

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ СИЛОВЫХ СМЕЩЕНИЙ К РАСЧЕТУ КОНТАКТНОЙ ЖЕСТКОСТИ ОПОРЫ ШПИНДЕЛЬНОГО РАДИАЛЬНО-УПОРНОГО ШАРИКОПОДШИПНИКА

А.В. Фролов

frolov@frolov.moscow

АО «ЦНИИАГ», Москва, Российская Федерация

Аннотация

Контактная жесткость является важным параметром для описания взаимодействия большого числа точных инженерных решений. Для станкостроения, например, наиболее важным элементом несущей системы являются опоры шпиндельного узла, во многом определяющие точность обработки деталей на станке. Приведен пример системного подхода к описанию переменной жесткости высокоточной шпиндельной опоры. В примере объединены аналитический подход к расчету переменной квазистатической жесткости радиально-упорного шарикоподшипника и методический подход, учитывающий контактные нормальные и касательные силовые смещения наружного кольца подшипника и силы трения для касательных взаимодействий. Предлагаемый системный подход расчета жесткости шарикоподшипниковой опоры основан на довольно простых моделях, в частности, для описания контактных явлений использован аппарат, предложенный профессором П.М. Чернянским, описывающий явления изменения жесткостей шпиндельных опор, экспериментально полученных и не описанных в более ранних работах. Показано, что экспериментальная жесткость состоит из упругой и контактной составляющих, зависящих от сил трения, поэтому введено понятие кажущейся жесткости для данных, не учитываемых в исследуемых процессах. Приведено объяснение эффекта осевого смещения шпинделя на основе контактных взаимодействий в опоре шпиндельного узла. Полученная аналитическая системная модель опробована на известных подшипниковых опорах, а полученные жесткостные решения сравнивались с валидированными экспериментальными данными из открытых источников

Ключевые слова

Шарикоподшипник, опора, контактная жесткость, трение, теория силовых смещений

Поступила 15.09.2021

Принята 12.01.2022

© Автор(ы), 2022

Введение. Шпиндельный узел (ШУ) является основным элементом в несущей системе (НС) станка, который формирует точность при обработке деталей [1]. Под НС металлорежущих станков следует понимать ту часть станка, которая «несет» инструмент и заготовку, воспринимает технологическую нагрузку и формирует точность обработки [2].

В свою очередь, наиболее критически важными звеньями, обеспечивающими точность обработки в ШУ, являются подшипниковые опоры, жесткость которых определяет общую приведенную жесткость ШУ [1, 3, 4]. Для процессов обработки, в которых основная сила резания направлена радиально по отношению к шпинделю, подшипниковые опоры ШУ испытывают в основном радиальные нагрузки. Следовательно, для ШУ такого типа наиболее важной характеристикой опор, определяющей точность обработки, будет их радиальная жесткость [2]. Одним из распространенных типов подшипников для ШУ (ввиду простоты конструкции, удобства эксплуатации и стоимости) является радиально-упорный шарикоподшипник (ШП), особенно для высокоскоростной обработки в специализированных ШУ.

При использовании системного подхода [5] конструкцию ШУ и его функциональное назначение можно представить в виде упругой фрикционной системы, системный анализ которой поможет повысить эффективность системы ШУ с точки зрения функционирования. Для станочного оборудования в целом и применяемого ШУ как системы, в частности, основными функциональными свойствами являются точность и производительность [3, 4], которые напрямую зависят от приведенной жесткости. «...Роль жесткости в технологии машиностроения несоизмеримо шире, чем прочности. Жесткость определяет не только размеры, но и главное функциональное качество металлорежущих станков — их точность и производительность...» [2]. Жесткость ШУ является главным функциональным свойством системы, однако, в системе ШУ предложено разделить жесткость и силовые смещения. «...Здесь, и в дальнейшем, под силовыми смещениями будем понимать отклонения систем при силовом воздействии от теоретически (кинематически) заданных перемещений.

Силовые смещения в упругофрикционных системах зависят от деформации звеньев, зазоров и сил трения. Деформация и потери на трение неразделимы. Последнее послужило основанием объединить упругие и неупругие свойства в некоторый модуль. Модуль обладает упругофрикционными свойствами элементарной системы и присущей ему характеристикой...» [2].

Отметим, что силовые смещения и жесткость используют для оценки точности. Точность определяют, учитывая упругие и неупругие свойства системы. В оценку точности также включена новая характеристика — сила трения, что позволяет оценивать и демпфирующие свойства системы. Силовые смещения — это более широкое понятие, в которое включены упругие и неупругие смещения, а также упругая характеристика силовых смещений (ХСС), определяющая жесткость [2].

«...Практически все исследователи признают, что на величину силовых смещений оказывают влияние жесткость и силы трения системы. Следовательно, силовые смещения отражают и упругие, и неупругие свойства систем. Поэтому они не могут служить однозначной характеристикой для оценки жесткости системы...» [2] или ХСС. «...В технической литературе дается около десяти способов определения «истинной» жесткости [2, см. табл. 10], но все они строго не обоснованы. По экспериментальным ХСС можно определять лишь приближенное значение жесткости...» [2].

На основе приведенного целесообразно рассматривать опору ШУ в виде упругой фрикционной системы (далее просто системы), в которой будут учтены ее упругие и неупругие свойства.

Выбранный подход позволяет описать один интересный эффект осевого перемещения шпинделя [6–8], в котором под влиянием изменения скорости вращения может ослабевать сила осевого преднатяга. Это происходит [8] вследствие сжатия самого шпинделя и смещения подпружиненной втулки. Далее будет показано, что контактные взаимодействия в опоре также влияют на жесткость ШУ и его силовые смещения. Осевой преднатяг в ШУ определяет радиальную жесткость ШП и приведенную жесткость всего ШУ, напрямую влияя на точность обработки.

Существует множество методик различной степени сложности по расчету жесткости ШП [9] в виде аналитического решения задачи упругих силовых смещений колец ШП относительно друг друга в совокупности со множеством существующих экспериментальных данных по измерению их жесткостей.

Однако, кроме чисто упругих взаимодействий, существуют контактные взаимодействия колец ШП и корпуса ШУ в виде нормальных и касательных контактных силовых смещений. Для их расчета необходимо учитывать силы трения в контактах. В таком случае контактная жесткость является важным параметром для описания характеристик сопряжения и влияет как на статическое, так и на динамическое поведение системы

ШУ. Тогда, если опору ШУ с ШП представить в виде упругой фрикционной системы, где разного рода деформации или силовые смещения будут элементами этой системы или модулями, как показано в [2], то к ней можно применить теорию силовых смещений, а также использовать методы системного анализа.

Цель настоящей работы — исследовать влияние на радиальные силовые смещения радиально-упорного ШП контактных взаимодействий и сил трения в стыках опоры ШУ. Подшипниковая опора представлена в виде упругой фрикционной системы из квазистатической модели жесткости ШП [10], описывающей упругое сближение колец, совмещенной с теорией силовых смещений [2–4, 11], на примере экспериментально полученных данных о радиальных жесткостях радиально-упорных ШП [12, 13]. Опора представлена в виде системы подшипник + контакты для наиболее распространенного случая геометрического расположения в ШУ, выбранного автором на основе эвристического анализа возможных вариантов (в работе не показано).

Методы решения, принятые допущения. В подшипниковой опоре, рассматриваемой в виде приведенной системы, жесткость зависит от собственных и контактных деформаций деталей, и для их описания использовались два основных элемента: «...элемент трения, который характеризует зависимость силы трения в функции внешней силы, и элемент упругости, который характеризует зависимость силы упругости (жесткости) в функции внешней силы. При этом силы трения и упругости могут быть зависимыми или независимыми от внешней силы...» [2].

Контактная жесткость разделяется на два вида: нормальную и касательную (тангенциальную). Одним из первых нормальное контактное взаимодействие исследовал А.П. Соколовский [14], экспериментально он нашел зависимость сближения y от давления q в контакте [15]:

$$y = kq^m, \quad (1)$$

где $m = 0,3-0,5$; k — коэффициент, для стальных образцов $k = 4-60$, для чугуновых $k = 10-130$.

В настоящей работе использована зависимость, похожая на (1), описанная в [2, 16, 17], которая определяет нормальное контактное смещение стыка [18]:

$$y_{\sigma 12} = c(qk)^m, \quad (2)$$

где c — коэффициент, учитывающий шероховатость обработки поверхностей стыка; q — нормальное давление в стыке; $k = 10,2$ (учитывает пе-

ревод кГ/см^2 в МПа (Н/мм^2)); m — показатель степени (для чугунных и стальных деталей $m = 0,5$) [2, 19].

