

## ОБ АВТОРСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЯТНИКА ЧЕЛОМЕЯ

В.А. Грибков<sup>1</sup>

[gribkovva@bmstu.ru](mailto:gribkovva@bmstu.ru)

Я.Д. Гордин<sup>2</sup>

[yaroslav.gordin@gmail.com](mailto:yaroslav.gordin@gmail.com)

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> ООО «РПК», Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Маятник Челомя — именной маятник, найденный опытным путем академиком В.Н. Челомеем в 1983 г. Исследованием системы после смерти В.Н. Челомя (1984) занимался его сын, профессор С.В. Челомай. Им опубликованы три работы по маятнику Челомя, в которых использованы уравнения движения маятника из трудов академика В.Н. Челомя. Выполнен анализ указанных работ С.В. Челомя, в первую очередь, анализ результатов расчетов, полученных с использованием авторской математической модели маятника с заданными значениями параметров маятников и параметров возбуждения. Проанализированы динамика и устойчивость движения маятника Челомя с шестью конкретными вариантами параметров. Получены результаты, качественно отличающиеся от опубликованных. Обнаружено, что при публикации были искажены значения параметров системы и параметров возбуждения. Восстановлены и впервые приводятся истинные значения параметров, полученные С.В. Челомеем. Показано, что найденное С.В. Челомеем в авторской модели положение относительного равновесия ползуна на стержне действительно возможно. Раскрыт неописанный в литературе физический механизм, обеспечивающий подъем ползуна по стержню и его зависание в авторской математической модели маятника Челомя. Достоверность выводов подтверждена результатами расчетов и опытов на установке с оригинальным возбудителем колебаний

### Ключевые слова

*Маятник Челомя, обращенный маятник, параметрическое возбуждение, стабилизация, устойчивость*

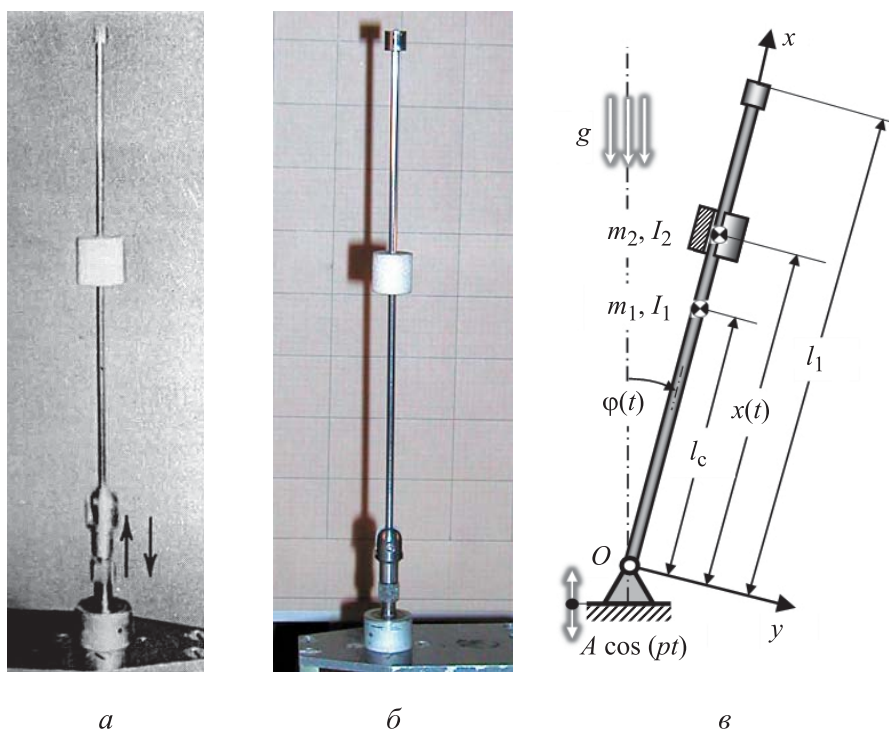
Поступила 27.04.2024

Принята 14.05.2024

© Автор(ы), 2024

**Введение.** Маятник Челомея — именной маятник, представленный академиком В.Н. Челомеем в известной публикации 1983 г. [1], продублированной в двух англоязычных периодических научных изданиях [2, 3].

*Объект исследований в экспериментах академика В.Н. Челомея.* Маятник Челомея (рис. 1) — механическая система, состоящая из двух элементов: небольшого стержня и осесимметричного тела (ползуна), свободно скользящего вдоль стержня. Стержень — прямолинейный, круглого сечения, металлический, с цилиндрическим металлическим ограничителем хода ползуна. Нижний конец стержня опирается на шарнирный узел, ось которого закреплена в двух миниатюрных шариковых подшипниках. Ползун — тело цилиндрической формы (прямой круговой цилиндр из пенопласта) со сквозным отверстием по оси симметрии.



**Рис. 1.** Маятник-демонстратор Челомея на возбудителе колебаний:  
*a* — в стабилизированном обращенном положении из [1];  
*б* — при испытаниях в настоящей работе; *в* — расчетная схема маятника

Маятник Челомея в поле сил тяжести неустойчив, как и любой обращенный (перевернутый) маятник. Однако если с помощью вибровозбудителя задать оси шарнирного узла маятника колебательное гармоническое движение в вертикальном направлении, то при определенных пара-

метрах вибрации стержень в обращенном положении становится устойчивым. Ползун поднимается по стержню и занимает на нем некоторое стабильное положение (зависает).

Все опубликованные академиком В.Н. Челомеем результаты получены опытным путем на материальных физических моделях [1]. Результаты опытов (устойчивые положения маятника, наблюдаемые в экспериментах) показаны на фотографиях. Приведены и уравнения движения маятника (авторская математическая модель). Однако объяснение физического механизма, вызывающего подъем и зависание ползуна на обращенном стабилизированном вибрацией стержневом маятнике, не приведено.

В настоящей работе будем называть статьями С.В. Челомея три публикации: две написаны в соавторстве с коллегами А.М. Курбатовым, А.В. Хромушкиным [4] и С.В. Куликом, А.В. Хромушкиным [5] и одна — персональная [6], вышла после смерти С.В. Челомея (1999). Профессор С.В. Челомей был инициатором и главным действующим лицом этих исследований.

*О результатах исследования системы «маятник Челомея» (1983–2024).* Маятнику Челомея, кроме С.В. Челомея [4–6], посвятили труды отечественные и зарубежные ученые: А.И. Меняйлов, А.В. Мовчан [7], И.И. Блехман, О.З. Малахова [8], А.В. Киргетов [9], Дж.Дж. Томсен, Д.М. Черняк [10], Дж.Дж. Томсен [11], А.М. Гуськов, Е.В. Мяло, Г.Я. Пановко [12] и другие (см. [13–21]). Однако до настоящего времени экспериментальные результаты опытов академика В.Н. Челомея с маятником не получили должного теоретического обоснования. Физический механизм, лежащий в основе наблюдаемого эффекта, не выявлен, вызывает сомнение и адекватность авторской математической модели, также не удалось повторить опыты В.Н. Челомея. В частности, известные британские ученые М.П. Кармелл, Д.И. Фоухенд [15] отмечали, что результаты В.Н. Челомея «...не подтверждены ни теоретически, ни экспериментально...».

