

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

В.Д. Кургузов^{1,2}
Н.С. Астапов^{1,2}

kurguzov@hydro.nsc.ru
nika@hydro.nsc.ru

¹ ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация

² НГУ, г. Новосибирск, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена прямоугольная пластина с краевой трещиной нормального отрыва (мода I) из упруго-пластического материала, имеющего предельную деформацию. К материалам такого класса относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. Прочность пластины исследована в рамках подхода Нейбера — Новожилова. Критерий продвижения трещины сформулирован с помощью модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, использующей дополнительный параметр — поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В условиях маломасштабной текучести при наличии сингулярной особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины сформулирован двухпараметрический (сдвоенный) критерий квазихрупкого разрушения (мода I) для трещин в упругопластическом материале. Сдвоенный критерий разрушения включает в себя деформационный критерий в вершине трещины и силовой критерий в вершине фиктивной трещины. Длины исходной и фиктивной трещин различаются на длину зоны предразрушения. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения пластины в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния. Выполнен анализ параметров, входящих в предлагаемую модель квазихрупкого разрушения. Предложено подбирать параметры модели по аппроксимации $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы одноосного растяжения и критическому коэффициенту интенсивности напряжений K_{Ic}

Ключевые слова

Хрупкое и квазихрупкое разрушение, сдвоенный критерий разрушения, упруго-пластический материал, предельная деформация

Поступила 15.03.2022

Принята 20.05.2022

© Автор(ы), 2023

Введение. Наличие трещин является одним из важных факторов, вызывающих разрушение в машиностроительных конструкциях. Наиболее часто встречающиеся трещиноподобные дефекты располагаются в местах концентрации напряжений, как правило, в окрестности вершин вырезов и на границах отверстий, а в композитных материалах — по границе раздела сред. Поэтому проблемы построения простых аналитических моделей процесса разрушения материалов и конструкций, пригодных для инженерных расчетов, являются актуальными.

Преимущества и недостатки силовых и деформационных критериев разрушения изложены в [1–5], причем все рассуждения ведутся только на основе однопараметрических локальных критериев разрушения хрупких и квазихрупких материалов. Однако возможен другой взгляд на процесс разрушения, когда используется неклассическая схема разрушения материала, в которой, кроме двух классических состояний материала (сплошное и разрушенное состояния), используется третье промежуточное состояние, описывающее предразрушение с учетом накопления повреждений в материале окрестности концентраторов напряжений. При использовании неклассической схемы разрушения напрашивается применение многопараметрических критериев разрушения.

Состояние механически напряженного материала находится между хрупким и вязким. Различие между этими состояниями в механическом аспекте определяется соотношением энергетических затрат на обратимые и необратимые явления деформирования. В связи с этим возникает необходимость рассмотреть состояние материала по двум критериям с непрерывным переходом из одного в другой. Построение двухпараметрического критерия разрушения даст возможность объединить области использования однопараметрических критериев разрушения, которые отвечают разным предельным состояниям материала. Такой критерий может базироваться на основе следующих однопараметрических критериев: силового, деформационного, энергетического и их комбинации [6–9].

Двухпараметрический (сдвоенный) интегральный критерий разрушения в упругопластическом материале и диаграммы разрушения плоских образцов при наличии в них острых внутренних трещин нормального отрыва (мода I) рассмотрены в [10–12]. Простое представление зоны предразрушения в виде прямоугольника получено по модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла (ЛПД) [13, 14] на основе подхода Нейбера — Новожилова [15, 16]. Для необходимого и достаточного критериев разрушения построены критические кривые на плоскости длина трещины–напряжения. Эти кривые делят плоскость на три подобласти, в которых

отсутствуют разрушения, накапливаются повреждения в зоне предразрушения и разрушается образец. Постоянные, применяемые для аналитического описания диаграмм разрушения квазихрупких материалов с трещинами, подбирают, используя аппроксимацию классической диаграммы деформирования «напряжение–деформация» исходного материала и критический коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Отметим, что предложенный Легуилоном [3] двоякий критерий разрушения применим только к хрупкому разрушению.