Одной из самых ранних предложенных контактных моделей для упругих шероховатых поверхностей была модель Гринвуда и Уильямсона [18]. Она основана на контактном решении задачи Герца для упругих, изотропных поверхностей [20] и учитывает статистическое распределение неровностей. В модели описывается контакт между двумя упругими поверхностями, одна из которых идеально гладкая, а другая шероховатая, причем вершины всех неровностей имеют сферические сегменты с одинаковыми радиусами кривизны, что и позволяет применить теорию Герца.

Аналитическое описание нормальных и тангенциальных контактных жесткостей, полученных экспериментально, приведено в [21, 22]. Обобщение такого подхода разработано в [23], также учитывающее возможное рассогласование контактов. Сближения шероховатых поверхностей рассмотрены в [24]. Все указанные модели так или иначе основаны на вероятностном подходе и имеют сложный математический аппарат, поэтому не подошли для данного исследования.

В настоящей работе для описания нормальной контактной жесткости использован элемент, названный в [2, 19] σ -элементом, имеющим свою ХСС, приведенную на рис. 1, а [2].

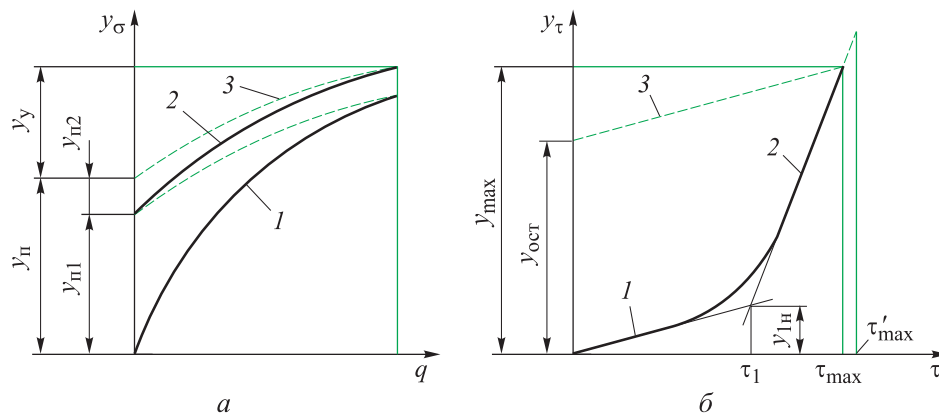


Рис. 1. Характеристики нормальных силовых смещений σ -элемента (а) и тангенциальных силовых смещений τ -элемента (б)

В общем виде по (2) определяется ХСС для нормального контакта. Характеристика первичного нагружения (кривая 1, см. рис. 1, а) явно нелинейная и при разгрузке по штриховой линии сохраняет остаточные пластические смещения y_{n1} . Повторное нагружение и разгрузка (кривые 2

и 3, см. рис. 1, а) вызывают значительно меньшие пластические смещения $y_{п2}$. В результате общая ХСС σ -элемента состоит из упругого y_y и пластического $y_{п}$ смещений. Последующие характеристики не будут значительно отличаться, если перед каждым повторным нагружением не было какого-либо динамического воздействия, связанного со смещением деталей в стыке.

Примем, что нормальный стык в опоре ШП является неподвижным. В работающем стыке число нагружений и разгрузок велико, поэтому в расчете можно принять остаточные неупругие смещения исчезающе малыми, а значит, контактные деформации будут иметь преимущественно упругий характер, описываемый выражением (2). Для упрощения примем за ХСС кривую 1 (см. рис. 1, а) после первого нагружения, как для нагрузки, так и разгрузки. В задаче исследуемый стык опоры примем несмазанным, поэтому он не будет зависеть от колебаний [2, 16].

Нормальное давление q в (2) определяют, как отношение нормальной силы F в стыке к его номинальной площади S . Для неровных поверхностей нормальное давление q следует определять для каждого участка отдельно. В общем виде жесткость нормального стыка определяется с учетом зависимости (2) по формуле

$$j_{\sigma 12} = \frac{F}{y_{\sigma 12}}. \quad (3)$$

Тангенциальная характеристика силовых смещений описывается с помощью τ -элемента [2, 19].

Описывая нормальные и тангенциальные контактные взаимодействия, авторы [18] предполагали, что все пики моделируемой шероховатости в зоне контакта имеют одинаковый радиус кривизны и высота пиков вероятностно (стохастически) распределена вокруг среднего значения.

При наличии динамических касательных нагрузок в контактных поверхностях накапливается и рассеивается энергия [11]. Остаточные силы упругости, как и напряжения, распределены между деталями, и снять эти напряжения полностью не позволяют распределенные силы трения в системе, в первую очередь, в контактных стыках [11].

Характеристики силовых смещений тангенциальной контактной жесткости (гистерезиса трения) изучены в [20]. Получены выражения для тангенциальных перемещений в случае отсутствия проскальзывания. Характеристики силовых смещений для контактов сферы, смещающейся между двумя параллельными плоскими пластинами, определены в [25],

причем значение рассеиваемой при этом энергии соответствовало значению, полученному в [20]. Для описания процессов трения перед началом скольжения применяется модифицированная модель Максвелла [26], использующая только два параметра для описания ХСС. В СССР касательными контактными явлениями, которые определялись как предварительные смещения, т. е. сдвиги поверхностей, предшествующие переходу к скольжению, занимался А.В. Верховский [27]. Более подробные сведения о подходах к моделированию касательной жесткости приведены, например, в [28].

Используемый в работе τ -элемент описывает взаимодействие двух поверхностей в направлении действия касательной силы [2, 16]. Модель τ -элемента представляет собой два последовательно расположенных элемента переменной жесткости (j_1 и j_2) и один элемент трения T , что соответствует эмпирической характеристике тангенциальных силовых смещений, приведенной на рис. 1, б. В общем виде контактное тангенциальное смещение поверхностей в стыке определяют по соотношению [16]:

$$y_\tau = k_\tau \tau, \quad (4)$$

где τ — тангенциальное напряжение в стыке; k_τ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом контактной касательной податливости, зависящий от качества обработки поверхностей стыка, нормального давления, наличия смазочного материала [16, 19].

Напряжение τ , входящее в (4), определяют как отношение тангенциальной силы T (силы трения) к площади номинальной опорной поверхности S :

$$\tau = \frac{T}{S}. \quad (5)$$

Коэффициент контактной податливости k_τ уменьшается при уменьшении шероховатости поверхности вследствие увеличения площади фактического контакта [16].

Упругие и упругопластические смещения приведены на рис. 1, б (участки 1 и 2). При касательном напряжении $\tau \leq \tau_1$ в стыке нагрузка и разгрузка осуществляются по участку 1. Упрощая представление о реальных ХСС тангенциальных элементов, на примере работы [2] можно записать, что предельное значение упругого участка контактных тангенциальных смещений определяется выражением

$$\tau_1 = f_y q, \quad (6)$$

где f_y — коэффициент, зависящий от коэффициента трения покоя [2] и коэффициента контактной касательной податливости $k_{\tau 1,2}$ в стыке сопряженных деталей. Упрощенно, напряжению τ_1 будет соответствовать упругое смещение $y_{1н}$ (см. рис. 1, б).

При касательном напряжении $\tau_{\max} > \tau > \tau_1$ в стыке нагрузка осуществляется по участку 2, а разгрузка — по участку 3, параллельному участку 1. При достижении касательным напряжением предельного значения τ'_{\max} в стыке начинается относительное скольжение сопряженных деталей. Перед началом скольжения упругопластическое остаточное смещение $y_{\text{ост}}$ (рис. 1, б) будет соответствовать напряжению τ_{\max} , а полное смещение — y_{\max} . Параметр τ'_{\max} определяют как произведение коэффициента трения покоя f и нормального давления q в стыке:

$$\tau'_{\max} = fq. \quad (7)$$

Тогда касательная контактная жесткость стыка определяется в зависимости от значений касательного напряжения τ , при $\tau \leq \tau_1$ жесткость $j_{\tau 1}$ стыка определяется равенством

$$j_{\tau 1} = \frac{S}{k_{\tau}}, \quad (8)$$

когда $\tau > \tau_1$, тангенциальная жесткость $j_{\tau 2н}$ при нагрузке вычисляется по формуле с принятым коэффициентом $20k_{\tau}$, полученным после обработки статистических экспериментальных данных из [2, 4, 16, 19],

$$j_{\tau 2н} = T \left(k_{\tau} \tau_1 + 20k_{\tau} \left(\frac{T}{S} - \tau_1 \right) \right)^{-1}, \quad (9)$$

а при разгрузке жесткость на этом участке характеристики определяется выражением

$$j_{\tau р} = T \left[k_{\tau} \left(\tau_1 + 20(\tau'_{\max} - \tau_1) - \tau'_{\max} + T/S \right) \right].$$

В настоящей работе принято допущение, что разгрузка будет осуществляться по уравнениям нагрузки (7)–(9), поскольку «...различие работ первичного и вторичного нагружений может проявляться в процессе резания в виде случайных смещений инструмента и заготовки, т. е. в виде случайной погрешности обработки. Вторичное нагружение не отражает всех свойств системы и не может быть принято для оценки ее жесткости...» [2]. «...При повторных нагружениях силовое смещение будет меньше, чем при первичном. Но жесткость системы остается постоянной и не зависит от числа повторных нагружений...» [2].