Особой критике подвергалась авторская система уравнений В.Н. Челомея, приведенная в [1]. На необходимость обязательной корректировки этой системы указывали многие, отмечая, в частности, что без введения горизонтальной компоненты вибрационного возбуждения получить эффект, описанный В.Н. Челомеем, невозможно.

Только академик В.Н. Челомей и профессор С.В. Челомей считали, что авторская математическая модель системы «маятник Челомея» [1] адекватна маятникам-демонстраторам, использованным в опытах В.Н. Челомея.

*Цель и задачи настоящей работы* — теоретически и экспериментально проверить существование эффекта, описанного академиком В.Н. Челомеем [1], проанализировать результаты опытов С.В. Челомея [4–6] для выявления физического механизма, обеспечивающего подъем и зависание ползуна на стержне в авторской модели маятника, проверить адекватность авторской математической модели маятника объектам испытаний — маятникам-демонстраторам.

*Допущения.* Авторские уравнения движения маятника получены академиком В.Н. Челомеем при следующих допущениях:

- подвижные сегменты маятника (стержневой элемент и ползун) — абсолютно жесткие однородные твердые тела;
- трение в шарнире и паре стержень–ползун вязкое, колебания в системе плоские, возбуждение вертикальное, однокомпонентное, гармоническое;
- система имеет две степени свободы.

В уравнениях движения маятника учитывались инертные параметры (масса и момент инерции) стержня, а также масса и момент инерции ползуна. Однако при расчетах центральный момент инерции ползуна полагался равным нулю. Принимались во внимание только масса и момент инерции, создаваемый ползуном как точечной массой относительно оси подвеса маятника. Масса ограничителя хода ползуна (см. рис. 1) не учитывалась.

Вибрация, подводимая к маятнику, вертикальная, гармоническая, высокочастотная с малой амплитудой колебаний. Амплитуда возбуждения мала по сравнению с характерной (приведенной) длиной стержневой части маятника  $A/l \ll 1$ . Частота параметрического возбуждения велика по сравнению с собственной частотой колебаний этого маятника при покоящемся подвесе.

*Авторские уравнения движения маятника Челомея (первая математическая модель маятника).* Уравнения Лагранжа второго рода при сделанных допущениях приводят к авторским уравнениям движения маятника Челомея:

$$\begin{aligned} & (I_1 + I_2 + m_2 x^2) \ddot{\varphi} + 2m_2 x \dot{x} \dot{\varphi} + k_1 \dot{\varphi} - \\ & - (m_1 l_c + m_2 x) (g - A p^2 \cos(pt)) \sin \varphi = 0; \\ & \ddot{x} - x \dot{\varphi}^2 + k_2 \dot{x} + (g - A p^2 \cos(pt)) \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Математическая модель (1) предложена академиком В.Н. Челомеем в [1] и использована профессором С.В. Челомеем в [4–6] фактически без изменений (исправлена опечатка).

При выводе уравнений движения маятника Челомея использованы следующие обозначения параметров расчетной схемы (см. рис. 1, в):  $m_1, m_2$  — массы стержневого элемента и ползуна;  $I_1, I_2$  — момент инерции стержня относительно оси вращения шарнира и центральный момент инерции ползуна;  $l_1$  — длина стержневого элемента (расстояние от оси подвеса маятника (оси шарнира) до конца стержня);  $l_c$  — расстояние от оси подвеса стержня до центра масс стержня;  $\varphi$  — текущая угловая обобщенная координата отклонения (поворота) стержневого элемента маятника относительно вертикали;  $x$  — текущая координата поступательного перемещения ползуна вдоль стержня относительно шарнирного узла;  $A$  — амплитуда параметрического возбуждения (амплитуда перемещений по вертикали оси шарнирного узла);  $p, \omega$  — круговые частоты параметрического возбуждения и медленного движения;  $t, \tau$  — медленное и быстрое время;  $g$  — ускорение свободного падения;  $k_1\dot{\varphi}$  — момент трения стержня относительно оси подвеса, возникающий при движении стержня (с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ );  $k_1, k_2^0$  — коэффициенты вязкого сопротивления в шарнире и в паре стержень–ползун;  $k_2 = k_2^0 / m_2$  — удвоенный коэффициент демпфирования для пары стержень–ползун;  $k_2\dot{x}$  — сила вязкого трения ползуна о стержень, отнесенная к массе ползуна.

Авторская модель (1) является одной из нескольких математических моделей, использованных в публикациях по маятнику Челомея [1–21]. Фактически эти модели описывают не маятник Челомея, а квазимаятники Челомея. Маятник Челомея с его оригинальным физическим механизмом — один, а квазимаятников с их различными физическими механизмами, отличающимися от оригинального маятника Челомея, — несколько.

Уравнения первого и второго приближений асимптотического метода с усреднением (вторая и третья математические модели маятника). Наряду с авторской системой уравнений движения маятника (1) в настоящей работе использована система уравнений медленного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 = & -\alpha_1\dot{\xi}_1 - \alpha_2 \cos \xi_2 + \xi_1 \dot{\xi}_2 + \frac{1}{2} \xi_1 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1)^2 \sin^2 \xi_2 - \\ & - \frac{1}{2} \alpha_3 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1) \sin^2 \xi_2 + \underline{\varepsilon \beta \alpha_4 \xi_1^2 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1)} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2} \alpha_3 - \xi_1 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1) \right] \sin^2 \xi_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_2 = & -\alpha_5 \xi_1 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + (\alpha_7 + \alpha_8 \xi_1) \sin \xi_2 - \alpha_6 \dot{\xi}_2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \alpha_3 \alpha_5 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1) \xi_1 + \alpha_3 \alpha_{10} - (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1)^2 \right] \cos \xi_2 \sin \xi_2 + \\ & + \varepsilon \beta \alpha_4 \xi_1 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1) \left[ \frac{1}{2} \xi_1 (\alpha_9 + \alpha_{10} \xi_1) - \alpha_3 - \alpha_3 \alpha_5 \xi_1^2 \right] \cos \xi_2 \sin \xi_2. \end{aligned}$$

Уравнения медленного движения (2) получены как первое и второе приближения асимптотического метода с усреднением по быстрому времени [18, 22]. Три варианта уравнений приведены в [4–6]. Уравнения в окончательном (чистовом) виде для двух приближений (первого и второго) сохранились в архиве Госкомитета Совета министров СССР по делам изобретений и открытий (далее Госкомитет). Они содержатся в материалах переписки С.В. Челомея с Госкомитетом. Уравнения (2) публикуются впервые.

