УДК 629.7+623:001.51 DOI: 10.18698/0236-3941-2021-1-4-19

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГРУППОЙ БЕСПИЛОТНЫХ ПЛАНИРУЮЩИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В.Т. Грумондз[1] v.grumondz@gmail.com
Е.И. Карпежников[2] karpezhnikov@rambler.ru

[1] **МАИ, Москва, Российская Федерация**
[2] **АО «ГНПП «Регион», Москва, Российская Федерация**

Аннотация

Рассмотрен алгоритм управления группой беспилотных планирующих летательных аппаратов, отличительной особенностью которых является отсутствие двигательной установки. Полет совершается за счет использования запаса полной механической энергии, полученной беспилотным планирующим летательным аппаратом в момент воздушного старта. Задача группового полета с автономностью каждого летательного аппарата из группы в настоящее время является актуальной. Создание алгоритма управления группой беспилотных планирующих летательных аппаратов и формирование траектории каждого аппарата позволяет решать широкий круг практических задач. Настоящая работа предполагает постановку задачи, включающую в себя максимизацию дальности полета с заданием граничных условий на концах траекторий. Траектория каждого беспилотного планирующего летательного аппарата из группы формируется с помощью задания опорной функции для каждой фазовой координаты (x_g, y_g, z_g). Максимизация дальности полета группы осуществляется в результате решения краевой задачи методом Ритца — Галёркина, основанным на оптимизации функции нескольких переменных, и в отличие от классических методов оптимизации позволяет решать рассматриваемую оптимизационную задачу с достаточной в практическом смысле точностью, не требуя для своей реализации больших вычислительных ресурсов. Данный метод существенно отличается от ранее известных работ как в части постановки задачи, так и в части требований, предъявляемых к динамическим возможностям летательного аппарата

Ключевые слова

Беспилотный планирующий летательный аппарат, групповое наведение, максимизация дальности полета, пространственное движение, метод Ритца — Галёркина

Поступила 11.09.2020
Принята 15.10.2020

Введение. Вопросам управления группой беспилотных летательных аппаратов (ЛА) посвящено достаточно большое число работ. Среди них в первую очередь следует отметить работы [1–13], для которых характерно большое разнообразие постановок задач группового применения беспилотных ЛА. В этих работах в качестве беспилотных ЛА рассматриваются ракеты, т. е. ЛА, снабженные силовой установкой. В настоящей работе изучаются задачи управления полетом и оптимизации траекторий наведения беспилотных планирующих ЛА (БПЛА), не имеющих двигателя, что является важной отличительной особенностью, существенно влияющей на динамику и управление полетом БПЛА на всех участках траектории движения, а также и на весь алгоритм решения задачи в целом. Такие БПЛА составляют отдельный класс ЛА, задачи группового применения которых содержат дополнительные трудности, требуют отдельных постановок и специального исследования.

Как правило, старт БПЛА происходит с некоторого воздушного носителя. Если скорости движения носителя малы (менее 50 м/с), то БПЛА массой более 50 кг оснащаются разгонными блоками. Таким образом, в любом случае движение БПЛА совершается только благодаря использованию запаса полной механической энергии, полученной в момент старта от носителя или от носителя совместно с разгонным блоком. Данная особенность накладывает ряд жестких ограничений на движение БПЛА по траектории, в том числе на его стабилизацию, ограничивает его маневренность и управляемость.

В современной практике распространен подход к разработке БПЛА как элемента авиационного комплекса, способного выполнять разнообразные задачи в широком диапазоне эксплуатационных режимов. Одним из существенных способов увеличения эффективности БПЛА является их применение в группе [4–14], что совершенно естественно. В частности, например, очевидным способом противодействия современным комплексам противовоздушной обороны, способным решать задачи распределения целей и их ранжирования по степени важности [4–13], является увеличение состава группы БПЛА и одновременное выполнение летной операции всеми участниками группы. В настоящей работе задачи группового применения БПЛА рассматриваются с учетом максимизации дальности полета всей группы и одновременности подхода к конечной точке траектории (выполнения летной операции) всеми участниками группы. Разработанные алгоритмы управления движением и наведения справедливы для БПЛА любой аэродинамической схемы и могут использоваться как для группового, так и для одиночного применения БПЛА.

Прежде чем сформулировать постановку задачи, введем некоторое обобщенное понятие цели, обусловленное требованием подхода участников группы к конечной области траектории с различными углами Ψ и Θ курса и наклона траектории, а также с различными конечными скоростями V. Обобщим понятие точки интереса (ТИ), которое обычно используется в подобных задачах (см., например, работы [14–19] и др.), и введем наряду с ним понятие области интереса, представляющей собой в рассматриваемой задаче прямой круговой конус, обращенный вершиной вниз (назовем его конусом прицеливания), вершина которого имеет координаты $s_{\text{ТИ}} = (x_{g\text{ТИ}}, y_{g\text{ТИ}}, z_{g\text{ТИ}})$ в трехмерном пространстве и является ТИ в традиционном смысле [14–19]. Высоту конуса прицеливания примем равной длине БПЛА, тогда радиус основания будет зависеть от заданного угла $\Theta_{\text{ТИ}}$ подхода БПЛА к цели. На окружности, образующей основание конуса, разместим для каждого i-го ($i = 1, \ldots, n$) БПЛА из группы промежуточную точку наведения (ТИ в обычном смысле) $s_{i\text{к}} = \left(\Theta_{i\text{к}}, \Psi_{i\text{к}}, V_{i\text{к}}, x_{gi\text{к}}, y_{gi\text{к}}, z_{gi\text{к}}\right)$. Положение каждой промежуточной n-й точки должно назначаться в каждом отдельном случае в соответствии с общей постановкой задачи. Предложенная интерпретация цели будет необходима в дальнейшем для определения стороны подхода к цели каждого БПЛА из группы.