Задача о расчете жесткости опоры. В качестве объекта исследования (рис. 2) использован радиально-упорный шпиндельный ШП, отличающийся высокой точностью и относительно высокой жесткостью.

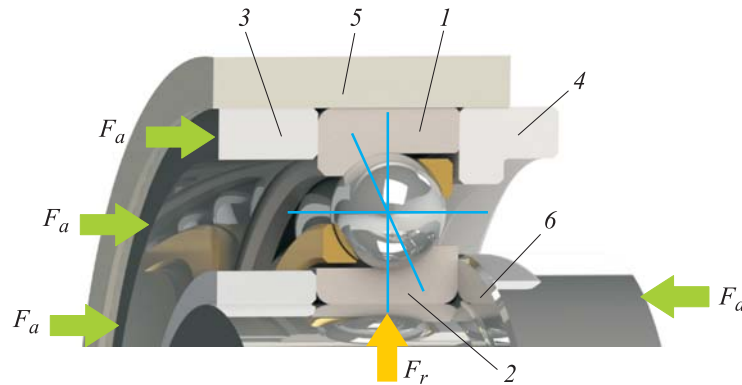


Рис. 2. Схема установки радиально-упорного ШП в ШУ:

1, 2 — наружное и внутреннее кольца; 3 — втулка; 4 — крышка; 5 — корпус ШУ;
6 — шпиндель (передняя кромка справа)

Наружное кольцо 1 подшипника посажено в корпус 5 с зазором, в осевом направлении закреплено слева втулкой 3 и справа крышкой 4, при этом кольцо 1 может перемещаться в радиальном направлении. Внутреннее кольцо 2 посажено на шпиндель 6 с натягом и значительных собственных силовых смещений не испытывает, поэтому его жесткостью можно пренебречь, как и жесткостью самого шпинделя 6. Основные контактные смещения в опоре ШУ будут происходить вследствие силового смещения наружного кольца 1 подшипника. Для упрощения расчетов жесткостью корпуса 5 можно пренебречь. На наружное кольцо 1 через втулку 3 действует осевая сила преднатяга F_a , а на внутреннее кольцо 2 радиальная нагрузка F_r и сила преднатяга F_a .

Упругие смещения колец (жесткость) такого ШП будут определяться с помощью квазистатического методического подхода, подробно описанного в [10]. Выбор обусловлен тем, что моделирование контактных явлений основано на работах П.М. Чернянского, которые хорошо подходят для статических задач из-за простоты математического аппарата и интуитивно понятны. Однако для динамических задач выбор ограничен и требует дальнейшего развития. Выбранная модель квазистатической жесткости подшипника достаточно проста и точна при условии полной загрузки всех шариков, в которой по найденным осевым δ_a и радиальным δ_r смещениям колец подшипника под действием осевой F_a и радиальной F_r нагрузок определяются осевая j_a и радиальная j_r жесткости:

$$j_a = \frac{F_a}{\delta_a \cdot 10^3}; \quad j_r = \frac{F_r}{\delta_r \cdot 10^3}. \quad (10)$$

Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных для определения жесткости высокоточных радиально-упорных ШП по квазистатической методике из [10] позволяет использовать ее для исследования влияния на жесткость опор ШУ контактных силовых смещений.

В поставленной автором задаче моделируется начало процесса нагружения наружного кольца подшипника под действием осевой силы преднатяга F_a и радиальной силы F_r , расчетная схема которой приведена на рис. 3, а.

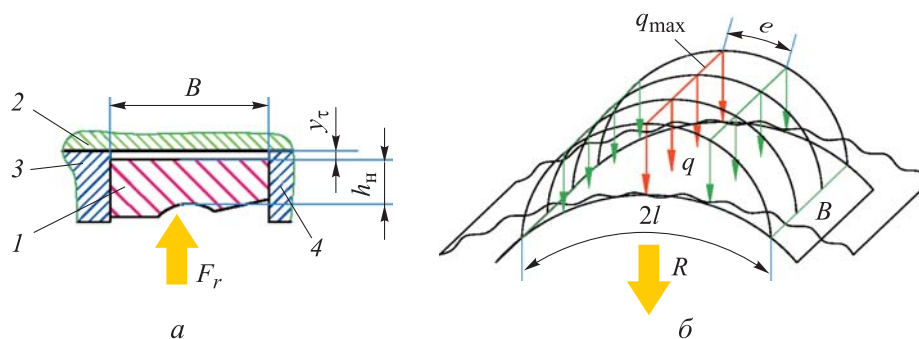


Рис. 3. Расчетные схемы подшипника (1 — наружное кольцо подшипника; 2 — корпус ШУ; 3 — втулка; 4 — крышка) (а) и нормального контакта цилиндрических тел (б)

Повторим, что для ШУ с пружинным натягом существует эффект осевого перемещения шпинделя при разгоне [7, 8]. Для текущей схемы так происходит из-за относительного перемещения колец подшипника: втулка 3, смонтированная на шпинделе между передним и задним подшипниками, уменьшает давление на кольцо 1 подшипника (см. рис. 3, а) и осевую силу преднатяга F_a (см. рис. 2) [6–8]. Ослабление контактного взаимодействия втулки 3 с кольцом 1 теоретически позволяет перемещаться последнему в радиальном направлении и вступать в нормальное взаимодействие с корпусом 2 ШУ. Для первого приближения будем считать, что в осевом направлении детали взаимодействуют только с помощью силы преднатяга F_a (см. рис. 2).

Примем, что наружное кольцо 1 расположено от корпуса 2 ШУ на расстоянии y_τ , равном y_{\max} (см. рис. 3, а), которое соответствует предельному силовому смещению до начала взаимного скольжения кольца 1, крышки 4 и втулки 3.

Необходимо условиться, что нормальный контакт наружного кольца 1 и корпуса 2 ШУ (рис. 3, б) осуществляется по части цилиндрической поверхности двух близких по диаметру цилиндрических поверхностей. Если дуга такого контакта составляет существенную часть окружности втулки, ни вал, ни втулка не могут рассматриваться как упругое полупространство. В таком случае при строгом подходе теория Герца дает ошибку, поскольку нарушаются условия ее применения [29]. Для очень точных решений следует использовать теорию Штаермана [30], рассмотренную в [29] и показавшую лучший результат, чем теория Герца. В теории Штаермана зазор между кольцом 1 и корпусом 2 ШУ представлен в виде степенного ряда, где учитываются члены более высокого порядка, чем в теории Герца, однако моделирование контактирующих цилиндров полупространствами ухудшает результат. Если принять такой подход, то распределение давлений в контакте кольца 1 и корпуса 2 ШУ (см. рис. 3, а) можно представить в виде плоского жесткого штампа [29], для которого характерны бесконечные давления на границе участка контакта. Поскольку запланирован учет жесткости кольца 1 подшипника [29] и при этом в контакте участвует больше двух тел, а использованная модель расчета жесткости подшипника основана на теории Герца, то автор полагает обоснованным использовать подход одного уровня точности (подход Герца) и схему контакта, приведенную на рис. 3, б. В общем виде [29] давление в любой точке цилиндрического стыка можно определить из уравнения [31]:

$$q(e, R) = \frac{2R}{\pi l(R)B} \left(1 - \left(\frac{e}{B} \right)^2 \right)^{0,5}. \quad (11)$$

Здесь e — длина дуги от центра стыка до любой его точки; R — сила, коллинеарная вектору q_{\max} в стыке; B — ширина цилиндрического стыка; $l(R)$ — половина длины дуги нормального контакта наружного кольца 1 и корпуса 2 ШУ,

$$l(R) = \left(\frac{4R}{\pi B \Sigma \rho_{н.к}} \left(\frac{2(1 - \mu^2)}{E} \right) \right)^{0,5},$$

где $\Sigma \rho_{н.к} = 2(D^{-1} - D_k^{-1})$ — сумма кривизн наружного кольца подшипника и корпуса (D и D_k — диаметры наружного кольца подшипника и отверстия корпуса); $E = \left((1 - \mu_1)^2 E_1^{-1} + (1 - \mu_2)^2 E_2^{-1} \right)^{-1}$ — приведен-

ный модуль упругости контактирующих деталей [29], $\mu_{1,2}$ и $E_{1,2}$ — коэффициент Пуассона и модуль упругости (Юнга) для первого и второго тел в контакте. Отметим, что выражение $(1 - \mu_2)^2$ называется модулем плоской деформации и для упрощения допускается использовать только модуль Юнга [29].