Уравнения получены С.В. Челомеем в предположении, что амплитуда задаваемой вертикальной вибрации мала по сравнению с приведенной длиной стержня, а частота возбуждения велика по сравнению с собственной частотой колебаний маятника.

В автономные уравнения (2) не входит в явном виде время, но входит малый параметр и присутствует разложение в ряд по малому параметру. В (2)  $\xi_1(t)$  — функция медленного углового движения стержневого элемента маятника по угловой координате  $\varphi(t, \tau)$ ;  $\xi_2(t)$  — функция медленного поступательного перемещения ползуна вдоль стержня маятника по координате  $x$  (рис. 1, в).

Члены, входящие только во второе приближение (подчеркнуты в (2)), имеют множитель  $\beta$ . Первое приближение получаем, положив  $\beta = 0$ . Для второго приближения связь между  $x(\tau, t)$ ,  $\xi_1(t)$ ,  $\varphi(\tau, t)$ ,  $\xi_2(t)$ ,  $u_{11}(\tau, t)$ ,  $u_{21}(\tau, t)$ ,  $u_{12}(\tau, t)$ ,  $u_{22}(\tau, t)$ ,  $p$  и  $\beta$  выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} x(\tau, t) = & \xi_1(t) + \frac{1}{p} u_{11}(\tau, t) + \beta \frac{1}{p^2} u_{21}(\tau, t); \\ \varphi(\tau, t) = & \xi_2(t) + \frac{1}{p} u_{12}(\tau, t) + \beta \frac{1}{p^2} u_{22}(\tau, t). \end{aligned}$$

Здесь  $\frac{1}{p} u_{11}(\tau, t)$ ,  $\frac{1}{p} u_{12}(\tau, t)$ ,  $\beta \frac{1}{p^2} u_{21}(\tau, t)$ ,  $\beta \frac{1}{p^2} u_{22}(\tau, t)$  — члены, описывающие быстрое движение, причем:

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= -\alpha_3 \cos \tau \cos \xi_2; \\
 u_{12} &= (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \cos \tau \sin \xi_2; \\
 u_{21} &= -\left[ 2\alpha_3\dot{\xi}_2 \sin \xi_2 - \alpha_1\alpha_3 \cos \xi_2 - 2\xi_1\dot{\xi}_2 (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \sin \xi_2 \right] \sin \tau + \\
 &\quad + \frac{1}{8} (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \left[ \xi_1 (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) + \alpha_3 \right] \sin^2 \xi_2 \cos 2\tau; \\
 u_{22} &= -\alpha_4\xi_1^2 (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \sin \xi_2 \cos \tau - \\
 &\quad - \left\{ -\alpha_5\xi_1 \left[ \alpha_3 \dot{\xi}_2 \cos \xi_2 - (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \dot{\xi}_1 \sin \xi_2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha_6 (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \sin \xi_2 + 2 \left[ \alpha_{10} \dot{\xi}_1 \sin \xi_2 + (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \dot{\xi}_2 \cos \xi_2 \right] \right\} \sin \tau - \\
 &\quad - \frac{1}{8} \left[ -\alpha_3\alpha_5 (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1) \xi_1 + \alpha_3\alpha_{10} - (\alpha_9 + \alpha_{10}\xi_1)^2 \right] \sin \xi_2 \cos \xi_2 \cos 2\tau; \\
 \tau &= pt; \quad \varepsilon = \frac{1}{p}; \quad \alpha_1 = \frac{k_2}{m_2}; \quad \alpha_2 = g; \quad \alpha_3 = Ap; \quad \alpha_4 = \frac{m_2}{\varepsilon(I_0 + I_1)}; \\
 \alpha_5 &= \frac{2m_2}{I_0 + I_1}; \quad \alpha_6 = \frac{k_1}{I_0 + I_1}; \quad \alpha_7 = \frac{m_1 l_c g}{I_0 + I_1}; \quad \alpha_8 = \frac{m_2 g}{I_0 + I_1}; \\
 \alpha_9 &= \frac{m_1 l_c Ap}{I_0 + I_1}; \quad \alpha_{10} = \frac{m_2 Ap}{I_0 + I_1}; \quad l_c = \frac{l_1}{2}.
 \end{aligned}$$

Процедура усреднения подразумевает интегрирование по периоду  $T$  быстрого движения с делением результата интегрирования на период быстрого движения  $T$ :

$$\begin{aligned}
 x_{\text{уср}} = \xi_1(t) &= \langle x(\dots) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(\dots) d\tau; \quad T = \frac{2\pi}{p}; \\
 \langle u_{ij}(t, \tau, \xi_1, \xi_2) \rangle &= 0, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

*Метод решения задачи динамического равновесия ползуна на стержне.* В трех публикациях [4–6] С.В. Челомей использовал уравнения медленного движения второго приближения (2) и параллельно — отредактированные авторские уравнения движения маятника (1) из [1].

Результаты расчетов получены С.В. Челомеем численным интегрированием систем уравнений (1) или (2).

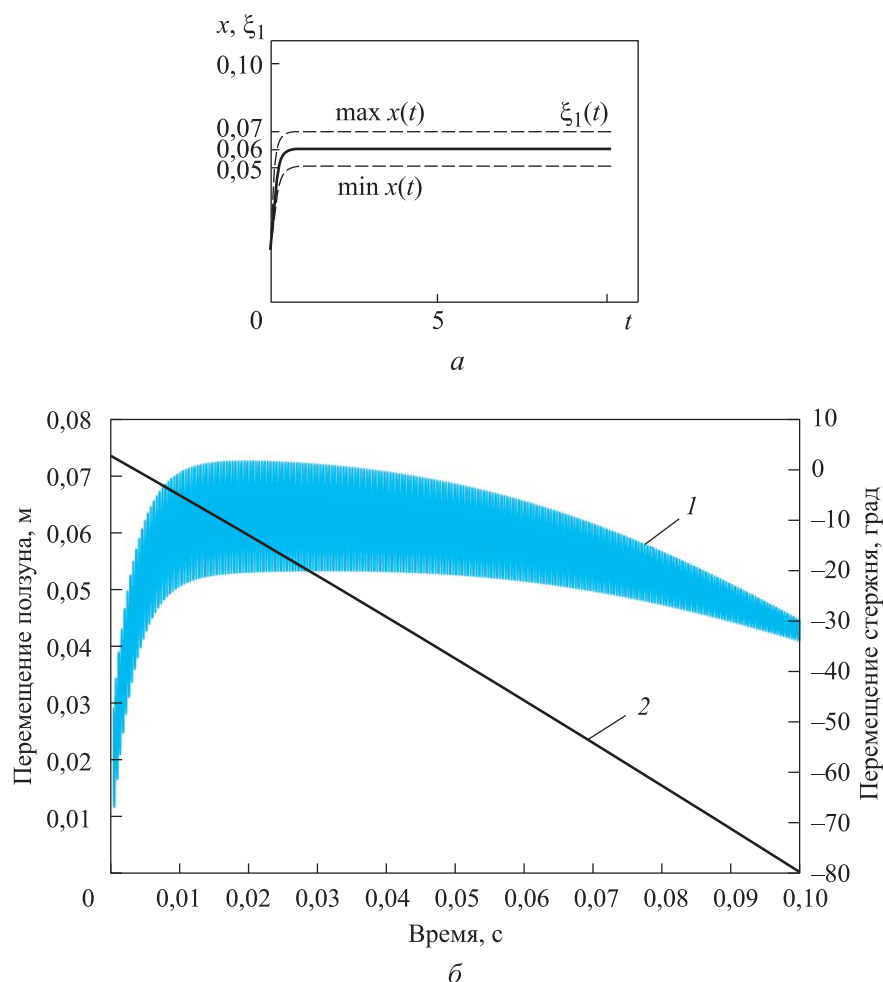
*Критический анализ материалов С.В. Челомея.* Некоторые значения параметров маятников и параметров возбуждения в [4–6] кажутся нереальными, вызывают вопросы. Отметим следующее.