В настоящей работе двоякий критерий прочности применяется для определения критических нагрузок для краевой трещины моды I в пластине из упругопластического материала. Предлагаемый подход основан на представлении о том, что зарождению и росту трещины независимо от температуры предшествуют следующие состояния материала: упругое деформирование, переход в пластическое состояние, развитие пластических деформаций, исчерпание ресурса пластичности и собственно разрушение. Хладноломкость является следствием снижения пластичности материала и определяется из статических испытаний. В ряде материалов при низкой температуре трещина, помимо снижения пластичности, получает возможность пройти сквозь зерно, что, в свою очередь, уменьшает трещиностойкость материала. Предлагаемая модель использует неклассическую схему разрушения материала, когда кроме сплошного и разрушенного состояний рассматривается некоторое промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Полученные результаты дают возможность оценить несущую способность конструкций с трещинами в более широком диапазоне условий нагружения, чем это позволяют однопараметрические критерии механики разрушения.

Постановка задачи. Пусть в однородной структурированной прямоугольной пластине шириной w , высотой H имеется краевая трещина длиной l_0 (рис. 1, а). На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞ (рис. 1, б), поверхность трещины свободна от нагрузок, т. е. реализуется первая мода разрушения (мода I). Материал пластины предполагается идеальным упругопластическим, с $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, приведенной на рис. 2, где σ_Y — предел текучести; ε_0 — максимальная упругая деформация; ε_1 — предельная деформация до разрушения. Запишем параметр $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации и максимальной упругой. Параметр $\bar{\varepsilon}_1$ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (показатель пластичности). Материал образца имеет определенную структуру, квазихрупкий тип разрушения, причем

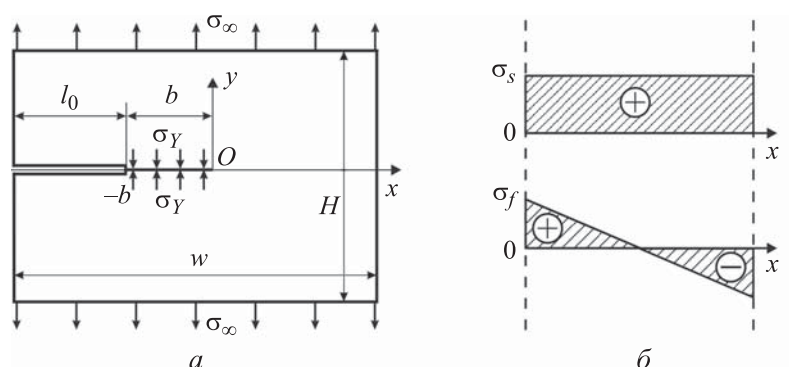


Рис. 1. Пластина с краевой трещиной (а); эпюры номинальных напряжений при растяжении σ_s и изгибе σ_f (б)

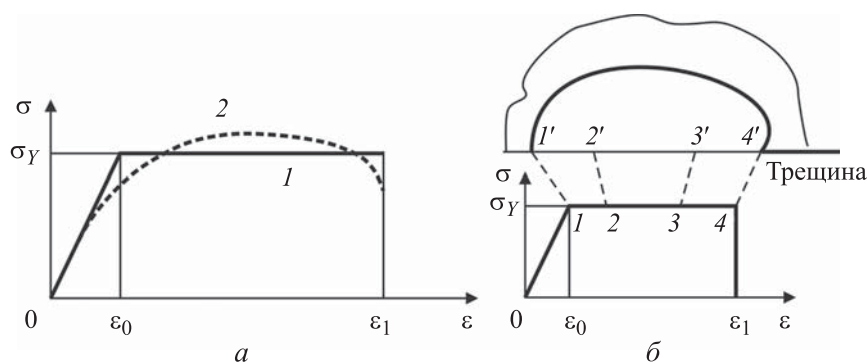


Рис. 2. Исходная $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмма (1) деформирования материала и ее двухзвенная аппроксимация (2) (а); соответствие точек 1–4 диаграммы деформирования точкам 1'–4' зоны предразрушения в окрестности вершины трещины (б)

характерный линейный размер d структурного элемента (средний диаметр зерна, эффективный диаметр структур разрушения [12]) предполагается известным.

