования, зависящие от амплитуды колебаний [13, 14], примерами которых являются либо методы эквивалентной линеаризации [15], либо выражение

$$\ddot{x} + c\dot{x} + d\dot{x}|\dot{x}| + p_0^2x = f(t), \quad (3)$$

где  $c$ ,  $d$  — коэффициенты, характеризующие линейное и нелинейное вязкое демпфирование.

Существует проблема, связанная с явлением переброса, когда при постоянной амплитуде вынуждающей силы наблюдается диапазон вынуждающих частот, в котором возможны три различных значения амплитуды отклика. Переброс приводит к существенной асимметрии АЧХ в окрестности резонансных пиков, что существенно осложняет идентификацию модальных характеристик. Классическим примером системы, в которой наблюдается явление переброса, служит пружина с нелинейной зависимостью восстанавливающей силы от растяжения [16]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f(t). \quad (4)$$

Для определения эквивалентного демпфирования и разделения близких тонов колебаний в условиях возникновения переброса в [4, 5] при описании диссипации энергии совместно использованы мнимые составляющие матрицы жесткости и матрицы массы, а также разделение диапа-

зон частот на интервалы. Предположение о физической интерпретации введенной составляющей приведено в [4]: «...мнимую часть коэффициентов матрицы масс можно рассматривать как коэффициенты конструкционного демпфирования, обусловленного ударами и другими контактными взаимодействиями, изменяющими кинетическую энергию колебаний...». В уравнении вынужденных колебаний, согласно модели М.С. Галкина и Б.В. Григорьева (5), присутствуют два безразмерных коэффициента  $f_m$  и  $f_k$ , характеризующих демпфирование:

$$M\ddot{x}(1 + if_m) + Kx(1 + if_k) = P. \quad (5)$$

Следовательно, в различных представлениях уравнений вынужденных колебаний слагаемые, определяющие рассеяние энергии, могут включать в себя векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений. Предположим, что в уравнение стационарных гармонических колебаний входят все три слагаемые:

$$M\ddot{x}(1 + if_m) + D\dot{x} + Kx(1 + if_k) = P \exp(i(pt + \varphi)). \quad (6)$$

Рассмотрим (в рамках гипотезы Базиля) вынужденные гармонические колебания для одного тона колебаний. Для этого запишем уравнение гармонического осциллятора с тремя коэффициентами демпфирования:

$$m\ddot{x}(1 - if_2) + \delta\dot{x} + kx(1 + if_0) = P \exp(i(pt + \varphi)). \quad (7)$$

Здесь  $m$  — точечная масса;  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  и  $x$  — ускорение, скорость и перемещение точечной массы;  $f_2$ ,  $\delta$ ,  $f_0$  — безразмерные коэффициенты;  $k$  — жесткость пружины;  $P$  — амплитуда вынуждающей силы;  $p$  — частота внешнего воздействия;  $\varphi$  — начальная фаза. Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$x = A \exp(i(pt + \varphi_1)). \quad (8)$$

Для записи решения введем новую переменную, характеризующую вязкое демпфирование

$$f_1 = \frac{\delta}{\sqrt{km}}, \quad (9)$$

а также коэффициент расстройки

$$\gamma = \frac{p}{\omega_0} = p \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10)$$

Из (8) выразим частоту колебаний

$$p = \gamma \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11)$$

После подстановки (8) и (11) в выражение (7) получим:

$$kA \left( -\gamma^2(1 - i f_2) + i \gamma f_1 + (1 + i f_0) \right) = P. \quad (12)$$

Из формулы (12) можно выделить так называемую функцию демпфирования, которая вследствие включения в динамическое уравнение движения трех видов демпфирования является полным квадратичным полиномом от частоты:

$$f(\gamma) = f_0 + \gamma f_1 + \gamma^2 f_2. \quad (13)$$

При аппроксимации АЧХ в окрестности пиковых значений удобнее использовать полный квадратичный полином, чем отдельно взятые слагаемые, а отдельные коэффициенты полинома позволяют оценить характер демпфирования. Формально порядок полинома можно увеличить, но при этом возникают вопросы, связанные с физической интерпретацией коэффициентов полинома при степенях частоты выше второй.

**Алгоритм обработки результатов испытаний с учетом нелинейной зависимости демпфирования от частоты.** Последовательность действий для обработки результатов модальных испытаний можно условно поделить на два этапа.

1. Исследование зависимости демпфирования от частоты колебаний и получение функции демпфирования по результатам эксперимента.
2. Итерационный подбор коэффициентов демпфирования с помощью метода наименьших квадратов на интервале частот, определение резонансных частот и коэффициентов демпфирования.