Заявленная масса ползуна составляет всего 0,4 мг. Стальной однородный цилиндрический стержневой элемент маятника имеет массу 40 мг при длине 100 мм (диаметр стержня в этом случае должен быть равен



0,254 мм). В перечне параметров системы [4] частота возбуждения  $p$  указана в герцах (2364 Гц), а в уравнениях движения (1) — в рад/с. Возможность выполнения экспериментальных исследований на маятниках с элементами массой 0,4 и 40 мг при амплитуде подводимого виброускорения  $\sim 220\,000$  g вызывает сомнение. Как определяли параметры трения в шарнирном узле и паре стержень–ползун маятника-демонстратора и как задавали начальные условия в эксперименте [6] — не указано.

Копия графика из [4] приведена на рис. 2, а, на рис. 2, б — повтор результатов расчета в настоящей работе с параметрами из [4]. Наблюдается радикальное расхождение результатов, не только количественное,



**Рис 2.** Расхождение результатов расчетов С.В. Челомея и расчетов, выполненных в настоящей работе:

а — копия графика из [4]; б — результаты расчета процесса перемещений ползуна 1 и стержня 2 во времени по уравнению (1)



но и качественное. Стержень падает, перемещаясь от заданного начального положения. Ползун после подъема, обеспеченного начальным условием по скорости, спускается по стержню.

*Значения параметров объекта исследования и параметров возбуждения.* Обращение к архиву Госкомитета позволило восстановить истинные параметры системы и параметры вибровоздействия. Численные значения параметров в основном совпали с опубликованными в [4–6], однако единицы измерений у них другие. В расчетах С.В. Челомей использовал основные единицы измерений: килограмм-сила, сантиметр, секунда, а в статьях приведены параметры в единицах СИ. При этом перевод в единицы СИ в [4–6] не выполнялся. Числовым данным с принятыми С.В. Челомеем единицами измерений были приписаны единицы системы СИ без пересчета параметров. Именно по этой причине повторение расчетов [4–6] приводило к результатам, радикально отличающимся от опубликованных.

Приведем истинные, неискаженные параметры маятника и параметры возбуждения в единицах СИ (публикуются впервые):  $m_1 = 0,03924$  кг;  $m_2 = 0,0003924$  кг;  $l_1 = 0,1$  м (или 0,15 м);  $l_c = l_1 / 2$ ;  $I_1 = m_1 l_1^2 / 3 = 1,308 \cdot 10^{-4}$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_2 = 0$ ;  $k_1 = 1,305 \cdot 10^{-6}$  (кг · м<sup>2</sup>)/с;  $k_2^0 = 0,11772$  кг/с;  $k_2 = 300$  с<sup>-1</sup> (или 100, или 50 с<sup>-1</sup>);  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $A = 0,01$  м;  $p = 2364,1$  рад/с (376,3 Гц).

Начальные условия:  $x(0) = 0,0063$  м;  $\dot{x}(0) = 17$  м/с;  $\varphi(0) = 0,04799$  рад (2,75 град);  $\dot{\varphi}(0) = -13,96$  рад/с (799,9 град/с).

Именно для этих параметров системы, параметров возбуждения и начальных условий С.В. Челомей получил в [4–6] режим зависания ползуна по авторской математической модели (1) и уравнениям медленного движения (2). Результаты расчетов в [4–6] приведены в виде рисунков и таблиц. В настоящей работе часть этих результатов из [6] дублируется в таблице.

В верхней части таблицы приведены результаты расчетов для шести вариантов параметров маятника (с коэффициентами демпфирования  $k_2$  и отличающимися длинами стержневых элементов  $l_1$ ). Седьмой вариант (из архива Госкомитета) приведен в строке 8 таблицы.

В строке 1 таблицы приведены результаты, полученные С.В. Челомеем в [6] для варианта 1-1. В строке 7 (вариант 1-4) показаны результаты настоящей работы. Отметим достаточно хорошее совпадение результатов. Наибольшее расхождение получено для удвоенного коэффициента демпфирования  $k_2$ .

**Результаты расчетов режима зависания ползуна на стержне**

№ п/п	Вариант	$k_2, \text{с}^{-1}$	$x^{(1)}, \text{м}$	$\xi_1^{(2)}(t), \text{м}$	$x_3, \text{м}$	$A^{(1)}, \text{рад}$	$A^{(2)}, \text{рад}$	$A_3, \text{рад}$	$\omega^{(1)}, \text{рад/с}$	$\omega^{(2)}, \text{рад/с}$	$\omega_3, \text{рад/с}$
$l_1 = 0,1 \text{ м (из [6])}$											
1	1-1	300	0,062	0,063	0,061	0,073	0,073	0,073	248,76	246,0	245
2	1-2	100	0,074	0,078	0,079	0,116	0,113	0,115	132,16	128,5	136
3	1-3	50	0,081	0,089	0,090	0,142	0,129	0,150	98,350	79,50	118
$l_1 = 0,15 \text{ м (из [6])}$											
4	2-4	300	0,083	0,089	0,090	0,094	0,089	0,085	309,82	301	300,0
5	2-5	100	0,105	0,111	0,115	0,119	0,112	0,112	145,16	136	146,0
6	2-6	50	0,126	0,134	0,130	0,126	0,123	0,130	84,160	79	82,50
$l_1 = 0,1 \text{ м (проверка [6], выполненная в настоящей работе)}$											
7	1-4	325 (7,7 %)	0,058 (6,7 %)	-	-	0,075 (2,7 %)	-	-	251,3 (1,9 %)	-	-
8	1-5	300	0,0635	0,062	-	0,075	0,074	-	248	248,76	-

$l_1 = 0,1 \text{ м (из архива Госкомитета)}$

*Примечание.* Индексы (1) и (2) — результат интегрирования авторских уравнений (1) и интегрирование уравнений медленного движения (2); индекс «э» — результат эксперимента.