Пусть в лабораторном эксперименте при испытании макрообразца на одноосное растяжение получена $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмма деформирования. Эта реальная $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмма исследуемого материала аппроксимируется двухзвенной ломаной. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом, имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается. Исходная $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмма и ее двухзвенная аппроксимация приведены на рис. 2, а (кривые 1 и 2). Параметры этой аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 совпали. Кривая 1 полностью определяется следующими параметрами: E — модуль Юнга;

σ_Y — предел текучести при одноосном растяжении; ε_1 — предельная деформация. Максимальная упругая деформация ε_0 связана с пределом текучести соотношением $\sigma_Y = E\varepsilon_0$. Аппроксимацию $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы на участке $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ можно трактовать как идеальную пластичность, а отношение $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$ — как запас пластичности материала при монотонном нагружении.

Модифицированная модель ЛПД. Кроме реальной трещины длиной l_0 , введем в рассмотрение фиктивную трещину длиной $l = l_0 + b$, причем зона предразрушения длиной b расположена на продолжении реальной трещины. Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: 1) диаметр d зерна — это постоянная величина, определяемая структурой материала; 2) длина b зоны предразрушения зависит от длины реальной трещины, интенсивности нагружения и механических свойств материала. Отметим, что при однократном нагружении квазихрупких материалов критическая длина b_c зоны предразрушения является вполне определенным параметром ($l_c = l_0 + b_c$ — критическая длина макротрещины). Нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие в модифицированной модели ЛПД [10–12] на продолжении трещины (*a*), и аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (*b*) показаны на рис. 3.

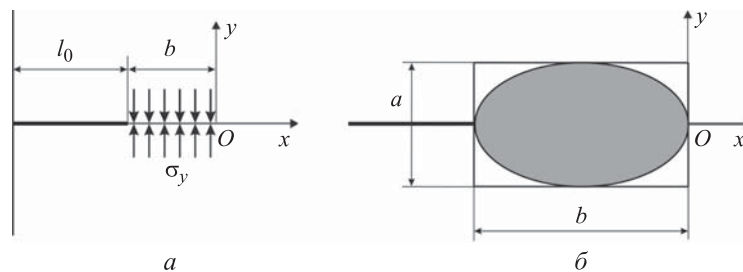


Рис. 3. Модифицированная модель ЛПД:

σ_y — нормальные напряжения, действующие на продолжении фиктивной трещины;
 Oxy — прямоугольная система координат с началом в вершине фиктивной трещины;
 ось Ox направлена вдоль трещины (*a*); аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (плоское напряженное состояние) (*b*)

В классической модели ЛПД [13, 14] поперечник пластической зоны $a = 0$. Напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие на краях фиктивной трещины в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины, тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины. Зона предразрушения занимает только часть зоны пластичности.

В схеме квазихрупкого разрушения принимается, что область нелинейных эффектов мала по сравнению с длиной трещины. Поэтому предположим, что размер этой области и интенсивность пластических деформаций в ней целиком контролируется КИН K_I и пределом текучести σ_Y . Эта область настолько мала, что поле напряжений вокруг нее все еще описывается асимптотическими формулами [17]. Тип разрушения материала можно классифицировать по относительному размеру зоны предразрушения следующим образом: $b = 0$ — хрупкое; $b/l_0 \ll 1$ — квазихрупкое; $b/l_0 \approx 1$ — квазивязкое; $b/l_0 \geq 1$ — вязкое [10–12].

Сдвоенный критерий разрушения. Рассмотрим случай маломасштабной текучести, т. е. когда длина зоны предразрушения (пластической зоны) много меньше длины реальной трещины $b/l_0 \ll 1$. При построении диаграмм квазихрупкого разрушения прямоугольной пластины используем подход, приведенный в [10–12]. Достаточный сдвоенный критерий разрушения для коротких трещин и трещин средней длины можно представить в виде двух соотношений:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0; \quad (1)$$

$$\delta(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ — нормальные напряжения на продолжении фиктивной трещины; b_c — критическая длина зоны предразрушения; δ_c — критическое раскрытие фиктивной трещины ($\delta(x) = 2u_y(x, 0)$ — раскрытие фиктивной трещины ($x < 0$), при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине реальной трещины). Критические величины, полученные по достаточному и необходимому критериям разрушения, отмечены нижними индексами «с» и «0». По терминологии Новожилова, критерий (1) называется необходимым, потому что контролирует начало процесса разрушения, двухпараметрический критерий (1), (2) называется достаточным, поскольку при выполнении условий (1) и (2) происходит окончательное разрушение образца. Силовой критерий (1) для нормальных напряжений с учетом осреднения сформулирован в вершине фиктивной трещины, деформационный критерий разрушения (2) — в вершине исходной трещины.