**Исследование зависимости демпфирования от частоты колебаний.** Отметим, что характер сил, вызывающих рассеяние энергии, не сильно сказывается на виде АЧХ и ФЧХ. Пиковые значения АЧХ определяются уровнем рассеяния энергии, а не способом рассеяния. Это позволяет практически использовать представление об эквивалентном вязком демпфировании [9]. Для выявления функции демпфирования из экспериментальных данных требуется специальная процедура. Функцию демпфирования можно определить, используя совместно АЧХ и ФЧХ или действительную и мнимую части АЧХ. Найдем соответствующее представление.

Перемещение при статическом приложении внешней силы имеет вид

$$A_{ст} = \frac{P}{k}. \quad (14)$$

Коэффициент динамичности  $\delta$  определяется как отношение амплитуды колебаний при возбуждении на некоторой частоте к перемещению при статическом приложении силы:

$$\delta(\gamma) = \frac{A(\gamma)}{A_{ст}}. \quad (15)$$

С учетом (12)–(14) коэффициент динамичности может быть представлен как

$$\delta = \frac{1}{(1 - \gamma^2 + i f(\gamma))}. \quad (16)$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\delta(\gamma) = \frac{1 - \gamma^2}{((1 - \gamma^2)^2 + f(\gamma)^2)} - i \frac{f(\gamma)}{((1 - \gamma^2)^2 + f(\gamma)^2)}. \quad (17)$$

Найдем модуль коэффициента динамичности

$$|\delta(\gamma)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + f(\gamma)^2}}. \quad (18)$$

Используя (17) и (18), представим коэффициент динамичности через квадрат его модуля:

$$\delta(\gamma) = |\delta(\gamma)|^2 ((1 - \gamma^2) - i f(\gamma)). \quad (19)$$

С помощью выражений для синуса и косинуса угла сдвига фазы  $\Psi$  между возбуждающей силой и откликом перепишем (19) в виде

$$\delta(\gamma) = |\delta(\gamma)| (\cos \Psi + i \sin \Psi). \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что синус угла сдвига фазы  $\Psi$  может быть определен через функцию демпфирования и модуль коэффициента динамичности:

$$\sin \Psi = f(\gamma) |\delta(\gamma)|. \quad (21)$$

Определяя коэффициент динамичности по формуле (15), найдем функцию демпфирования:

$$f(\gamma) = \frac{A_{ст} \sin \Psi}{|A(\gamma)|}. \quad (22)$$



В выражении (22)  $A_{\text{ст}}$  является постоянным множителем, не зависящим от частоты и не влияющим на характер демпфирования. Синус фазы принимает максимальные значения в окрестности резонанса и приближается к нулю по мере удаления от резонанса.

На практике удобнее использовать нормированные к единице значения функции демпфирования. Для этого можно использовать выражение

$$f(\gamma) = \frac{A_{\text{max}} \sin \Psi}{|A(\gamma)|}. \quad (23)$$

Здесь  $A_{\text{max}}$  — максимальное значение амплитуды в рассматриваемом частотном диапазоне (значение амплитуды на резонансе).

Значения функции демпфирования могут отличаться в разных точках конструкции, поэтому целесообразно усреднять полученные значения, учитывая показания всех интересующих датчиков, установленных на конструкции:

$$f_{\Sigma}(\gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{A_{\text{max } i} \sin \Psi_i}{|A_i(\gamma)|^m}. \quad (24)$$

Построив функцию (24), можно оценить характер изменения демпфирования в окрестности резонансной частоты. Аппроксимируя эту зависимость с использованием квадратичного полинома (13), можно найти соотношения между коэффициентами полинома с точностью до общего множителя:

$$f_1^{(k)} = q_1 f_0^{(k)}; \quad (25)$$

$$f_2^{(k)} = q_2 f_0^{(k)}. \quad (26)$$

На практике при анализе изменения функции демпфирования при достаточном удалении от резонансной частоты может возникать неопределенность  $0/0$ . Тогда для устранения неопределенности целесообразно внести поправку  $\varepsilon$ , отличную от нуля. В таком случае вместо (24) используется выражение

$$f_{\Sigma}(\gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{A_{\text{max } i} \sin \Psi_i}{|A_i(\gamma) + \varepsilon|^m}. \quad (27)$$

Следовательно, для избранного тона колебаний функция демпфирования может быть достаточно просто определена на практике по АЧХ и ФЧХ либо по мнимой и действительной частям АЧХ.