Наибольшее силовое смещение y_σ между наружным кольцом подшипника и корпусом наблюдается по вектору максимального давления q_{\max} в стыке (2). Кроме того, вектор q_{\max} в стыке шириной B , вызываемый нагрузкой F_r , перпендикулярен стыку по линии приложения этой силы. Значение q_{\max} определяется по (11) при $e = 0$:

$$q(R) = \frac{2R}{\pi l(R) B_{\max}}.$$

Тогда максимальное нормальное силовое смещение $y_{\sigma \max}$ в направлении действия силы F_r определим по (2) как

$$y_{\sigma \max} = c \left(\frac{2Rk}{\pi l(R) B} \right)^m. \quad (12)$$

Согласно (12), максимальное давление будет уменьшаться с увеличением дуги контакта $l(R)$.

Варианты контактного взаимодействия в системе подшипниковой опоры. Если рассмотреть случай нагружения подшипниковой опоры в радиальном направлении, при котором происходит уменьшение максимального монтажного радиального зазора (см. рис. 3, а), то можно найти три варианта силовых смещений, происходящих последовательно в три стадии для текущей задачи (рис. 4, а). Варианты взаимодействия в какой-то степени зависят от участков ХСС контактного касательного взаимодействия (см. рис. 1, б). Поверхности деталей всегда остаются шероховатыми даже после тщательной обработки [2], поэтому контактирующие поверхности на рис. 4 приведены условно шероховатыми.

1. Стадия касательных упругопластических контактных взаимодействий до начала скольжения. При наличии монтажного зазора y_τ между наружным кольцом 1 подшипника и корпусом 2 ШУ, равного y_{\max} , кольцо 1 взаимодействует с торцом втулки 3 (контакт 1–3) и торцом крышки 4 (контакт 1–4), тогда в направлении действия радиальной нагрузки F_r (см. рис. 4, а–в) соотношение сил имеет следующий вид:

$$F_r = T, \tag{13}$$

где $T = T_3 + T_4$ (T_3 и T_4 — силы трения на торце контакта втулки 3, крышки 4 и кольца 1).

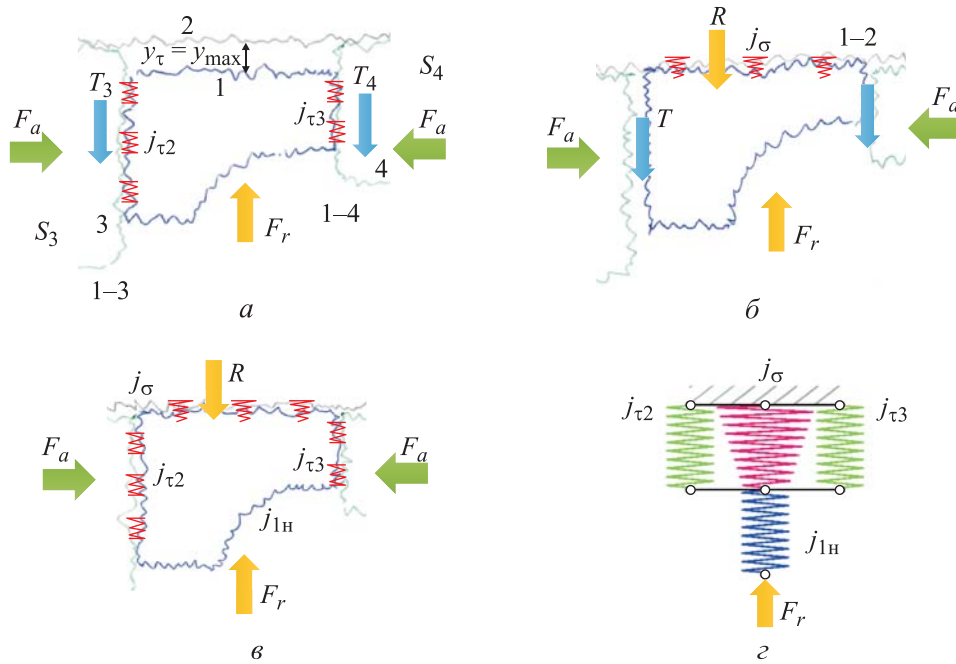


Рис. 4. Варианты взаимодействия в системе подшипниковой опоры:

- а* — касательные упругопластические контактные взаимодействия плоских поверхностей;
- б* — нормальные контактные взаимодействия цилиндрических поверхностей;
- в* — нормальные и касательные упругие взаимодействия;
- г* — структурная схема системы элементов подшипниковой опоры

В момент нагружения наружного кольца 1 подшипника радиальная нагрузка F_r совершает работу относительно упругих и упругопластических сил трения в стыках, поэтому общее касательное контактное напряжение τ от действующей силы трения T в стыках можно определить с учетом зависимостей (5) и (6):

$$\tau = \frac{T}{S} = f_y q = f_y \frac{2F_a}{S}, \tag{14}$$

где $S = S_3 + S_4$ — сумма площадей торцов кольца подшипника, участвующих в контактных касательных силовых смещениях, причем S_3 и S_4 — это площади со стороны большего торца втулки и меньшего торца крышки.

Касательные напряжения для стыков 1–3 и 1–4 (см. рис. 4, *а*) определяются выражениями:

$$\tau_3 = \frac{T_3}{S_3}; \quad \tau_4 = \frac{T_4}{S_4}. \quad (15)$$

Следует помнить, что фактические площади контакта будут отличаться от теоретических, поскольку погрешности отклонения формы двух деталей стыков изменяют реальную площадь контакта [15]. Общее касательное напряжение для двух стыков τ определяется выражением $\tau = \tau_3 + \tau_4$, как только τ достигнет предельной величины τ'_{\max} , вычисляемой по выражению (7) (см. рис. 1, б), сила трения T достигает критического значения T_{\max} и начинается относительное скольжение. Критическая сила трения T_{\max} для обоих стыков определяется с учетом (7):

$$T_{\max} = \tau'_{\max} S = 2F_a f. \quad (16)$$

Максимальная деформация для касательных силовых смещений y_{\max} до начала относительного скольжения кольца 1 подшипника, согласно характеристике тангенциальных силовых смещений (см. рис. 1, б), определяется по выражению (4):

$$y_{\max} = k_{\tau} \tau_1 + 20k_{\tau} (\tau'_{\max} - \tau_1). \quad (17)$$

Тогда с учетом (5), (6), (14) и расчетной схемы на рис. 4, б выражение (17) преобразуется в равенство

$$y_{\max} = k_{\tau} \frac{2F_a f_y}{S} + 20k_{\tau} \left(\frac{2F_a f}{S} - \frac{2F_a f_y}{S} \right). \quad (18)$$

Контактная касательная жесткость $j_{\tau \max}$ двух стыков к моменту начала скольжения определяется как отношение радиальной нагрузки F_r и соответствующего перемещения y_{\max} по выражению (18). Поскольку монтажный зазор y_{τ} между наружным кольцом 1 подшипника и корпусом 2 ШУ в начальном положении равен y_{\max} (см. рис. 4, а), то он полностью выбирается к моменту начала скольжения и прекращения контактного касательного взаимодействия, которое вырождается по выражениям (15) и (16) в трение скольжения T [2], тогда как кольцо 1 вступает в контактное взаимодействие с корпусом 2 ШУ и начинается нормальное контактное взаимодействие с силой трения T без участия касательного контакта.

2. Стадия нормального контактного взаимодействия близких по размеру цилиндрических поверхностей с участием силы трения. После начала скольжения кольца 1 подшипника относительно деталей 3, 4 и с появлением силы трения скольжения T для определения нормального контактного смещения между кольцом 1 и корпусом 2 ШУ сила реакции R (см. рис. 4, б) вычисляется по соотношению:

$$R = F_r - T = F_r - 2F_a f. \quad (19)$$

Нормальное силовое смещение y_σ в стыке между кольцом 1 и корпусом 2 ШУ определяется по выражению (12), тогда жесткость j_σ нормального стыка 1–2 определяется по соотношению (3) с использованием полученного значения контактного нормального силового смещения y_σ , а в качестве нагрузки используется реакция R :

$$j_\sigma = \frac{R^{1-m}}{c} \left(\frac{l(R) B \pi}{2k} \right)^m. \quad (20)$$

3. Стадия нормального и касательного контактных взаимодействий. Если принять, что наружное кольцо 1 (см. рис. 4, в) находится в контакте без зазоров одновременно с корпусом 2 ШУ, втулкой 3 и крышкой 4, тогда систему контактного взаимодействия стыков 1–2, 1–3 и 1–4 можно представить как систему упругих элементов (пружин) с известными жесткостями (рис. 4, з) [2].