Построение диаграмм квазихрупкого разрушения. Поле нормальных напряжений $\sigma_y(x)$ на продолжении фиктивной трещины $x > 0$ представим в виде суммы двух слагаемых [18]:

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}. \quad (3)$$

Здесь $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib} > 0$ — суммарный КИН ($K_{I\sigma} > 0$ — КИН, порождаемый приложенными к пластине напряжениями σ_∞ ; $K_{Ib} < 0$ — КИН, порождаемый постоянными напряжениями σ_Y , действующими в зоне предразрушения); $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$ — номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины фиктивной трещины (σ_s и σ_f — номинальные напряжения при растяжении и изгибе, см. рис. 1, б). Первое и второе слагаемые в (3) — сингулярная и регулярная части решения. Равенство (1) сдвоенного критерия контролирует достижение осредненными напряжениями на продолжении фиктивной трещины предела текучести σ_Y , а равенство (2) сдвоенного критерия описывает нормальный отрыв в вершине реальной трещины.

В приближении сопротивления материалов номинальные напряжения σ_s и σ_f можно представить в виде

$$\sigma_s = \sigma_\infty \frac{w}{w-l}; \quad \sigma_f = \sigma_\infty \frac{3wl}{(w-l)^2}. \quad (4)$$

Поскольку рассматривается деформирование материала в условиях маломасштабной текучести, то для образцов с краевыми трещинами имеем КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib} > 0$. Выражение для КИН $K_{I\sigma}$, обусловленного заданными условиями испытаний образцов с краевыми трещинами, возьмем из справочников [19, 20]:

$$K_{I\sigma} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l} Y_s(\xi),$$

$$Y_s(\xi) = 1,12 - 0,231\xi + 10,55\xi^2 - 21,72\xi^3 + 30,39\xi^4, \quad (5)$$

где $\xi = l/w$. Формула (5), первоначально предложенная для полосы с краевой трещиной, может быть использована и для достаточно высоких пластин, т. е. при $H/w > 6$. Коэффициент интенсивности напряжений K_{Ib} , обусловленный постоянными напряжениями σ_Y , действующими в зоне предразрушения, имеет универсальное представление. Для полуплоскости с краевой трещиной с частично нагруженными берегами КИН K_{Ib} вычисляется следующим образом [19, 20]:

$$K_{Ib} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right). \quad (6)$$

Для пластины с краевой трещиной необходимо ограничение $w > 5l_0$. Для квазихрупкого разрушения в условиях маломасштабной текучести выполняется неравенство

$$b/l \ll 1. \quad (7)$$

С точностью до величин высшего порядка малости для множителя $\arccos(1 - b/l)$ в соотношении (6) справедливо равенство $\arccos(1 - b/l) \approx \sqrt{2b/l}$. Окончательно упрощенная запись для КИН K_{Ib} имеет вид

$$K_{Ib} = -2\sigma_Y \sqrt{\frac{2b}{\pi}}. \quad (8)$$

В условиях маломасштабной текучести (7) при наличии сингулярной составляющей решения выражение для величины раскрытия фиктивной трещины можно записать в виде [18]:

$$\delta(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (9)$$

где κ — параметр напряженного состояния ($\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния); $G = E/(2(1 + \nu))$ — модуль сдвига.

Критическое раскрытие фиктивной трещины δ_c в соотношении (2) зависит от запаса пластичности $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$ исследуемого материала и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины [10–12], вычислим его по формуле

$$\delta_c = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a. \quad (10)$$

В случае локализованного пластического течения поперечник a зоны предразрушения в (10) полагаем пропорциональным удвоенному максимальному размеру пластической зоны R_0 для трещины нормального отрыва в идеально пластических телах [21]:

$$a = 2R_0 = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 = \chi(\nu) \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (11)$$

— оценка для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния $\chi = \pi/4$ [21]. Например, при $\nu = 0,33$ $\chi = 0,415$ — для плоской деформации и $\chi = 0,785$ — для плоского напряженного состояния. Критическая величина раскрытия фиктивной трещины δ_c в соотношении (10) соответствует переходу материала в вершине реальной трещины в критическое состояние и его разрушению.