В работах С.В. Челомея  $k_2 = 300 \text{ с}^{-1}$ , а по результатам расчетов в настоящей работе коэффициент оказался равным  $325 \text{ с}^{-1}$  (разность 7,7 %). Координата положения относительного равновесия ползуна в [6]  $x = 0,062 \text{ м}$ , в настоящей работе  $x = 0,058 \text{ м}$ . Расхождение составляет менее 7 %. Таким образом, С.В. Челомеем продемонстрирована принципиальная возможность существования стационарного режима зависания ползуна, как при использовании авторской математической модели маятника Челомея (1), так и при переходе к уравнениям медленного движения (2).

*Объяснение эффектов подъема и зависания ползуна на стержне, реализуемых в системе С.В. Челомея [4–6] (четвертая математическая модель маятника).* Перечислим причины, вызывающие подъем и зависание ползуна на стержне (в [4–6] они не указаны).

Поступательное перемещение ползуна в точку зависания объясняется задаваемым начальным условием по скорости. Начальная скорость ползуна обеспечивает его подъем по стержню в поле сил тяжести (с учетом трения) до некоторой точки — точки зависания. В этой точке ползун при задаваемой в начальных условиях скорости угловых медленных колебаний стержня (быстрые колебания не учитываются) будет находиться в положении относительного равновесия, которое обеспечивается действием центробежной усредненной силы инерции, уравновешивающей вес ползуна.

Для режима колебаний стержня с почти неизменной амплитудой в пределах некоторого промежутка времени трение в шарнире маятника задается малым. Параметры системы выбираются таким образом, чтобы исключить влияние ползуна на движение стержня: массы ползуна и стержня отличаются на два порядка, моментом инерции ползуна при расчетах пренебрегают. Колебания стержня по угловой координате считаются малыми. Тогда из второго уравнения системы (1) получим уравнение баланса сил, действующих на ползун на периоде медленного движения  $T_M$  при угловых колебаниях стержня с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\xi_{1,0}$ :

$$m_2 g = m_2 \xi_{2,e} \dot{\xi}_{1,e}^2 \quad \text{при} \quad \xi_{1,e}(t) = \xi_{1,0} \cos(\omega t).$$

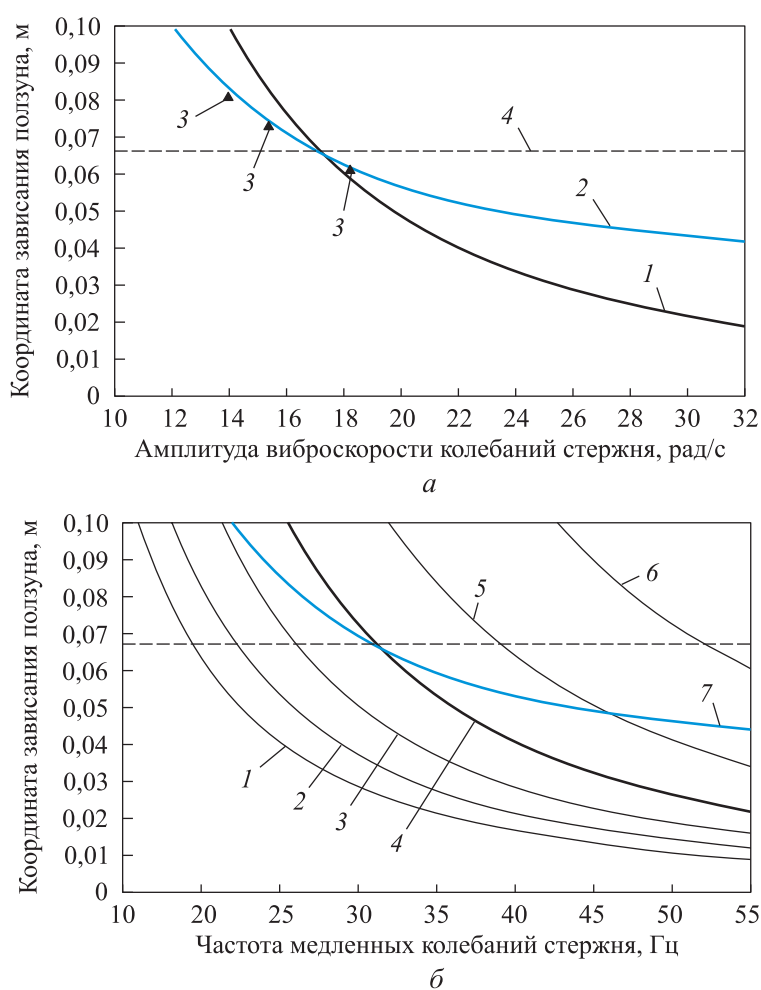
Выполним среднеквадратическое усреднение угловой скорости движения  $\dot{\xi}_{1,e}$  ползуна при медленных гармонических колебаниях стержня относительно вертикали в режиме зависания:

$$\dot{\xi}_{1, \text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} \dot{\xi}_{1,e}^2(t) dt}.$$

Получим координату равновесного положения ползуна  $\xi_{2,e}$ , т. е. координату зависания ползуна на стержне при заданной усредненной виброскорости медленных гармонических колебаний стержня  $\dot{\xi}_{1, \text{ср.кв}} = (\xi_{1,0} \omega) / \sqrt{2}$ :

$$g = \xi_{2,e} \frac{\dot{\xi}_{1,0}^2}{2}, \quad \xi_{2,e} = \frac{2g}{(\xi_{1,0} \omega)^2}. \quad (3)$$

Координаты зависания ползуна показаны на рис. 3, а кривой 1 и на рис. 3, б — семейством кривых 1–6. Эти результаты получены для первого варианта длины стержня ( $l_1 = 0,1$  м).



**Рис. 3.** Сопоставление результатов, полученных С.В. Челомеем [4–6], с результатами настоящей работы; зависимость координаты зависания ползуна: а — от амплитуды виброскорости угловых гармонических колебаний стержня; б — от квазисобственной частоты при фиксированных амплитудах медленных движений по выражениям (1), (3)

При учете быстрых движений из системы уравнений (1) численным интегрированием получим координату зависания ползуна (кривые 2 и 7 (голубого цвета), см. рис. 3). Результаты, полученные С.В. Челомеем для вариантов 1-1-1-3 (см. таблицу), на рис. 3, а показаны маркерами 3. Влияние частоты медленных движений маятника на положение относительного равновесия ползуна при заданных амплитудах медленных движений показано на рис. 3, б. Кривые 1-6 получены для амплитуд колебаний стержня, изменяющихся от 3 до 8 град с шагом 1 град. Штриховая прямая 4 на рис. 3, а — координата центра качания стержневого маятника.