Контактная жесткость опоры состоит из τ -элемента касательной жесткости $j_{\tau 2}$ контакта 2–3, τ -элемента касательной жесткости $j_{\tau 3}$ контакта 2–4, σ -элемента нормальной контактной жесткости j_σ контакта 1–2. Указанные элементы в системе взаимодействуют параллельно, поэтому их жесткость складывается, поскольку для параллельно установленных элементов жесткость системы равна сумме жесткостей всех ее элементов, а для последовательно установленных элементов обратная жесткость системы определяется через сумму обратных жесткостей ее элементов [2, 4].

Жесткость j_σ σ -элемента вычисляется по формуле (20). Жесткости $j_{\tau 2}$ и $j_{\tau 3}$ τ -элементов определяются по формулам (9) и (10) в зависимости от значения τ в стыках (ХСС, см. рис. 1, б): если значение силы трения T превышает T_{\max} , то начинается относительное скольжение и упругие элементы $j_{\tau 2}$ и $j_{\tau 3}$ вырождаются в элемент трения, а реакция R будет вычисляться с учетом силы трения скольжения по формуле (19). Найти силу T и реакцию R можно из условия равенства упругих силовых смещений $j_{\tau 2}$, $j_{\tau 3}$ и j_σ элементов, т. е. необходимо приравнять выражения (12) и (4), (5), определяющие смещение элемента j_σ и обобщенного элемента ($j_{\tau 2} + j_{\tau 3}$), принятого таким для упрощения.

Для трех последовательных стадий нагружения наружного кольца подшипника имеем систему из трех уравнений в зависимости от значений касательных напряжений в стыках:

$$c \left(\frac{2Rk}{\pi l(R)B} \right)^m = k_\tau \frac{T}{S} \quad \text{при } \tau \leq \tau_1; \quad (21)$$

$$c \left(\frac{2Rk}{\pi l(R)B} \right)^m = k_\tau \frac{2F_a f_y}{S} + 20k_\tau \left(\frac{T}{S} - \frac{2F_a f_y}{S} \right) \quad \text{при } \tau_1 < \tau \leq \tau_2; \quad (22)$$

$$R = F_r - 2F_a f; \quad \tau > \tau'_{\max}. \quad (23)$$

Для решения системы уравнений (21), (22) и (23) относительно R принимается эмпирический коэффициент $m = 0,5$, как для наиболее часто встречающихся контактирующих поверхностей [19]. Из выражений (21) и (11) сила реакции R определяется как

$$R = - \frac{2B k_\tau^4 \pi T^4 (\mu^2 - 1)}{c^4 E k^2 S^4 \Sigma \rho_{н.к}}, \quad (24)$$

где « $-$ » означает, что реакция направлена против действия силы трения T . Согласно (24), R в наибольшей степени увеличивается от силы трения T и коэффициента k_τ , при этом R в наибольшей степени уменьшается при увеличении коэффициента c и площади контакта S . Для принятой схемы расчета использовались данные для обработанных стальных деталей шлифованием из [19]: при $Ra = 1,25 \dots 0,32$ мкм выбрано среднее значение $k_\tau = 2,039$ мкм · мм²/Н; $f_y = 0,12$; $f = 0,18$.

Из выражения (22) и (11) сила реакции R с учетом упрощения определяется как

$$R = - \frac{32B k_\tau^4 \pi (19F_a f_y - 10T)^4 (\mu^2 - 1)}{c^4 E k^2 S^4 \Sigma \rho_{н.к}}. \quad (25)$$

Увеличение R также зависит и от осевой силы F_a . Полученные реакции позволяют определить контактные силовые смещения внешнего кольца подшипника с участием силы трения.

4. Суммарная жесткость опоры с учетом структуры рассматриваемой системы жесткостей элементов и силы трения. Собственная жесткость наружного кольца подшипника (см. рис. 4, з) определяется выражением

$$j_{1н} = \frac{F_r}{y_{к.н}}, \quad (26)$$

где упругая деформация $y_{к.н}$ наружного кольца в направлении действия силы F_r определяется равенством

$$y_{к.н} = \frac{10^3 F_r}{h_n El(R)} B,$$

где h_n — расстояние от точки контакта шарика с наружным кольцом до его поверхности (см. рис. 3, а).

По условию жесткости внутреннего кольца подшипника, шпинделя, корпуса ШУ, крышки и втулки не учитываются, поэтому радиальная контактная жесткость наружного кольца подшипника определяется по выражению

$$j_{к.ж} = \left((j_{\tau 2} + j_{\tau 3} + j_{\sigma})^{-1} + j_{1н}^{-1} \right)^{-1}, \quad (27)$$

поскольку, согласно схеме на рис. 4, з, его собственная радиальная жесткость $j_{1н}$ (26) взаимодействует последовательно по отношению к параллельно размещенным элементам $j_{\tau 2}$, $j_{\tau 3}$ и j_{σ} (см. рис. 4, з).

Полная или суммарная радиальная контактная жесткость опоры j_{Σ} определяется как обратная сумма жесткости $j_{к.ж}$ из выражения (27) и радиальной жесткости j_r радиально-упорного ШП по отношению (10) [10] в виде выражения

$$j_{\Sigma} = \left(\frac{1}{j_{к.ж}} + \frac{1}{j_r} \right)^{-1}. \quad (28)$$

Обсуждение полученных результатов. В качестве иллюстрации разработанного методического подхода на рис. 5 приведено сравнение экспериментально полученной радиальной жесткости шпиндельных ШП FAG XCS71914E (№ 1) и XCS71911E (№ 5) из [12] с предлагаемым подходом как с учетом контактных взаимодействий и сил трения по выражению (28), так и без такого учета — по выражению (10). Расчеты проводились для силовой схемы, приведенной на рис. 4, з.

Рассчитанные по методическому подходу из [10] значения (кривые 3 и 4, см. рис. 5) радиальных квазистатических жесткостей подшипников FAG XCS71914E (№ 1) и XCS71911E (№ 5) оказались завышенными по сравнению с экспериментально полученными значениями (кривые 1 и 2) радиальных жесткостей из [12] для таких же подшипников.

Предлагаемый в настоящей работе методический подход к определению значений радиальных жесткостей для рассматриваемых ШП, учитывающий контактную жесткость и трение в его опоре, по сравнению с экспериментальными данными жесткостей из [12], показал хорошую сходимость (кривые 5 и 6, см. рис. 5). Для ШП FAG XCS71914E (№ 1) и XCS71911E (№ 5)

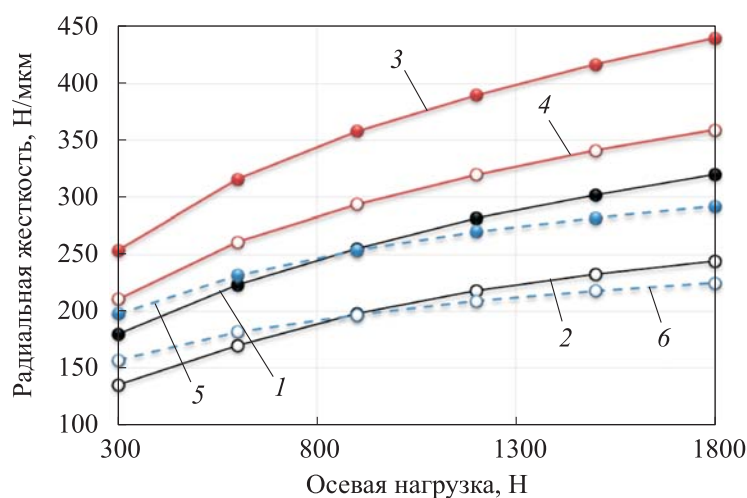


Рис. 5. Зависимости радиальной жесткости радиально-упорных шпиндельных ШП FAG XCS71914E (№ 1) и XCS71911E (№ 5) от осевой нагрузки:

1 и 2 — экспериментальные измерения [12], подшипники № 1 и № 5; 3 и 4 — методика без учета контактных явлений и трения [10], подшипники № 1 и № 5; 5 и 6 — предлагаемая методика, учитывающая контактную жесткость опор, подшипники № 1 и № 5

погрешность расчета значений радиальной жесткости опоры в функции преднатяга для легкого (300 Н) преднатяга составила 10 и 16 %, для среднего (900 Н) — 0,39 и 0,61 %, для тяжелого (1800 Н) — 8,8 и 7,8 %.