Используя соотношения (3)–(5), (8)–(11), получаем оценки критического состояния материала в окрестности вершины краевой трещины. Интегрируя (1) с учетом (3) и (4), находим

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s + \sigma_f \left(1 - \frac{d}{w-l} \right). \quad (12)$$

Теперь критерий (1) с учетом (4) и (12) запишем так:

$$K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + Y_r \sigma_c = \sigma_Y, \quad (13)$$

где

$$Y_r = \frac{w}{w-l_c} + 3 \frac{wl_c}{(w-l_c)^2} \left(1 - \frac{d}{w-l_c} \right); \quad (14)$$

σ_c — критическое напряжение.

Преобразуем (13), используя для КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (5) и (8):

$$Y_s \bar{\sigma}_c \sqrt{\frac{2l_c}{d}} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2b_c}{l_c}} \sqrt{\frac{2l_c}{d}} = 1 - Y_r \bar{\sigma}_c, \quad (15)$$

где l_c и b_c — критические длины трещины и зоны предразрушения; $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ — безразмерное критическое напряжение.

Подставляя (9), (10) в (2), получаем равенство

$$\frac{\kappa+1}{2G} K_{Ic} \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \chi \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (16)$$

Учитывая, что $G = E/[2(1+\nu)]$, $E = \sigma_Y / \varepsilon_0$, из (16) получаем уравнение

$$\left(Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2b_c}{l_c}} \right) \sqrt{\frac{2b_c}{l_c}} = \frac{\pi \chi \bar{\varepsilon}_1}{(\kappa+1)(1+\nu)} (Y_s \bar{\sigma}_c)^2, \quad (17)$$

где $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$ — параметр, характеризующий запас пластичности при одноосном растяжении. После раскрытия скобок в левой части уравнения (17) появляется множитель $2b_c / l_c$, который можно отбросить как величину более высокого порядка малости по сравнению с $\sqrt{2b_c / l_c}$ в силу ограничения (7). В результате получим систему двух уравнений (15), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{2b_c / l_c}$ и $\bar{\sigma}_c$. После решения этой системы уравнений найдем аналитические выражения безразмерных критической длины зоны предразрушения $\bar{b}_c = b_c / l_c$ и критической нагрузки $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$:

$$\bar{b}_c = \frac{\pi^2}{8} (p \bar{\varepsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c)^2; \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_c = \left[Y_r + Y_s (1 - p \bar{\varepsilon}_1) \sqrt{2 \bar{l}_c} \right]^{-1}, \quad (19)$$

где $p = 2\chi / [(\kappa + 1)(1 + \nu)]$ ($p = \chi / [2(1 - \nu^2)] = 9 / [4\sqrt{2}(2 + \pi)(1 + \nu)]$ — при плоской деформации, $p = \chi / 2 = \pi / 8$ — при плоском напряженном состоянии); $\bar{\varepsilon}_1$ — запас пластичности материала; коэффициенты Y_s и Y_r определяются по формулам (5) и (14); $\bar{l}_c = l_c / d$ — безразмерная критическая длина трещины. Из условия ограниченности предельной нагрузки $\bar{\sigma}_c \leq 1$ следует, что выражение в круглых скобках в (19) должно быть положительным, откуда получаем ограничение на запас пластичности материала

$$\bar{\varepsilon}_1 \leq \frac{1}{p}, \quad (20)$$

при котором существует квазихрупкое разрушение в условиях мало-масштабной текучести однородного материала в зоне предразрушения. Для плоского напряженного состояния $\bar{\varepsilon}_1 \leq 2,546$; для плоской деформации, например при $\nu = 0,33$, $\bar{\varepsilon}_1 \leq 4,298$.

В пределе при $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_0$ из соотношения (19) получается формула, соответствующая необходимому критерию разрушения:

$$\bar{\sigma}_0 = \left(Y_r + Y_s \sqrt{2 \bar{l}_0} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Здесь $\bar{\sigma}_0 = \sigma_\infty / \sigma_Y$ — безразмерная критическая нагрузка по необходимому критерию; $\bar{l}_0 = l_0 / d$ — безразмерная длина исходной трещины. Соотношение (21) описывает хрупкое разрушение материалов. Очевидно, что $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma}_c$ при $l_0 < l_c$.