Из рис. 3, а следует хорошее согласование результатов расчетов, выполненных в настоящей работе, и результатов, полученных С.В. Челомеем в [6], для трех вариантов параметров маятника 1-1-1-3 (см. таблицу).

*Устойчивость положения относительного равновесия ползуна на стержне в режиме зависания.* Оценим устойчивость положения относительного равновесия ползуна при указанных выше параметрах вибрации ( $A = 0,01$  м;  $p = 2364$  рад/с) для варианта 1-4 параметров системы из таблицы ( $l_1 = 0,1$  м,  $k_2 = 325$  с<sup>-1</sup>). При расчетах будем использовать авторские уравнения движения (1).

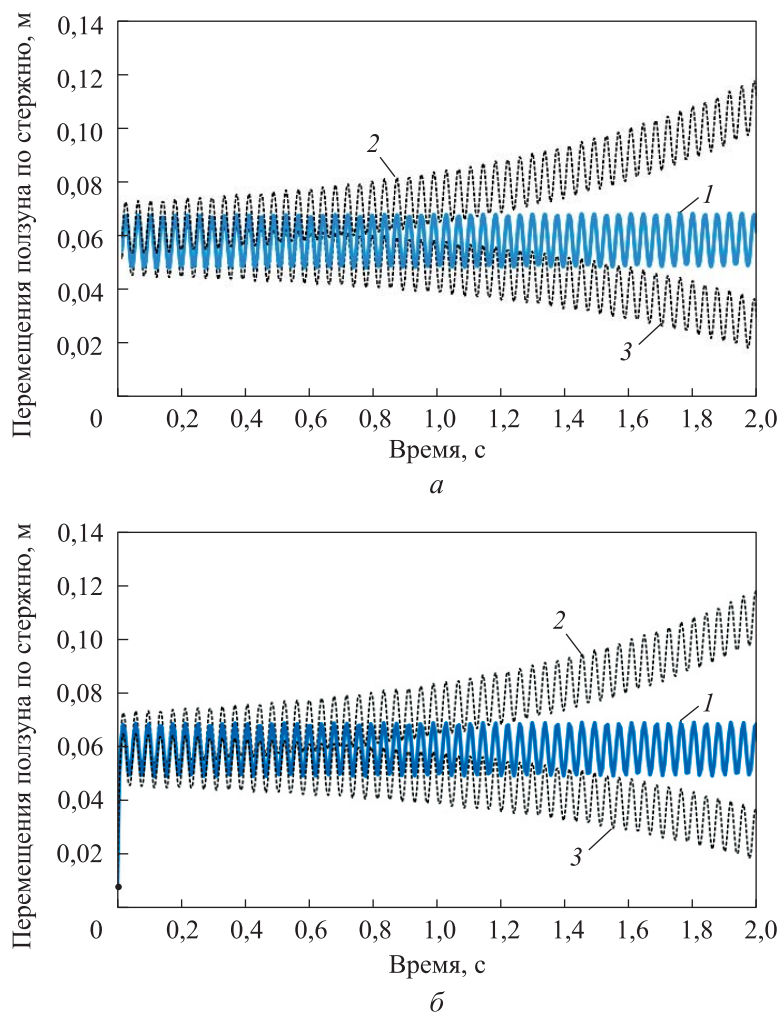
Для оценки устойчивости положения относительного равновесия ползуна на стержне воспользуемся простейшим приемом: поместим ползун сначала в равновесную точку с координатой  $x = 0,058$  м, а затем в точку, несколько смещенную относительно равновесной вверх ( $x = 0,063$  м) или вниз ( $x = 0,055$  м).

Уход (медленное движение) ползуна, помещенного в расчетное положение относительного равновесия, почти незаметен (кривая 1, рис. 4, а).

Незначительное смещение ползуна от равновесной точки вверх или вниз по стержню не вызывает его возвращение в равновесное положение. Ползун в медленном движении уходит от равновесного положения вверх (будучи отклоненным вверх, кривая 2) или движется вниз (при отклонении вниз, кривая 3). Равновесие неустойчивое.

Зададим начальные условия такими, чтобы ползун (при заданном удвоенном коэффициенте демпфирования  $k_2 = 325$  с<sup>-1</sup>) поднялся до найденной координаты относительного равновесия  $x = 0,058$  м. А затем несколько увеличим трение в паре, задав  $k_2 = 350$  с<sup>-1</sup>, или уменьшим, задав  $k_2 = 300$  с<sup>-1</sup>. Получим результат, приведенный на рис. 4, б. После подскока от заданного начального положения  $x(0) = 0,0063$  м (на рис. 4, б показано маркером) с заданной начальной скоростью поступательного движения

$\dot{x}(0) = 17,0$  м/с при удвоенном коэффициенте демпфирования  $k_2 = 325$  с<sup>-1</sup> имеем зависание (кривая 1, см. рис. 3, б). При  $k_2 = 300$  с<sup>-1</sup> — уход вверх (кривая 2, см. рис. 3, б). При  $k_2 = 350$  с<sup>-1</sup> — уход вниз (кривая 3, см. рис. 3, б). Равновесие неустойчивое.



**Рис. 4.** Неустойчивость относительного равновесия маятника (перемещения ползуна по стержню в маятнике с параметрами варианта, см. таблицу)

**Вывод.** Из результатов численных экспериментов следует, что при конкретных значениях параметров, найденных С.В. Челомеем [4–6], обеспечивается положение относительного равновесия пары стержень–ползун с зависанием ползуна на стержне в течение некоторого промежутка времени, но это положение не является устойчивым.

**Заключение.** Показано, что значения параметров маятников и параметров возбуждения, полученные С.В. Челомеем в [4–6], были искажены при публикации.

В архиве Госкомитета Совета министров СССР по делам изобретений и открытий (в переписке С.В. Челомея) найдены истинные значения параметров для первого варианта параметров системы.

Впервые публикуются истинные (не искаженные) значения параметров маятника, параметров возбуждения и последняя версия уравнений медленного движения первого и второго приближения, найденные С.В. Челомеем.

Показано, что использование в расчетах неискаженных значений параметров приводит к эффекту зависания ползуна на стержне.

Раскрыт физический механизм, реализованный в авторской модели маятника Челомея, и предложен способ расчета параметров зависания.

Зависание ползуна на стержне объяснено действием усредненной центробежной силы инерции, создаваемой колебаниями стержневого элемента маятника.

Варианты математических моделей маятника Челомея (1), (2), предложенные в [4–6] С.В. Челомеем, не обеспечивают реализацию эффекта, наблюдаемого в опытах академика В.Н. Челомея.

Математические модели (1), (2) следует отнести не к маятникам Челомея, а к квазимаятникам, т. е. системам, похожим на оригинальный маятник Челомея, но имеющим физический механизм, отличающийся от действующего в оригинальном маятнике Челомея.