**Итерационный подбор коэффициентов демпфирования.** При совместном рассмотрении  $n$  тонов колебаний АЧХ записываются так:

$$g_{i,j}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_i^{(k)} \varphi_j^{(k)}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (\gamma^2 f_2^{(k)} + \gamma f_1^{(k)} + f_0^{(k)})^2}}. \quad (28)$$

Здесь  $g_{i,j}(\gamma)$  — передаточная функция, которая определяет связь между откликом степени по  $i$ -й степени свободы и синусоидальным воздействием в направлении  $j$ -й степени свободы;  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  — значения форм колебаний для степеней свободы  $i$  и  $j$ ;  $k$  — номер тона колебаний;  $n$  — число тонов колебаний, учитываемых в рассматриваемом диапазоне частот.

Рассмотрим вклад произвольного  $k$ -го тона колебаний в суммарную передаточную функцию. На резонансной частоте коэффициент расстройки  $\gamma = 1$ , тогда значение передаточной функции определяется выражением:

$$g_k(\gamma_k) = \frac{\varphi_i^{(k)} \varphi_j^{(k)}}{(f_2^{(k)} + f_1^{(k)} + f_0^{(k)})}. \quad (29)$$

На произвольной нерезонансной частоте, соответствующей значению коэффициента расстройки  $\gamma_q$ , вклад  $k$ -го тона колебаний можно выразить через его значение на резонансной частоте (29):

$$g_k(\gamma_q) = \frac{(f_2^{(k)} + f_1^{(k)} + f_0^{(k)}) g_k(\gamma_k)}{\sqrt{(1-\gamma_q^2)^2 + (\gamma_q^2 f_2^{(k)} + \gamma_q f_1^{(k)} + f_0^{(k)})^2}}. \quad (30)$$

Если найдено соотношение между параметрами демпфирования (25), (26), то (30) можно переписать в виде

$$g_k(\gamma_q) = \frac{f_0^{(k)} (q_2^{(k)} + q_1^{(k)} + 1) g_k(\gamma_k)}{\sqrt{(1-\gamma_q^2)^2 + (\gamma_q^2 q_1^{(k)} + \gamma_q q_1^{(k)} + 1)^2 f_0^{(k)2}}}. \quad (31)$$

В выражении (31) для  $k$ -го тона колебаний неизвестен лишь параметр  $f_0^{(k)}$ , характеризующий его демпфирование. Подобрать для каждого тона этот параметр, необходимо добиться соответствия экспериментальной АЧХ суперпозиции  $g_\Sigma(\gamma_q)$  всех тонов колебаний, попавших в рассматриваемый частотный диапазон:

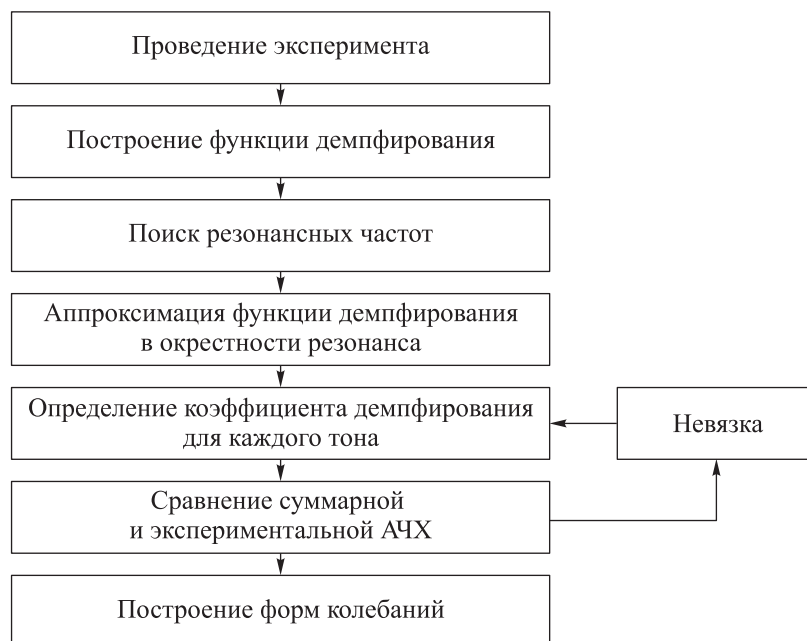
$$g_\Sigma(\gamma_q) = \sum_{k=1}^n g_k(\gamma_q). \quad (32)$$

Для учета вклада тонов колебаний, не вошедших в рассматриваемый диапазон частот, можно использовать следующую аппроксимацию для АЧХ [17]: тоны, имеющие более высокие частоты, учитываются в виде постоянного слагаемого (статическая поправка), более низкие тоны — в виде слагаемого, обратно пропорционального квадрату частоты.