Систему уравнений (15) и (17) можно решить более точно следующим образом. Исключая выражение в скобках из системы уравнений (15) и (17), находим точное выражение для безразмерной критической длины зоны предразрушения $\bar{b}_c = b_c / l_c$:

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 \sqrt{\bar{l}_c} / (2(1 - Y_r \bar{\sigma}_c)). \quad (22)$$

Подставляя выражение (22) в уравнение (15), получаем квадратное относительно $\bar{\sigma}_c$ уравнение и новые выражения для безразмерной критической разрушающей нагрузки:

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{\bar{l}_c}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4p \bar{\varepsilon}_1} \right) \right]^{-1}. \quad (23)$$

Величина $\bar{\sigma}_{c+}$, если перед корнем выбирается знак +, соответствует меньшему корню квадратного уравнения (15) относительно $\bar{\sigma}_c$, который, с учетом ограничения $b/l \ll 1$, приближенно выражается формулой (19). Действительно, если воспользоваться приближением $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$, то выражение (23) можно упростить без существенной потери точности и получить новое выражение (19):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{c+} &= \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{l_c}{2}} \left(1 + \sqrt{1 - 4p \bar{\epsilon}_1} \right) \right]^{-1} \approx \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{l_c}{2}} (1 + 1 - 2p \bar{\epsilon}_1) \right]^{-1} \approx \\ &\approx \left[Y_r + Y_s \sqrt{2l_c} (1 - p \bar{\epsilon}_1) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Эффективный диаметр структуры разрушения d для достаточно длинных трещин находится по формуле [12]:

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_Y} \right)^2, \tag{24}$$

где K_{Ic} — критический КИН при разрушении по моде I. Пусть в двух лабораторных экспериментах получены критический КИН K_{Ic} и классическая (σ - ϵ)-диаграмма (точнее, ее аппроксимация). Тогда по трем параметрам (d (24), σ_Y и $\bar{\epsilon}_1$) в широком диапазоне изменения длин трещин можно построить две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$. Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\sigma}_0)$ и $(\bar{l}_c, \bar{\sigma}_c)$. На совмещенной плоскости длина трещины-напряжения $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ построим диаграммы квазихрупкого разрушения компактного образца (рис. 4). Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\sigma}$,

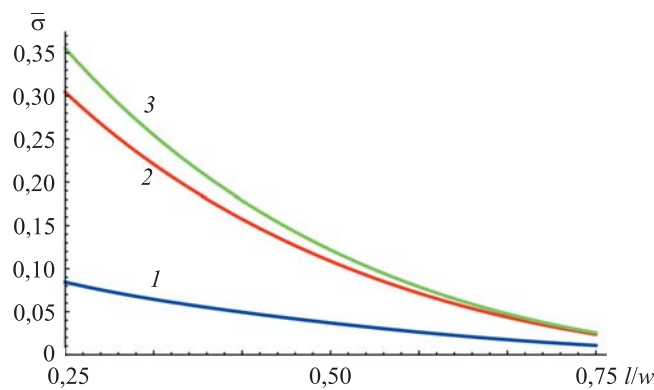


Рис. 4. Диаграммы квазихрупкого разрушения:

1 — необходимый критерий $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$; 2, 3 — достаточный критерий $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$
(плоская деформация и плоское напряженное состояние)

тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (достаточный критерий приведен двумя кривыми — при плоской деформации и плоском напряженном состоянии) разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ на три подобласти: $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_0$ (отсутствуют повреждения), $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_c$ (имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения) и $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_c$ (образец разрушается при монотонном нагружении). Для удобства практического приложения длина l трещины на рис. 4 отнесена к ширине w пластины. Вычисления выполнены при следующих значениях параметров: $d = 0,7$ мм, $\nu = 0,33$, $\bar{\epsilon}_1 = 2,5$ и 4 , при плоском напряженном состоянии и плоской деформации.

Заключение. Рассмотрено продвижение трещины нормального отрыва (мода I) в упругопластических материалах, имеющих предельную деформацию. Процесс разрушения такого материала описан модифицированной моделью ЛПД, использующей дополнительный параметр — поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения).