Значения радиальной жесткости ШП, рассчитанные по фактически предлагаемому методическому подходу, очень хорошо совпадают с полученными экспериментальными данными [12]. Радиальную жесткость ШП напрямую измерить невозможно. В работе [12] приведены результаты измерения силовых смещений шпинделя, а жесткость рассчитана как отношение известной нагрузки к измеряемому смещению шпинделя (10).

Необходимо отметить, что жесткость как свойство упругих систем не зависит от сил трения и способов определения [2], силы трения являются лишь эквивалентом сил упругости, они изменяют значение силовых смещений системы, но не изменяют ее жесткости [2]. Одновременное действие сил трения и заданной внешней нагрузки может привести к взаимному их сложению или вычитанию, что приведет к изменению силовых смещений подшипника. Если последние отнести к постоянной известной нагрузке, то будет казаться, что жесткость опоры изменилась, поэтому нельзя ставить в строгое соответствие силовые смещения и жесткость системы. Исходя из изложенного можно заключить, что в экспериментальные значения радиальной жесткости ШП [12] (см. рис. 5), кроме упругой

составляющей, входят контактные силовые смещения и силы трения, что подтверждается сравнением с предлагаемым методическим подходом.

Изложенное подтверждает предположение П.М. Чернянского [2]: «...всегда считалось, что жесткость как упругое свойство станков и технологических систем в целом достоверно определяется только экспериментально, то теперь вынуждены признать, что это не соответствует действительности. До настоящего времени не научились выделять силы упругости и упругие смещения, соответственно из внешних сил и суммарных силовых смещений, через которые определяется жесткость...». Полагаем, что данный вывод следует дополнить силами трения и контактными силовыми смещениями, как нормальными, так и касательными.

Еще одним примером применения предлагаемого методического подхода служит особо точный высокоскоростной подшипник NSK 7014 A5TYSULP4 очень близкого типоразмера к подшипнику FAG XCS71914E, валидированная радиальная жесткость которого рассчитана в [13]. Показанная кривой 1 на рис. 6 жесткость указанного подшипника получена с помощью более сложного квазидинамического подхода, в котором учитывается частота вращения подшипника: для приведенной кривой 1 частота соответствует 1000 об/мин.

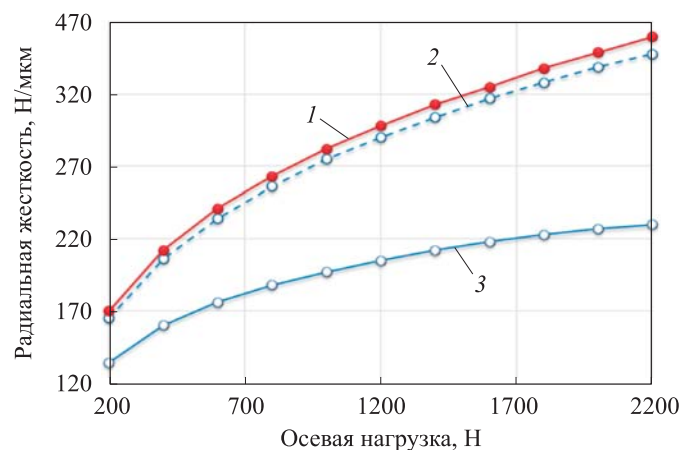


Рис. 6. Зависимость радиальной жесткости радиально-упорного высокоскоростного ШП NSK 7014 A5TYSULP4 от осевой нагрузки:

1 — методика [13] при 1000 об/мин; 2 — предлагаемая методика без учета контактных явлений и трения [10]; 3 — предлагаемая методика с учетом контактной жесткости опор

Значения радиальной жесткости, рассчитанные по более простой квазистатической методике из [10], показаны на рис. 6 (кривая 2). Сравнение двух методик оправданно, поскольку квазистатический подход из работы [10] допускает использование для небольших частот вращения

ШП. Полученные значения радиальных жесткостей по двум методикам для одного и того же подшипника совпали с точностью 3...4 % (для преднатяга 200...2200 Н). Значения радиальной жесткости, рассчитанные по предлагаемому методическому подходу с учетом контактных явлений и сил трения (кривая 3, см. рис. 6), меньше на 27, 45 и 57 % (преднатяги 200, 1200 и 2200 Н) значений на кривой 1.

Можно констатировать, что если рассчитанные по предлагаемому методическому подходу значения радиальной жесткости подшипника FAG XCS71914E очень близки значениям экспериментальных данных (кривая 1, см. рис. 5), то и для подшипника NSK 7014 A5 похожего типоразмера предложенный подход ожидаемо должен показывать аналогичные по точности результаты. Оказывается, для подшипника NSK 7014 A5 полученные значения жесткости оказались меньше на 57 %. Тогда, с учетом изложенного можно объяснить несовпадение значений жесткостей тем, что в экспериментальных значениях, используемых при определении радиальной жесткости подшипников, не учитываются упругие и силовые смещения, а также трение в контактах. Поэтому предлагаемый методический подход к расчету подшипника NSK 7014 A5 показывает заниженные значения, поскольку неучтенные контактные силовые смещения не используются при применении квазистатической и квазидинамической методик, хотя между собой значения жесткостей практически совпадают (погрешность до 3,5 %).

Предлагаемый методический подход к учету контактной жесткости и трения при расчете радиальной жесткости опоры высокоточного подшипника (кривая 3 на рис. 6) показывает, что фактическая радиальная жесткость опоры значительно меньше расчетной жесткости подшипника, особенно если в шпиндельных узлах происходит уменьшение осевого преднатяга [7], оценочная разность расчетной жесткости составляет 27...57 %.

В таком случае важно понимать, как при известной силовой схеме (см. рис. 4, з) изменяется радиальная жесткость опоры рассчитываемого подшипника NSK 7014 A5. Зависимость изменения радиальной жесткости опоры подшипника NSK 7014 A5, рассчитанной по квазистатической методике [10], а также с учетом контактных явлений и трения по полученному уравнению (28), показана на рис. 7.

Качественная картина изменения радиальной жесткости опоры для радиально-упорного ШП состоит из трех характерных участков (рис. 7). На участке А наблюдается наибольшая радиальная жесткость в зависимости от осевого преднатяга. Для небольших радиальных нагрузок (до 50 Н)

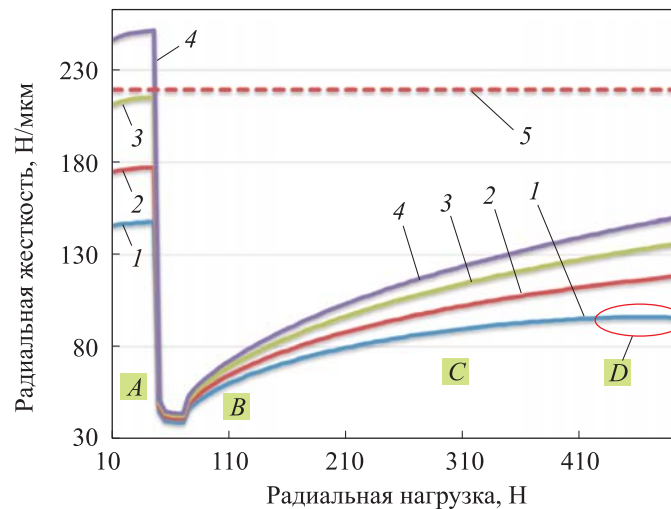


Рис. 7. Зависимость изменения радиальной жесткости радиально-упорного высокоскоростного ШП NSK 7014 A5 от радиальной нагрузки при различном осевом преднатяге для выражения (28):

1–5 для 245, 490, 1080, 2160 и 490 Н соответственно по квазистатической методике [10];

A — участок касательной контактной упругости; B — участок действия сил трения;

C — участок появления нормального контакта; D — область начала уменьшения радиальной жесткости опоры [7]

начальная жесткость будет тем больше, чем больше осевой преднатяг: от кривой 1 до кривой 4 для преднатяга от 245 до 2160 Н. При равенстве радиальной нагрузки 50 Н радиальная жесткость подшипника увеличивается в силу наличия упругих касательных силовых смещений. Кривой 5 обозначена радиальная жесткость, рассчитанная для подшипника по квазистатической методике [10] для преднатяга 490 Н, поэтому наблюдается стремление кривой 3 к кривой 5. На участке B (см. рис. 7) из-за достижения силой трения критического значения (16) происходит резкое уменьшение до ~ 40 Н/мм (для каждого преднатяга) рассчитанной жесткости, поскольку в этот момент основную жесткость определяют значительные упругопластические смещения (18), которые в основном зависят от условий трения, одинаковых для каждого преднатяга.