Необходимо подобрать коэффициенты демпфирования так, чтобы полученная зависимость  $g_{\Sigma_0}(\gamma)$ , представляющая собой сумму всех определенных тонов колебаний и вклад высших тонов колебаний  $g_0$ , была максимально приближена к экспериментальной АЧХ:

$$g_{\Sigma_0}(\gamma) = g_{\Sigma}(\gamma) + g_0. \quad (33)$$

**Алгоритм реализации методики обработки результатов модальных испытаний.** Для реализации методики обработки данных написана программа NPOdemp. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1. Математическая модель АЧХ, которая используется при обработке результатов эксперимента, является нелинейной. Вследствие этого процедура идентификации ее параметров является итерационной. Алгоритм идентификации, примененный в настоящей работе, предполагает попеременное применение методов обработки экспериментальной кривой АЧХ как системы с одной степенью свободы (метод SDOF) и системы с многими степенями сво-



**Рис. 1.** Блок-схема алгоритма обработки результатов испытаний

боды (метод MDOF). Критерием сходимости является близость экспериментальной и расчетной АЧХ к идентифицированным параметрам. Подбор параметров проводится методом наименьших квадратов.

Рассмотрим подробнее последовательность операций алгоритма, реализованного в программе NPOdemr. После проведения экспериментального модального исследования конструкции выполняется обработка мнимой и действительной составляющих полученных АЧХ  $g_{\varepsilon}(\gamma)$ . Для этого по формуле (27) строится функция демпфирования по всем датчикам во всем рассматриваемом диапазоне частот. Это позволит выявить области частот, в которых возможны тоны колебаний конструкции, не проявившиеся или слабо проявившиеся в результате экспериментальных исследований. Косвенным признаком наличия пропущенных резонансов является появление пиков на графике функции демпфирования. Построение функции демпфирования может быть осуществлено для осредненных показаний нескольких датчиков либо для показаний датчика, на котором резонансы проявляются наилучшим образом.

В окрестности каждой резонансной частоты проводится аппроксимация функции демпфирования (24) квадратичным полиномом (13), в результате которого определяются коэффициенты  $q_1$  и  $q_2$ , характеризующие отношения между коэффициентами демпфирования  $f_1$ ,  $f_2$  с принимаемым основным коэффициентом  $f_0$ . Наличие нескольких коэффициентов демпфирования позволяет учитывать несимметричность экспериментальной АЧХ в окрестности резонанса.

Для определения численного значения коэффициентов демпфирования на первой итерации каждый тон колебаний последовательно рассматривается как система с одной степенью свободы. С помощью выражения (31) для каждого тона ( $k$ -й тон) с учетом значения амплитуды на резонансной частоте  $g_k(\gamma_k)$  и полученных коэффициентов  $q_1^{(k)}$  и  $q_2^{(k)}$  методом наименьших квадратов определяется коэффициент демпфирования  $f_0^{(k)}$ .

Для учета взаимного влияния тонов колебаний по формуле (32) строится суммарная АЧХ  $g_{\Sigma}(\gamma)$ , которая на первой итерации может существенно отличаться от экспериментальной  $g_{\varepsilon}(\gamma)$ . Суммарную аппроксимацию сравнивают с экспериментальной АЧХ с помощью FRAC-параметра [18, 19]:

$$FRAC_w(g_{\Sigma_0}, g_{\varepsilon}) = \frac{|g_{\Sigma_0}^T g_{\varepsilon}|^2}{(g_{\Sigma_0}^T g_{\Sigma_0})(g_{\varepsilon}^T g_{\varepsilon})}. \quad (34)$$

Здесь  $w$  — номер итерации. С каждой итерацией корреляция между исходной АЧХ и ее аппроксимацией должна увеличиваться. Условие прекращения цикла записывается в виде:

$$\left| \text{FRAC}_w(g_\Sigma, g_\Delta) - \text{FRAC}_{w-1}(g_\Sigma, g_\Delta) \right| \leq \varepsilon_{\text{FRAC}}, \quad (35)$$

где  $\varepsilon_{\text{FRAC}}$  характеризует заданную точность расчета.