Построены диаграммы квазихрупкого разрушения для прямоугольной структурированной пластины. Эти диаграммы состоят из двух кривых, которые разбивают плоскость длина трещины–напряжения на три области, соответствующие отсутствию разрушения, накоплению повреждений в зоне предразрушения при повторных нагружениях и разделению образца на части при монотонном нагружении. Проведен анализ параметров, входящих в предлагаемую модель квазихрупкого разрушения. Предложено подбирать параметры модели по $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмме одноосного растяжения и критическому КИН K_{Ic} . Полученные формулы (18), (19), (21), (23) могут быть полезны при прогнозировании критической разрушающей нагрузки и оценке длины зоны предразрушения при нагружении образцов по моде I в структурированных материалах. Эти формулы выражают критическую нагрузку и длину зоны предразрушения через длину трещины с использованием следующих параметров: d — характерный линейный размер структуры материала; σ_Y и $\bar{\epsilon}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) / \epsilon_0$ — параметры $(\sigma-\epsilon)$ -диаграммы одноосного растяжения. Все три параметра определяются в результате лабораторного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Mater. Sc. Eng. R Rep.*, 2014, vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>
- [2] Zhu X.-K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, vol. 85, pp. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.001>
- [3] Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 61–72. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01184-6](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01184-6)
- [4] Newman J.C., James M.A., Zerbst U. A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 3–4, pp. 371–385. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00125-X)
- [5] Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, no. 1–2, pp. 375–401. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-015-1091-7>
- [6] Himmiche S., Malki M., Newman J.C. Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-element fracture simulations. *Eng. Fract. Mech.*, 2019, vol. 205, pp. 253–267. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.11.005>
- [7] Wang Y., Wang G., Tu S., et al. Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2020, vol. 43, no. 12, pp. 2998–3011. DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13360>
- [8] Dai Y., Qin F., Liu Y., et al. On the second order term asymptotic solution for sharp V-notch tip field in elasto-viscoplastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 2021, vol. 217–218, pp. 106–122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.026>
- [9] Матвиенко Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения. М., ФИЗМАТЛИТ, 2021.
- [10] Корнев В.М. Оценочная диаграмма квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур. Многомасштабные необходимые и достаточные критерии разрушения. *Физическая мезомеханика*, 2010, т. 13, № 1, с. 47–59.
- [11] Корнев В.М., Демешкин А.Г. Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин. *Прикладная механика и техническая физика*, 2011, т. 52, № 6, с. 152–164.
- [12] Корнев В.М. Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов. *Физическая мезомеханика*, 2013, т. 16, № 5, с. 25–34.
- [13] Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. *Прикладная механика*, 1959, т. 5, № 4, с. 391–401.
- [14] Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)

- [15] Neuber G. Kerbspannunglehre. Berlin, Springer-Verlag, 1937.
- [16] Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. *Прикладная математика и механика*, 1969, т. 33, № 2, с. 212–222.
- [17] Anderson T.L. Fracture mechanics. Boca Raton, CRC Press, 2005.
- [18] Gross D., Seelig T. Fracture Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 2012.
- [19] Саврук М.П., ред. Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев, Наукова думка, 1988.
- [20] Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1. М., Мир, 1990.
- [21] Райс Дж. Математические методы в механике разрушений. В кн.: Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М., Мир, 1975, с. 204–335.

Кургузов Владимир Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, доцент, главный научный сотрудник ИГиЛ СО РАН (Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 15); профессор кафедры механики твердого тела механико-математического факультета НГУ (Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2).

Астапов Николай Степанович — канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник ИГиЛ СО РАН (Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 15); доцент кафедры высшей математики механико-математического факультета НГУ (Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Кургузов В.Д., Астапов Н.С. Аналитическая модель квазихрупкого разрушения пластины с трещиной. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2023, № 1 (144), с. 80–96. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2023-1-80-96>

**ANALYTICAL MODEL OF QUASI-BRITTLE FRACTURE
OF A PLATE WITH CRACK**

V.D. Kurguzov^{1,2}

kurguzov@hydro.nsc.ru

N.S. Astapov^{1,2}

nika@hydro.nsc.ru

¹ LII SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

² NSU, Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

The paper considers a rectangular plate with the edge crack of mode I of normal separation from the elastoplastic material with the ultimate strain. This class of materials includes, for example, the low-alloy steels