На участке C видно влияние на жесткость нормального контакта двух цилиндрических поверхностей близкого радиуса (наружного кольца ШП и корпуса ШУ) при постоянной силе трения для силовой схемы (19) в уравнении определения жесткости опоры (28). Результат с наибольшей жесткостью подшипника был получен для преднатяга 2160 Н (кривая 4, см. рис. 7). Увеличение радиальной жесткости происходит монотонно от значения радиальной нагрузки 70 до 500 Н, достигая 2/3 первоначаль-

ного значения (кривые 2 и 3, см. рис. 7). Интересно, что радиальная жесткость подшипника, рассчитанная для преднатяга 245 Н (кривая 1, см. рис. 7), имеет выраженный максимум в области D для радиальной нагрузки 460 Н, после которой начинается уменьшение радиальной жесткости данной опоры. Это объясняется изменением условий контакта тел качения, часть которых начинает выходить из зацепления [7, 10]. Для кривых 2, 3 и 4 также появляются максимумы, подобные области D , но для больших значений жесткости.

В заключение отметим, что приведенный на рис. 7 пример может быть достоверным только в области оговоренных допущений. В указанном примере более правильным было бы привести ХСС, т. е. зависимость изменения силовых смещений от изменения радиальной нагрузки, поскольку сила трения, участвующая в контакте, изменяет упругие силы, как если бы сила трения была эквивалентом приложенной нагрузки. Однако такой подход значительно увеличил бы объем работы, а имеющиеся экспериментальные данные приведены в виде зависимости жесткостей подшипников от приложенных к ним нагрузок.

В дополнение можно утверждать, что полученная теоретическая ХСС, приведенная в виде зависимости радиальной жесткости опоры качения с одним ШП, коррелирует с подобными экспериментальными характеристиками [8, 13, 32].

Заключение. Результаты показывают, что расчетные значения радиальной жесткости, используемые, например, при проектировании ШУ, на практике могут оказаться не такими, как предполагалось конструкторами изначально. Проведенное исследование опоры в виде системы подшипник с контактным взаимодействием и трением показало, что реальная жесткость опоры может до 2 раз отличаться от рассчитанного теоретического. При этом модели для анализа системы подшипник + контакты использовались достаточно простые, а задача ставилась с большим числом допущений и упрощений.

Предлагаемый подход с учетом контактной жесткости и трения имеет большие предсказательные возможности для определения радиальной жесткости опор или для описания уже существующих подшипников. Можно утверждать, что неточно выбранные значения жесткостей опор в ШУ при проектировании или программной коррекции его работы существенно влияют на точность обработки, поскольку такие важные параметры ШУ, как межопорное расстояние и число подшипников в опоре будут назначаться неверно вследствие неточных данных по значениям жесткостей опор.

Исследование показало, что фактически полученные экспериментальные значения силовых смещений подшипниковой опоры под действием внешней нагрузки для определения жесткости включают в себя значения упругих смещений колец подшипника, контактных смещений, в том числе и неупругих. Такие данные также содержат значения смещений из-за действия сил трения в контактах, поскольку влияют на финальный баланс смещений деталей в подшипниковой опоре. Поэтому отнесение значений внешней нагрузки к полученным смещениям определяют в виде жесткости опоры, хотя внешняя нагрузка не соотносится с силами трения, а смещения, вызывающие силы трения, не соотносятся с упругими смещениями несущей системы подшипника. Предложено такую жесткость именовать кажущейся жесткостью до момента разделения составляющих смещений и вызывающих их сил, поскольку, строго говоря, упругие свойства не могут зависеть от сил трения [2], а они в получаемых экспериментальных данных уже заложены. Кроме того, в работе на примере подшипника NSK 7014 A5 показано взаимодействие чисто упругих смещений колец подшипника с упругими и упругопластическими контактными смещениями и влиянием сил трения. При этом экспериментальные значения жесткости в зависимости от нагрузки качественно похожи на полученные в работе теоретические результаты.

Применение теории силовых смещений показывает, что подход, предложенный П.М. Чернянским, содержит элементы теории системного анализа, который при некотором усовершенствовании целесообразно использовать для проектирования узлов и агрегатов станочных и других прецизионных технологических машин.

Посвящается памяти профессора П.М. Чернянского, автора оригинальной теории силовых смещений в станкостроении

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abele E., Altintas Y., Brecher C. Machine tool spindle units. *CIRP Annals*, 2010, vol. 59, no. 2, pp. 781–802. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.05.002>
- [2] Чернянский П.М. Основы проектирования точных станков. Теория и расчет. М., Кнорус, 2020.
- [3] Чернянский П.М., Схиртладзе А.Г. Проектирование и ремонт шпиндельных узлов. М., Инфра-М, 2014.
- [4] Чернянский П.М., ред. Проектирование автоматизированных станков и комплексов. Т. 1. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
- [5] Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. СПб., СПбГТУ, 2001.

- [6] Zverev I., Pyoun Y.S., Lee K.B., et al. An elastic deformation model of high speed spindles built into ball bearings. *J. Mater. Process. Technol.*, 2005, vol. 170, no. 3, pp. 570–578. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.05.038>
- [7] Зверев И.А. Расчетно-экспериментальное исследование жесткости высокоскоростных шпинделей. *Вестник машиностроения*, 2020, № 9, с. 33–39. DOI: <https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-9-33-39>
- [8] Jedrzejewski J., Kwasny W. Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles. *CIRP Annals*, 2010, vol. 59, no. 1, pp. 377–382. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.03.026>
- [9] Горелик И.Г. Разработка методов расчета и повышения качества высокоскоростных шпиндельных узлов. Дис. ... канд. техн. наук. М., ЭНИМС, 1987.
- [10] Фролов А.В., Смирнов С.В. Моделирование квазистатической переменной жесткости шарикоподшипников шпиндельных узлов металлорежущих станков. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2018, № 6 (123), с. 44–59. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2018-6-44-59>
- [11] Чернянский П.М. Последствие механической системы станков. *Вестник машиностроения*, 2013, № 1, с. 57–59.
- [12] Cao Y. Modeling of high-speed machine-tool spindle systems. University of British Columbia, 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.14288/1.0080741>
- [13] Yang Z., Chen H., Yu T. Effects of rolling bearing configuration on stiffness of machine tool spindle. *J. Mech. Eng. Sc.*, 2018, vol. 232, no. 5, pp. 775–785. DOI: <https://doi.org/10.11770954406217693659>
- [14] Соколовский А.П. Жесткость в технологии машиностроения. М., МАШГИЗ, 1946.
- [15] Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М., Машиностроение, 1981.
- [16] Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. М., Машиностроение, 1971.
- [17] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York, McGrawHill, 1951.
- [18] Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1966, vol. 295, no. 1442, pp. 300–311. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1966.0242>
- [19] Проников А.С., ред. Проектирование металлорежущих станков и станочных систем. Т. 1. Проектирование станков. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.
- [20] Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, no. 3, pp. 259–268. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4009973>
- [21] Sherif H.A., Kossa S.S. Relationship between normal and tangential contact stiffness of nominally flat surfaces. *Wear*, 1991, vol. 151, no. 1, pp. 49–62. DOI: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(91\)90345-U](https://doi.org/10.1016/0043-1648(91)90345-U)
- [22] Królikowski J., Szczepiek J. Assessment of tangential and normal stiffness of contact between rough surfaces using ultrasonic method. *Wear*, 1993, vol. 160, no. 2, pp. 253–258. DOI: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(93\)90428-O](https://doi.org/10.1016/0043-1648(93)90428-O)

- [23] Baltazar A., Rokhlin S.I., Pecorari C. On the relationship between ultrasonic and micromechanical properties of contacting rough surfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 2002, vol. 50, no. 7, pp. 1397–1416. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00119-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00119-3)
- [24] Raffa M.L., Lebon F., Vairo G. Normal and tangential stiffnesses of rough surfaces in contact via an imperfect interface model. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 87, pp. 245–253. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.01.025>
- [25] Goodman L.E., Brown C.B. Energy dissipation in contact friction: constant normal and cyclic tangential loading. *J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, no. 1, pp. 17–22. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3636453>
- [26] Ruderman M., Bertram T. Modified Maxwell-slip model of presliding friction. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, vol. 44, no. 1, pp. 10764–10769. DOI: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00309>
- [27] Верховский А.В. Явление предварительных смещений при трогании несмазанных поверхностей с места. *Журн. прикл. физики*, 1926, т. 13, № 3-4, с. 311–315.
- [28] Sevostianov I., Kachanov M. Normal and tangential compliances of interface of rough surfaces with contacts of elliptic shape. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 9, pp. 2723–2736. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.12.024>
- [29] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., Мир, 1989.
- [30] Штаерман И.Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. *Докл. АН СССР*, 1939, т. 25, № 5, с. 360–362.
- [31] Перель Л.Я., Филатов А.А. Подшипники качения. Расчет, проектирование и обслуживание опор. М., Машиностроение, 1992.
- [32] Zhang J., Fang B., Hong J., et al. A general model for preload calculation and stiffness analysis for combined angular contact ball bearings. *J. Sound Vib.*, 2017, vol. 411, pp. 435–449. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.09.019>