На каждой последующей итерации пересчитывается амплитуда колебаний тона на его резонансной частоте  $g_k(\gamma_k = 1)$ , а также в ее окрестности (т. е. для  $\gamma_q \neq 1$ ). Пересчет обусловлен тем, что экспериментальная АЧХ на каждой частоте является суперпозицией всех тонов колебаний. Как следствие, для получения чистой АЧХ одного тона колебаний необходимо из значения экспериментальной АЧХ вычесть сумму вкладов других тонов колебаний  $g_{(\Sigma)i \neq k}$ , найденных на предыдущей итерации. Таким образом, для последующей подстановки в выражение (31) заново определяются значения чистой АЧХ одного тона на резонансной частоте (36) и в ее окрестности (37):

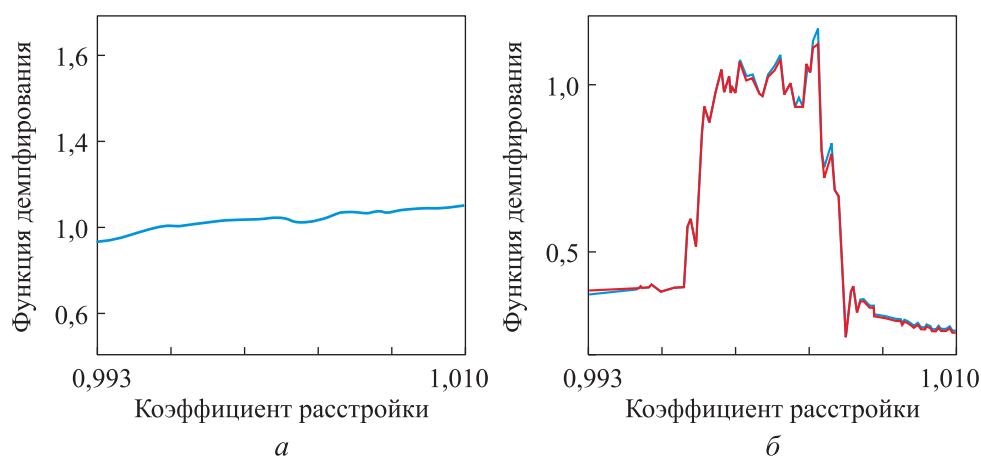
$$g_k(\gamma_k = 1) = g_\Delta(\gamma_k) - g_{(\Sigma)i \neq k}(\gamma_k); \quad (36)$$

$$g_k(\gamma_q) = g_\Delta(\gamma_q) - g_{(\Sigma)i \neq k}(\gamma_q). \quad (37)$$

После подстановки  $g_k(\gamma_k)$  и  $g_k(\gamma_q)$  в выражение (31) последовательно уточняются коэффициенты демпфирования  $f_0^{(k)}$ . Цикл повторяется, пока не будет выполнено условие (35).

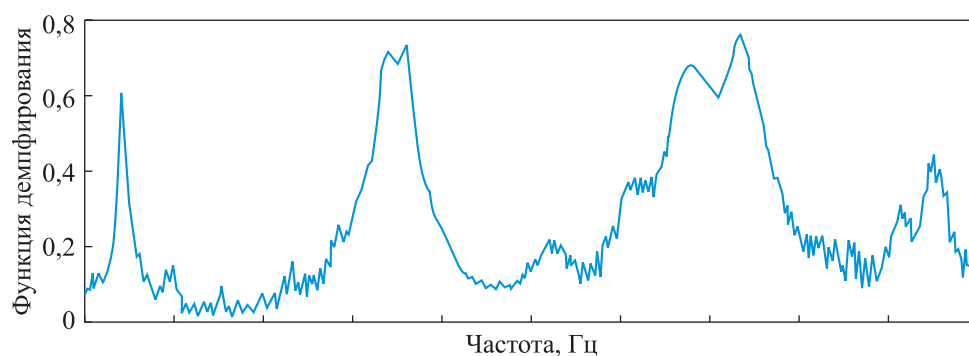
Практическое использование программы показало, что алгоритм работоспособен даже при необходимости разделения близких по частоте тонов колебаний.

**Примеры реализации методики обработки результатов модальных испытаний. Построение функции демпфирования.** *Пример 1.* Рассмотрим результаты построения функции демпфирования (безразмерная величина) в случае возникновения микросоударений, вызванных ослаблением болтового соединения. Функция демпфирования исходной балочной системы приведена на рис. 2, а. Видно, что демпфирование в окрестности резонанса почти постоянно и слабо зависит от частоты. Функция демпфирования этой же системы, но при возникновении люфта, появившегося при ослаблении болтового соединения, приведена на рис. 2, б. В таком случае люфт не повлиял на резонансную частоту, но снизил амплитуду колебаний. Увеличение рассеяния энергии во втором случае вызвано возникновением соударений в люфте, что хорошо зафиксировано на построенной функции демпфирования.