Keywords

Brittle and quasi-brittle fracture, fracture dual criterion, elastoplastic material, ultimate strain

used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. The strength of the plate was studied within the framework of the Neuber — Novozhilov approach. The crack propagation criterion was formulated using the modified Leonov — Panasyuk — Dugdale model using an additional parameter, i.e., the plasticity zone diameter (pre-fracture zone width). Under conditions of small-scale yielding in the presence of the stress field singular feature in the vicinity of the crack tip, the two-parameter (dual) criterion for quasi-brittle fracture was formulated for mode I cracks in the elastoplastic material. The fracture dual criterion included deformation criterion at the crack tip, as well as the force criterion at the fictitious crack tip. The lengths of the original and fictitious cracks were differing by the length of the pre-fracture zone. Diagrams of the plate quasi-brittle fracture under conditions of plane deformation and plane stress were constructed. The parameters included in the proposed quasi-brittle fracture model were analyzed. It was proposed to select model parameters according to the approximation $(\sigma - \varepsilon)$ -diagram of uniaxial tension and the K_{Ic} critical stress intensity factor

Received 15.03.2022

Accepted 20.05.2022

© Author(s), 2023

REFERENCES

- [1] Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Mater. Sc. Eng. R Rep.*, 2014, vol. 75, pp. 1–48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>
- [2] Zhu X.-K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, vol. 85, pp. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.001>
- [3] Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 61–72. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01184-6](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01184-6)
- [4] Newman J.C., James M.A., Zerbst U. A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 3-4, pp. 371–385. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00125-X)
- [5] Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, no. 1-2, pp. 375–401. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-015-1091-7>
- [6] Himmiche S., Malki M., Newman J.C. Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-element fracture simulations. *Eng. Fract. Mech.*, 2019, vol. 205, pp. 253–267. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.11.005>

- [7] Wang Y., Wang G., Tu S., et al. Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2020, vol. 43, no. 12, pp. 2998–3011. DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13360>
- [8] Dai Y., Qin F., Liu Y., et al. On the second order term asymptotic solution for sharp V-notch tip field in elasto-viscoplastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 2021, vol. 217–218, pp. 106–122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.026>
- [9] Matvienko Yu.G. Dvukhparametricheskaya mekhanika razrusheniya [Two-parameter fracture mechanics]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2021.
- [10] Kornev V.M. Evaluation diagram for quasibrittle fracture of solids with structural hierarchy. Necessary and sufficient multiscale fracture criteria. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2010, vol. 13, no. 1, pp. 47–59 (in Russ.).
- [11] Kornev V.M., Demeshkin A.G. Quasi-brittle fracture diagram of structured bodies in the presence of edge cracks. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 975–985. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411060162>
- [12] Kornev V.M. Critical fracture curves and effective structure diameter for brittle and quasibrittle materials. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 5, pp. 25–34 (in Russ.).
- [13] Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. Growth of small cracks in solids. *Prikladnaya mekhanika*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391–401 (in Russ.).
- [14] Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
- [15] Neuber G. Kerbspannunglehre. Berlin, Springer-Verlag, 1937.
- [16] Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *J. Appl. Math. Mech.*, 1969, vol. 33, pp. 201–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90025-2)
- [17] Anderson T.L. Fracture mechanics. Boca Raton, CRC Press, 2005.
- [18] Gross D., Seelig T. Fracture Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 2012.
- [19] Savruk M.P., ed. Mekhanika razrusheniya i prochnost materialov. T. 2. Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami [Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2. Stress intensity factors in bodies with cracks]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1988.
- [20] Murakami Y., Aoki S. Stress intensity factors handbook. Vol. 1. Oxford, New York, Pergamon Press, 1987.
- [21] Liebowitz H., ed. Fracture. An advanced treatise. Vol. II. Mathematical fundamentals. New York, Academic Press, 1968.

Kurguzov V.D. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Senior Research Fellow, LIH SB RAS (Akademika Lavrent'eva prospekt 15, Novosibirsk, 630090 Russian Federation); Professor, Department of Solid State Mechanics, Faculty of Mechanics and Mathematics, NSU (Pirogova ul. 2, Novosibirsk, 630090 Russian Federation).

Astapov N.S. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Senior Researcher Fellow, LIH SB RAS (Akademika Lavrent'eva prospekt 15, Novosibirsk, 630090 Russian Federation); Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, NSU (Pirogova ul. 2, Novosibirsk, 630090 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kurguzov V.D., Astapov N.S. Analytical model of quasi-brittle fracture of a plate with crack. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2023, no. 1 (144), pp. 80–96 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2023-1-80-96>