Достоверность результатов и выводов настоящей работы следует из приведенных материалов численных экспериментов, выполненных с использованием нескольких математических моделей объекта исследований, а также из опытов на специальной экспериментальной установке с оригинальным возбудителем колебаний, описанным и впервые использованным в [23–25]. Проведенные в рамках настоящей работы эксперименты с двумя маятниками Челомея с отличающимися значениями параметров, подтвердили наличие эффекта, обнаруженного академиком В.Н. Челомеем [1]. Сомнения М.П. Картмелла, Д.И. Фоухенда [15] в существовании эффекта не подтвердились.

Маятник Челомея — своеобразный памятник академику В.Н. Челомею, его интуиции, таланту, умению проникать в самую суть явлений, наблюдаемых в сложных механических системах.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
- [2] Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Acta Astronaut.*, 1984, vol. 11, no. 5, pp. 269–273. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(84\)90010-9](https://doi.org/10.1016/0094-5765(84)90010-9)
- [3] Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Meccanica*, 1985, vol. 20, no. 4, pp. 314–316. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02352684>
- [4] Курбатов А.М., Хромушкин А.В., Челомей С.В. К вопросу о маятнике В.Н. Челомея. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1986, № 6, с. 63–65.
- [5] Кулик С.В., Хромушкин А.В., Челомей С.В. Об одной задаче академика В.Н. Челомея. В кн.: *Механика в авиации и космонавтике*. М., Машиностроение, 1995, с. 101–104.
- [6] Челомей С.В. О двух задачах динамической устойчивости колебательных систем, поставленных академиками П.Л. Капицей и В.Н. Челомеем. *Изв. АН. МТТ*, 1999, № 6, с. 159–166.
- [7] Меняйлов А.И., Мовчан А.В. О стабилизации системы маятник-кольцо в условиях вибрации основания. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1984, № 6, с. 35–40.
- [8] Блехман И.И., Малахова О.З. О квазиравновесных положениях маятника Челомея. *Докл. АН СССР*, 1986, т. 287, № 2, с. 290–294. EDN: WCAPHD
- [9] Киргетов А.В. К вопросу об устойчивости квазиравновесных положений маятника В.Н. Челомея. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1986, № 6, с. 57–62.
- [10] Thomsen J.J., Tcherniak D.M. Chelomey's pendulum explained. *Proc. R. Soc. Lond.*, 2001, vol. 457, no. 2012, pp. 1889–1913. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0793>
- [11] Thomsen J.J. *Vibrations and stability*. Berlin, Springer, Verlag, 2013.
- [12] Gousskov A.M., Myalo E.V., Panovko G.Y. Disc movement features along vertical vibrating rod. *Proc. 12th IFToMM World Congress*, 2007, pp. 18–21.
- [13] Gousskov A.M., Myalo E.V., Panovko G.Y., et al. Dynamic stability of a flexible rod under parametric excitation. *J. Vibroengineering*, 2007, vol. 9, no. 2, pp. 16–20.
- [14] Мяло Е.В. Динамика упругого стержня со свободно скользящим кольцом при параметрическом возбуждении. Дис. ... канд. техн. наук. М., ИМАШ РАН, 2008.
- [15] Cartmell M.P., Forehand D.I.M. On the assumptions and decisions required for reduced order modelling of engineering dynamical systems. *Proc. 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conf.* St. Petersburg, 2008.
- [16] Васильков В.Б. Влияние вибрации на нелинейные эффекты в механических системах. Дис. ... д-ра техн. наук. СПб., ИПМаш РАН, 2009.
- [17] Иванов К.С. К теории маятника Челомея. Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. В кн.: *Вибрационная механика*. СПб., Наука, 2009, с. 323–325.

- [18] Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П.Л. Капица и другие. *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2017, т. 25, № 5, с. 69–87.  
DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87>
- [19] Грибков В.А., Гордин Я.Д. Анализ результатов С.В. Челомея по маятнику Челомея. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Матер. XXVI Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*. М., МАИ, 2020, с. 92–94.  
EDN: HISCZT
- [20] Грибков В.А., Гордин Я.Д. Физический механизм, лежащий в основе авторской математической модели маятника Челомея. *XLV Академические чтения по космонавтике*. Т. 4. М., 2021, с. 411–413. EDN: EFRKCC
- [21] Грибков В.А., Гордин Я.Д. О новом варианте квазимаятника Челомея, основанном на использовании режима «флаттер–моды». *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Матер. XXVII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*. Т. 1. М., ТРП, 2021, с. 86–88.
- [22] Челомей С.В. Динамическая устойчивость при высокочастотном параметрическом возбуждении. *Докл. АН СССР*, 1981, т. 257, № 4, с. 853–858.
- [23] Gribkov V.A., Gordin Y.D. On the cause of disagreement between simulated and experimental results for the stability problem of inverted stabilized pendulums (based on “Nature” paper by D. Acheson, T. Mullin). *XXV ICTAM*, 2021, pp. 2385–2386.
- [24] Грибков В.А., Хохлов А.О. Устойчивость тройного инвертированного физического маятника из статьи академика В.Н. Челомея 1983 г. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 6 (105), с. 33–49.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-6-33-49>
- [25] Грибков В.А., Хохлов А.О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2017, № 2 (71), с. 22–39.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>

**Грибков Владимир Арсеньевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Гордин Ярослав Денисович** — ведущий инженер-конструктор ООО «РПК» (Российская Федерация, 143026, Москва, территория ИЦ «Сколково», Большой б-р, д. 42, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Грибков В.А., Гордин Я.Д. Об авторской математической модели маятника Челомея. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2024, № 2 (149), с. 42–62. EDN: KRWTLD

## ON THE AUTHORS' MATHEMATICAL MODEL OF THE CHELOMEY'S PENDULUM

V.A. Gribkov<sup>1</sup>

[gribkovva@bmstu.ru](mailto:gribkovva@bmstu.ru)

Ya.D. Gordin<sup>2</sup>

[yaroslav.gordin@gmail.com](mailto:yaroslav.gordin@gmail.com)

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> RPC LLC, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

Chelomey's pendulum is the Chelomey named pendulum found experimentally by academician V.N. Chelomey in 1983. His son Professor S.V. Chelomey was studying the system after V.N. Chelomey death (1984). Professor S.V. Chelomey published three works on the Chelomey's pendulum, where equations of the pendulum motion from the V.N. Chelomey publications were used. It was believed that the given motion equations were adequate to the objects motion in experimental research by Academician V.N. Chelomey, i.e., the pendulum demonstrators. It referred primarily to analyzing the computation results obtained using the authors' pendulum mathematical model with the given pendulum and excitation parameters. The paper identifies dynamics and stability of the Chelomey's pendulum motion with six specific parameter options. Results were obtained differing qualitatively from those published. It was noted that the system and the excitation parameters were distorted during publication. True values of parameters obtained by S.V. Chelomey were restored and are presented for the first time. The paper shows that the slider relative equilibrium position on the rod is really possible, as was found in the author's Chelomey's model. Physical mechanism, not described in literature, is presented. It ensures the slider rise along the rod and its "hanging" in the author's mathematical model of the Chelomey's pendulum. Reliability of the conclusions was confirmed by results in computation and set-up experiments with the original oscillation exciter

### Keywords

*Chelomey's pendulum, inverted pendulum, parametric excitation, stabilization, stability*

Received 27.04.2024

Accepted 14.05.2024

© Author(s), 2024

---

### REFERENCES

- [1] Chelomey V.N. Paradoxes in the mechanics due to the vibrations. *Dokl. AN SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67 (in Russ.).