**Рис. 2.** Функции демпфирования конструкции до (а) и после (б) возникновения люфта

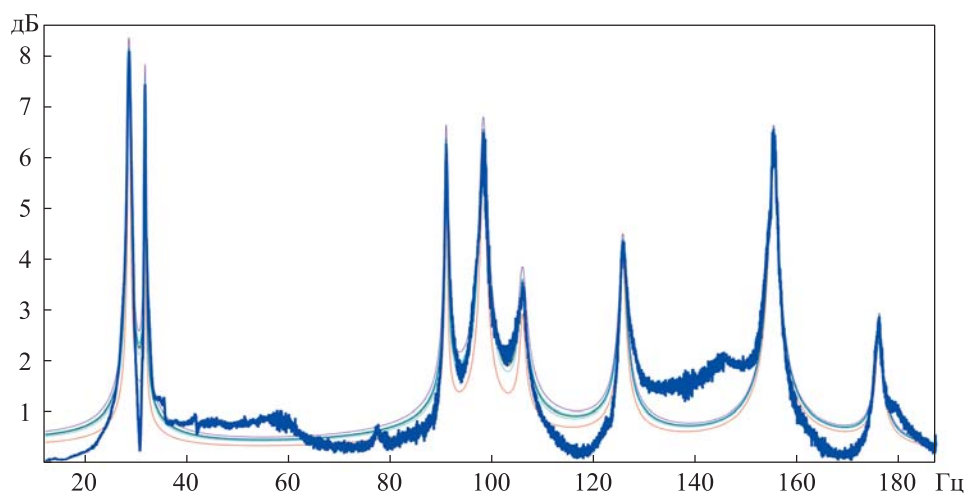
*Пример 2.* Продемонстрирована возможность использования функции демпфирования для поиска не проявившихся или слабо проявившихся на АЧХ тонов колебаний. На АЧХ, соответствующей функции демпфирования (рис. 3), в рассматриваемом частотном диапазоне имеются три тона



**Рис. 3.** Зависимость функции демпфирования от частоты при синфазной работе силовозбудителей

колебаний. Однако на графике функции демпфирования в конце рассматриваемого частотного диапазона наблюдается еще один пик. Он связан с изменением ФЧХ колебаний, но из-за близости нулю обобщенной силы, действующей для возбуждения данного тона колебаний, не проявился на АЧХ. При другом способе нагружения на частоте данного подъема обнаружен крутильный тон колебаний. Таким образом, функция демпфирования позволяет выявлять тоны колебаний, не проявившиеся на АЧХ.

*Пример 3.* Здесь АЧХ соответствует АЧХ трехслойной панели. Аппроксимация АЧХ велась итерационно по методике, предлагаемой в настоящей работе. Результаты итераций приведены на рис. 4, результаты сопоставления работы методики с другими методами — в таблице.



**Рис. 4.** Сравнение экспериментальной АЧХ с суммой аппроксимаций АЧХ отдельных тонов колебаний для первых 10 итераций цикла

#### Сравнение результатов определения коэффициентов демпфирования разными методами

Номер тона	Time MDOF*	Time MDOF**	PolyMAX*	PolyMAX**	P-P***	NPO****
1	1,79	1,81	1,62	3,40	1,66	1,65
2	0,35	0,59	0,46	0,43	0,69	0,53
3	1,12	0,57	0,54	0,47	1,65	0,55
4	0,82	1,42	1,36	1,86	2,65	1,35

\*Применение метода в узкой окрестности резонансной частоты.  
 \*\*Применение метода во всем частотном диапазоне.  
 \*\*\*Метод половинной мощности.  
 \*\*\*\*Результаты расчета по предложенной методике.

По значениям резонансных частот видно хорошее совпадение предлагаемой методики с существующими, коэффициенты демпфирования согласуются с учетом допустимой для этих параметров погрешности. Отмечены высокие погрешности методов PolyMAX при анализе в широком диапазоне частот и Time MDOF при анализе в окрестностях резонанса, что объясняется особенностями их применения. Метод половинной мощности дает высокую погрешность при наличии близких тонов колебаний.