Фролов Александр Владимирович — канд. техн. наук, начальник отдела АО «ЦНИИАГ» (Российская Федерация, 127018, Москва, ул. Советской Армии, д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фролов А.В. Особенности применения теории силовых смещений к расчету контактной жесткости опоры шпиндельного радиально-упорного шарикоподшипника. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2022, № 3 (142), с. 100–128. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2022-3-100-128>

FEATURES OF APPLYING THE FORCE DISPLACEMENT THEORY TO THE CONTACT STIFFNESS CALCULATION FOR THE SPINDLE ANGULAR CONTACT BALL BEARING SUPPORT

A.V. Frolov

frolov@frolov.moscow

JSC “Central Research Institute of Automation and Hydraulics”,
Moscow, Russian Federation

Abstract

Contact stiffness is an important parameter for describing the interaction of plenty precise engineering solutions, for example, for machine-tool manufacture, the most important element of the carrier system is the spindle assembly supports, largely determining the accuracy of machining parts on the machine. The article considers an example of a system approach to describing the variable stiffness of a high-precision spindle bearing, combining an analytical approach to calculating the variable quasi-static stiffness of an angular contact ball bearing and a methodological approach that takes into account the contact normal and tangential force displacements of the upper bearing ring while considering the friction force for tangential interactions. The proposed system approach to calculating the stiffness of a ball bearing support is based on fairly simple models, in particular, the apparatus proposed by Professor P.M. Chernyanskiy, describing the phenomena of changing the spindle supports stiffness. These changes were experimentally obtained and weren't described in earlier works. It is shown that the experimental stiffness consists of elastic and contact components, depending on the friction forces, therefore, the concept of apparent stiffness is introduced for data that are not taken into account in the processes under study. The effect of the axial displacement of the spindle is explained on the basis of contact interactions in the support of the spindle unit. The resulting analytical system model was tested on well-known bearing supports and the obtained stiffness solutions were compared with validated experimental data from open sources

Keywords

Ball bearing, support, contact stiffness, friction, force displacement theory

Received 15.09.2021

Accepted 12.01.2022

© Author(s), 2022

REFERENCES

- [1] Abele E., Altintas Y., Brecher C. Machine tool spindle units. *CIRP Annals*, 2010, vol. 59, no. 2, pp. 781–802. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.05.002>
- [2] Chernyanskiy P.M. Osnovy proektirovaniya tochnykh stankov. Teoriya i raschet [Principles of precision machine tools design. Theory and calculation]. Moscow, Knorus Publ., 2020.
- [3] Chernyanskiy P.M., Skhirtladze A.G. Proektirovanie i remont shpindel'nykh uzlov [Engineering and repair of spindle units]. Moscow, Infra-M Publ., 2014.
- [4] Chernyanskiy P.M., ed. Proektirovanie avtomatizirovannykh stankov i kompleksov. T. 1 [Design of automated machine tools and complexes. Vol. 1]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014.
- [5] Volkova V.N., Denisov A.A. Osnovy teorii sistem i sistemnogo analiza [Basics of system theory and analysis]. St. Petersburg, SPbSTU Publ., 2001.
- [6] Zverev I., Pyoun Y.S., Lee K.B., et al. An elastic deformation model of high speed spindles built into ball bearings. *J. Mater. Process. Technol.*, 2005, vol. 170, no. 3, pp. 570–578. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.05.038>
- [7] Zverev I.A. Computational-experimental research of the stiffness of high-speed spindles. *Vestnik mashinostroeniya*, 2020, no. 9, pp. 33–39 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-9-33-39>
- [8] Jedrzejewski J., Kwasny W. Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles. *CIRP Annals*, 2010, vol. 59, no. 1, pp. 377–382. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.03.026>
- [9] Gorelik I.G. Razrabotka metodov rascheta i povysheniya kachestva vysokoskorostnykh shpindel'nykh uzlov. Dis. kand. tekhn. nauk [Development of calculation method and raising efficiency of high speed spindle units. Cand. Sc. (Eng.). Diss.]. Moscow, ENIMS, 1987 (in Russ.).
- [10] Frolov A.V., Smirnov S.V. Simulating variable quasistatic stiffness of machine tool spindle unit. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2018, no. 6 (123), pp. 44–59 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2018-6-44-59>
- [11] Chernyanskiy P.M. Residual effect of machine tool station mechanical system. *Vestnik mashinostroeniya*, 2013, no. 1, pp. 57–59 (in Russ.).
- [12] Cao Y. Modeling of high-speed machine-tool spindle systems. University of British Columbia, 2006. DOI: <http://dx.doi.org/10.14288/1.0080741>
- [13] Yang Z., Chen H., Yu T. Effects of rolling bearing configuration on stiffness of machine tool spindle. *J. Mech. Eng. Sc.*, 2018, vol. 232, no. 5, pp. 775–785. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954406217693659>
- [14] Sokolovskiy A.P. Zhestkost' v tekhnologii mashinostroeniya [Stiffness in mechanical engineering technology]. Moscow, MASHGIZ Publ., 1946.
- [15] Demkin N.B., Ryzhov E.V. Kachestvo poverkhnosti i kontakt detaley mashin [Surface quality and contact of machine parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981.

- [16] Levina Z.M., Reshetov D.N. Kontaktnaya zhestkost' mashin [Contact stiffness of the machines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971.
- [17] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. New York, McGrawHill, 1951.
- [18] Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1966, vol. 295, no. 1442, pp. 300–311. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1966.0242>
- [19] Pronikov A.S., ed. Proektirovanie metallorezhushchikh stankov i stanochnykh sistem. T. 1. Proektirovanie stankov [Design of metal-cutting machines and machine tools systems. Vol. 1. Machine tool design]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1994.
- [20] Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, no. 3, pp. 259–268. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4009973>
- [21] Sherif H.A., Kossa S.S. Relationship between normal and tangential contact stiffness of nominally flat surfaces. *Wear*, 1991, vol. 151, no. 1, pp. 49–62. DOI: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(91\)90345-U](https://doi.org/10.1016/0043-1648(91)90345-U)
- [22] Królikowski J., Szczepek J. Assessment of tangential and normal stiffness of contact between rough surfaces using ultrasonic method. *Wear*, 1993, vol. 160, no. 2, pp. 253–258. DOI: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(93\)90428-O](https://doi.org/10.1016/0043-1648(93)90428-O)
- [23] Baltazar A., Rokhlin S.I., Pecorari C. On the relationship between ultrasonic and micro-mechanical properties of contacting rough surfaces. *J. Mech. Phys. Solids*, 2002, vol. 50, no. 7, pp. 1397–1416. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00119-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00119-3)
- [24] Raffa M.L., Lebon F., Vairo G. Normal and tangential stiffnesses of rough surfaces in contact via an imperfect interface model. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 87, pp. 245–253. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.01.025>
- [25] Goodman L.E., Brown C.B. Energy dissipation in contact friction: constant normal and cyclic tangential loading. *J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, no. 1, pp. 17–22. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3636453>
- [26] Ruderman M., Bertram T. Modified Maxwell-slip model of presliding friction. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, vol. 44, no. 1, pp. 10764–10769. DOI: <https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.00309>
- [27] Verkhovskiy A.V. The phenomenon of preliminary displacements when starting non-greased surfaces from the spot. *Zhurn. prikl. fiziki*, 1926, vol. 13, no. 3-4, pp. 311–315 (in Russ.).
- [28] Sevostianov I., Kachanov M. Normal and tangential compliances of interface of rough surfaces with contacts of elliptic shape. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 9, pp. 2723–2736. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.12.024>
- [29] Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge, University Press, 1987.
- [30] Shtaerman I.Ya. Hertz theory of local deformations under compression of elastic bodies. *Dokl. AN SSSR*, 1939, vol. 25, no. 5, pp. 360–362 (in Russ.).
- [31] Perel' L.Ya., Filatov A.A. Podshipniki kacheniya. Raschet, proektirovanie i obsluzhivanie opor [Ball bearings. Calculation, engineering and supports maintenance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992.

[32] Zhang J., Fang B., Hong J., et al. A general model for preload calculation and stiffness analysis for combined angular contact ball bearings. *J. Sound Vib.*, 2017, vol. 411, pp. 435–449. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.09.019>

Frolov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Head of Department, JSC “Central Research Institute of Automation and Hydraulics” (Sovetskoy Armii ul. 5, Moscow, 127018 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Frolov A.V. Features of applying the force displacement theory to the contact stiffness calculation for the spindle angular contact ball bearing support. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2022, no. 3 (142), pp. 100–128 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2022-3-100-128>