- [2] Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Acta Astronaut.*, 1984, vol. 11, no. 5, pp. 269–273. DOI: [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(84\)90010-9](https://doi.org/10.1016/0094-5765(84)90010-9)
- [3] Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Meccanica*, 1985, vol. 20, no. 4, pp. 314–316. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02352684>
- [4] Kurbatov A.M., Khromushkin A.V., Chelomey S.V. To the question of Chelomey's pendulum. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1986, no. 6, pp. 63–65 (in Russ.).
- [5] Kulik S.V., Khromushkin A.V., Chelomey S.V. Ob odnoy zadache akademika V.N. Chelomeya [On one Chelomey's problem]. *V kn.: Mekhanika v aviatsii i kosmonavtike* [In: Mechanics in aviation and cosmonautics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1995, pp. 101–104 (in Russ.).
- [6] Chelomey S.V. On two problems of dynamical stability of oscillatory systems formulated by academicians P.L. Kapitsa and V.N. Chelomei. *Mech. Solids*, 1999, vol. 34, no. 6, pp. 134–140.
- [7] Menyaylov A.I., Movchan A.V. On stabilisation of pendulum-ring system under conditions of base vibration. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1984, no. 6, pp. 35–40 (in Russ.).
- [8] Blekhman I.I., Malakhova O.Z. Quasiequilibrium positions of the Chelomei pendulum. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 287, no. 2, pp. 290–294 (in Russ.).
- [9] Kirgetov A.V. To the stability question of quasi-equilibrium positions of V.N. Chelomey's pendulum. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1986, no. 6, pp. 57–62 (in Russ.).
- [10] Thomsen J.J., Tcherniak D.M. Chelomey's pendulum explained. *Proc. R. Soc. Lond.*, 2001, vol. 457, no. 2012, pp. 1889–1913. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2001.0793>
- [11] Thomsen J.J. *Vibrations and stability*. Berlin, Springer, Verlag, 2013.
- [12] Gousskov A.M., Myalo E.V., Panovko G.Y. Disc movement features along vertical vibrating rod. *Proc. 12th IFToMM World Congress*, 2007, pp. 18–21.
- [13] Gousskov A.M., Myalo E.V., Panovko G.Y., et al. Dynamic stability of a flexible rod under parametric excitation. *J. Vibroengineering*, 2007, vol. 9, no. 2, pp. 16–20.
- [14] Myalo E.V. Dinamika uprugogo sterzhnya so svobodno skolzyashchim koltsom pri parametricheskom vzbuzhdenii. Dis. kand. tekhn. nauk [Dynamics of an elastic rod with a free sliding ring under parametric excitation. Cand. Sc. (Eng.). Diss.]. Moscow, MERI RAS, 2008 (in Russ.).
- [15] Cartmell M.P., Forehand D.I.M. On the assumptions and decisions required for reduced order modelling of engineering dynamical systems. *Proc. 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conf.*, St. Petersburg, 2008.
- [16] Vasilkov V.B. Vliyanie vibratsii na nelineynye efekty v mekhanicheskikh sistemakh. Dis. d-ra tekhn. nauk [Influence of vibration on nonlinear effects in mechanical systems. Dr. Sc. (Eng.). Diss.]. St. Petersburg, IPME RAS, 2009 (in Russ.).
- [17] Ivanov K.S. K teorii mayatnika Chelomeya. Nelineynye problemy teorii kolebaniy i teorii upravleniya [To the theory of Chelomey's pendulum. Nonlinear problems of the

theory of vibrations and control theory]. *V kn.: Vibratsionnaya mekhanika* [In: Vibration mechanics]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2009, pp. 323–325 (in Russ.).

[18] Bogatov E.M., Mukhin R.R. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2017, vol. 25, no. 5, pp. 69–87 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87>

[19] Gribkov V.A., Gordin Ya.D. [Analysis of S.V. Chelomey's results on Chelomey's pendulum]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsey i sploshnykh sred. Mater. XXVI Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova* [In: Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures And Continuous Media. Proc. XXVI Int. Symp. n.a. A.G. Gorshkov]. Moscow, MAI Publ., 2020, pp. 92–94 (in Russ.).

EDN: HISCZT

[20] Gribkov V.A., Gordin Ya.D. [The physical mechanism underlying the author's mathematical model of the Chelomei's pendulum]. *XLV Akademicheskie chteniya po kosmonavtike. T. 4* [XLV Academic Readings on Cosmonautics. Vol. 4]. Moscow, 2021, pp. 411–413 (in Russ.). EDN: EFRKCC

[21] Gribkov V.A., Gordin Ya.D. [On a new variant of the Chelomey quasi-pendulum based on the use of the “flutter-mode” mode]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsey i sploshnykh sred. Mater. XXVII Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova. T. 1* [Proc. XXVII Int. Symp. Dynamic and Technological Problems of a Mechanics of Constructions and Continuous Mediums. Vol. 1]. Moscow, TRP, 2021, pp. 86–88 (in Russ.).

[22] Chelomey S.V. Dynamic stability under high-frequency parametric excitation. *Dokl. AN SSSR*, 1981, vol. 257, no. 4, pp. 853–858 (in Russ.).

[23] Gribkov V.A., Gordin Y.D. On the cause of disagreement between simulated and experimental results for the stability problem of inverted stabilized pendulums (based on “Nature” paper by D. Acheson, T. Mullin). *XXV ICTAM*, 2021, pp. 2385–2386.

[24] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Stability of the triple inverted physical pendulum described in the article of academician V.N. Chelomey (1983). *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2015, no. 6 (105), pp. 33–49 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2015-6-33-49>

[25] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Experimental study of inverted regulable pendulum stability. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2017, no. 2 (71), pp. 22–39 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-2-22-39>

**Gribkov V.A.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Gordin Ya.D.** — Leading Design Engineer, RPC LLC (Bolshoy bulvar 42, str. 1, Skolkovo Innovation Center Territory, Moscow, 143026 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Gribkov V.A., Gordin Ya.D. On the authors' mathematical model of the Chelomey's pendulum. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2024, no. 2 (149), pp. 42–62 (in Russ.). EDN: KPWTLD