**Выводы.** Приведен алгоритм обработки результатов модальных испытаний. Особенность алгоритма — представление демпфирования в виде функции от частоты, которая в окрестности резонансов аппроксимируется полиномом второй степени от частоты. Такое представление позволяет лучше аппроксимировать АЧХ и, как следствие, более точно определять резонансные частоты и декременты колебаний в случае существенного взаимного влияния тонов, а также ярко выраженной асимметрии пиков в окрестности резонансной частоты. Кроме того, появляется возможность выявления тонов колебаний, не проявивших или слабо проявивших себя на АЧХ. Такие тоны выявляются с помощью безразмерной функции демпфирования, зависящей как от амплитуды, так и от фазы колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хейлен В., Ламменс С., Сас П. Модальный анализ: теория и испытания. М., Новатест, 2010.
- [2] Бернс В.А., Жуков Е.П., Маринин Д.А. Построение матрицы демпфирования конструкции по результатам испытаний. *Решетневские чтения. Матер. 19 Междунар. науч.-практ. конф.* Т. 1. Красноярск, СибГАУ, 2015, с. 71–72. EDN: VBEKWV
- [3] Бернс В.А., Жуков Е.П., Маринин Д.А. Идентификация диссипативных свойств конструкций по результатам экспериментального модального анализа. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2016, № 4 (109), с. 4–23. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2016-4-4-23>
- [4] Галкин М.С., Григорьев Б.В. Аппроксимация частотных характеристик на основе идентификации с комплексной матрицей масс. *Ученые записки ЦАГИ*, 1989, т. 20, № 2, с. 45–51. EDN: MQIIFP
- [5] Галкин М.С., Григорьев Б.В. Способ определения динамических характеристик для систем с близкими собственными частотами. *Ученые записки ЦАГИ*, 1989, т. 20, № 2, с. 98–100. EDN: MQIJB
- [6] Peeters B., Van der Auweraer H., Guillaume P., et al. The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation. *J. Shock Vib.*, 2004, vol. 11, no. 3-4, pp. 395–409. DOI: <https://doi.org/10.1155/2004/523692>
- [7] Peeters B., Van der Auweraer H. PolyMAX: a revolution in operational modal analysis. *1st Int. Operational Modal Analysis Conf.*, 2005, pp. 26–27.
- [8] Nikolaev S., Voronov S., Kiselev I. Estimation of damping model correctness using experimental modal analysis. *Vibroengineering Procedia*, 2014, vol. 3, pp. 50–55.
- [9] Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Госстройиздат, 1960.
- [10] Иориш Ю.И. Виброметрия. М., МАШГИЗ, 1963.



- [11] Fearnow D.O. Investigation of the structural damping of a full scale airplane wing. Technical note 2594. Washington, NASA, 1952.
- [12] Fellowes A., Wilson T., Kemble G., et al. Wing box nonlinear structural damping. *Proc. IFASD 2011*. London, Royal Aeronautical Society, 2011, 20 p.
- [13] Gao G., Zhu L. Nonlinearity of mechanical damping and stiffness of a spring-suspended sectional model system for wind tunnel tests. *J. Sound Vib.*, 2015, vol. 355, pp. 369–391. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.033>
- [14] Шакиров Ф.М. Влияние релаксационного механизма гистерезисного демпфирования на динамику колебательных систем. *Проблемы и перспективы развития двигателестроения*, 1999, № 3-2, с. 20–27.
- [15] Meskell C. A decrement method for quantifying nonlinear and linear damping parameters. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 296, no. 3, pp. 643–649. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.02.005>
- [16] Мун Ф. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. М., Мир, 1990.
- [17] Дмитриев С.Н., Хамидуллин Р.К. Уточненная формула для вычисления коэффициентов передаточной матрицы в задачах динамики. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 3. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/543198.html>
- [18] Allemang R.J. The modal assurance criterion — twenty years of use and abuse. *Sound and Vibration*, 2003, pp. 14–21.
- [19] Allemang R.J., Brown D.L. Autonomous modal parameter estimation: methodology. *Proc. IMAC*, 2011, pp. 2457–2464.

**Дмитриев Сергей Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Хамидуллин Руслан Камилевич** — старший преподаватель кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); начальник научно-исследовательского сектора АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143960, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Дмитриев С.Н., Хамидуллин Р.К. Обработка результатов модальных испытаний с учетом нелинейной зависимости демпфирования от частоты колебаний. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2024, № 2 (149), с. 63–81.

EDN: NGEVCP

## PROCESSING THE MODAL TEST RESULTS TAKING INTO CONSIDERATION THE DAMPING NONLINEAR DEPENDENCE ON THE OSCILLATION FREQUENCY

S.N. Dmitriev<sup>1</sup>

dmitrievsn@bmstu.ru

R.K. Khamidullin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> JSC "MIC "NPO Mashinostroyenia", Reutov, Moscow Region, Russian Federation

---

### Abstract

The paper proposes a technique for processing the modal testing results; it is based on the damping representation in the resonant peaks vicinity as a function of the oscillation frequency. This approach is used to improve quality in the modal parameters identification of systems with the nonlinearity manifestation. The technique makes it possible to account for alterations in damping in the resonant peaks vicinity (mainly arising due to the damping dependence on the oscillation amplitude), as well as for the peaks' significant asymmetry (usually associated with manifestation of the hysteresis with the decreasing or increasing oscillation frequencies). Processing based on the experimentally obtained amplitude-frequency and phase-frequency characteristics allows constructing a damping function that characterizes alteration in damping in the structure depending on the oscillation frequency. The damping function is approximated in the resonant peaks vicinity by the second-degree polynomial to determine relationship between the polynomial coefficients. Then, the least squares method is used to select the iterative damping coefficient for each oscillation tone taking into account the tones' mutual influence. The technique is implemented in the MATLAB environment. Verification was carried out by comparing the processing results with the results obtained using the PolyMAX, Time MDOF and Half Power methods

### Keywords

*Modal analysis, oscillation testing, nonlinear damping, oscillation damping, transfer function*

Received 15.03.2024

Accepted 23.04.2024

© Author(s), 2024

---

### REFERENCES

- [1] Heylen W., Lammens S., Sas P. Modal analysis theory and testing. Leuven, Katholieke Universiteit Leuven, 1998.

- [2] Berns V.A., Zhukov E.P., Marinin D.A. [Structural damping matrix of construction according to test results]. *Reshetnevskie chteniya. Mater. 19 Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* T. 1 [Reshetnev Readings. Proc. 19 Int. Sc.-Pract. Conf. Vol. 1]. Krasnoyarsk, SibSAU Publ., 2015, pp. 71–72 (in Russ.). EDN: VBEKWV
- [3] Berns V.A., Zhukov E.P., Marinin D.A. Identification of the structures dissipative properties according to the experimental modal analysis results. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2016, no. 4 (109), pp. 4–23 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2016-4-4-23>
- [4] Galkin M.S., Grigoryev B.V. Approximation of frequency characteristics based on identification with a complex mass matrix. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1989, vol. 20, no. 2, pp. 45–51 (in Russ.). EDN: MQIIFP
- [5] Galkin M.S., Grigoryev B.V. A method for determining dynamic characteristics for systems with close natural frequencies. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1989, vol. 20, no. 2, pp. 98–100 (in Russ.). EDN: MQIIB
- [6] Peeters B., Van der Auweraer H., Guillaume P., et al. The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation. *J. Shock Vib.*, 2004, vol. 11, no. 3-4, pp. 395–409. DOI: <https://doi.org/10.1155/2004/523692>
- [7] Peeters B., Van der Auweraer H. Polymax: a revolution in operational modal analysis. *1st Int. Operational Modal Analysis Conf.*, 2005, pp. 26–27.
- [8] Nikolaev S., Voronov S., Kiselev I. Estimation of damping model correctness using experimental modal analysis. *Vibroengineering Procedia*, 2014, vol. 3, pp. 50–55.
- [9] Sorokin E.S. K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh system [On theory of internal friction during vibrations of elastic systems]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1960.
- [10] Iorish Yu.I. Vibrometriya [Vibrometry]. Moscow, MASHGIZ Publ., 1963.
- [11] Fearnow D.O. Investigation of the structural damping of a full scale airplane wing. Technical note 2594. Washington, NASA, 1952.
- [12] Fellowes A., Wilson T., Kemble G., et al. Wing box nonlinear structural damping. *Proc. IFASD*. Royal Aeronautical Society, 2011, 20 p.
- [13] Gao G., Zhu L. Nonlinearity of mechanical damping and stiffness of a spring-suspended sectional model system for wind tunnel tests. *J. Sound Vib.*, 2015, vol. 355, pp. 369–391. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.05.033>
- [14] Shakirov F.M. Effect of relaxation mechanism of hysteresis damping on oscillatory systems dynamics. *Problemy i perspektivy razvitiya dvigatelestroeniya*, 1999, no. 3-2, pp. 20–27 (in Russ.).
- [15] Meskell C. A decrement method for quantifying nonlinear and linear damping parameters. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 296, no. 3, pp. 643–649. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.02.005>
- [16] Moon F.C. Chaotic vibrations. An introduction for applied scientists and engineers. Hoboken, Wiley-VCH, 2004.

- [17] Dmitriev S.N., Khamidullin R.K. Improved formula for calculating coefficients of transfer matrix in statistical dynamics problems. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication], 2013, no. 3 (in Russ.). Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/543198.html>
- [18] Allemang R.J. The modal assurance criterion — twenty years of use and abuse. *J. Sound Vib.*, 2003, pp. 14–21.
- [19] Allemang R.J., Brown D.L. Autonomous modal parameter estimation: methodology. *Proc. IMAC*, 2011, pp. 2457–2464.

**Dmitriev S.N.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Khamidullin R.K.** — Senior Lecturer, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Head of the Research Sector, JSC “MIC “NPO Mashinostroyeniya” (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143960 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Dmitriev S.N., Khamidullin R.K. Processing of modal test results taking into consideration the damping nonlinear dependence on the oscillation frequency. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2024, no. 2 (149), pp. 63–81 (in Russ.). EDN: NGEVCP