Постановка задачи. Пусть существует некоторое число n БПЛА $B_1, B_2, \ldots, B_i, \ldots, B_n$. Каждый БПЛА начинает движение в своей точке пространства $s_{i0} = \left(\Theta_{i0}, \Psi_{i0}, V_{i0}, x_{gi0}, y_{gi0}, z_{gi0}\right)$ в моменты времени $t_i = t_1 + (i - 1)\Delta t$ ($i = 1, \ldots, n$) и движется до общей для всех ТИ в течение времени $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_n$, соответственно каждый по своей траектории $L_1, L_2, \ldots, L_i, \ldots, L_n$.

Для каждого i-го БПЛА заданной аэродинамической схемы требуется сформировать траекторию полета и выбрать момент старта так, чтобы достижение ТИ $s_{\text{ТИ}} = \left(\Theta_{i\text{ТИ}}, \Psi_{i\text{ТИ}}, V_{i\text{ТИ}}, x_{gi\text{ТИ}}, y_{gi\text{ТИ}}, z_{gi\text{ТИ}}\right)$ всеми БПЛА произошло в единый момент времени с точностью до величины Δ, которая не должна превышать заданной величины Δ^* ($\Delta \le \Delta^*$), а дальность полета группы была бы максимальной.

Предполагается, что старт всех БПЛА осуществляется последовательно в направлении ТИ $s_{\text{ТИ}}$ с носителя, движущегося на постоянной высоте с постоянной скоростью в направлении ТИ так, что вектор путевой скорости каждого БПЛА группы в момент старта направлен на нее. В такой постановке максимальная дальность полета группы ЛА определяется максимальной дальностью полета первого БПЛА группы.

Для каждого очередного БПЛА точки $s_{i\text{к}} = (\Theta_{i\text{к}}, \Psi_{i\text{к}}, V_{i\text{к}}, x_{gi\text{к}}, y_{gi\text{к}}, z_{gi\text{к}})$ будут определяться следующим образом:

$$\Theta_{i\text{к}} = \Theta_{\text{з}};\ \ \Psi_{i\text{к}} = \Psi_{(i-1)\text{к}} + \Delta\Psi_{\text{к}};\ \ V_{i\text{к}} = V_{\text{з}};$$

$$x_{gi\text{к}} = x_{g(i-1)\text{к}} \cos\Delta\Psi_{\text{к}} - z_{g(i-1)\text{к}} \sin\Delta\Psi_{\text{к}};\ \ y_{gi\text{к}} = L_{\text{БПЛА}};$$

$$z_{gi\text{к}} = x_{g(i-1)\text{к}} \sin\Delta\Psi_{\text{к}} - z_{g(i-1)\text{к}} \cos\Delta\Psi_{\text{к}}.$$

Движение центра масс БПЛА описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot V(t) = g(n_{xa} - \sin\Theta);\\
&\dot\Theta(t) = g(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta)/V;\\
&\dot\Psi(t) = -gn_{ya}\sin\gamma / V\cos\Theta;\\
&\dot x_g(t) = V\cos\Theta\sin\Psi;\\
&\dot y_g(t) = V\sin\Theta;\\
&\dot z_g(t) = -V\cos\Theta\sin\Psi,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$n_{xa} = -\frac{X_a}{mg};\ \ n_{ya} = \frac{Y_a}{mg};\ \ X_a = \frac{C_x\rho V^2}{2};\ \ Y_a = \frac{C_y\rho V^2}{2}.$$

Как и в работах [2, 3], перейдем в системе уравнений (1) к новому аргументу τ, который связан с переменной t соотношением $\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&V'(\tau) = g(n_{xa} - \sin\Theta)/\lambda;\\
&\Theta'(\tau) = g(n_{ya}\cos\gamma - \cos\Theta)/(\lambda V);\\
&\Psi'(\tau) = -gn_{ya}\sin\gamma/(\lambda V\cos\Theta);\\
&x'_g(\tau) = V\cos\Theta\sin\Psi/\lambda;\\
&y'_g(\tau) = V\sin\Theta/\lambda;\\
&z'_g(\tau) = -V\cos\Theta\sin\Psi/\lambda;\\
&t'(\tau) = 1/\lambda.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и далее верхним штрихом обозначены производные по аргументу τ.

Для решения сформулированной задачи будем использовать прямой вариационный метод решения краевых задач Ритца — Галёркина [1], одним из основных этапов которого является выбор набора базисных функций, формирующих траекторию полета БПЛА.

Зная траекторию $x_g(\tau)$, $y_g(\tau)$, $z_g(\tau)$, можно определить силы и управляющие функции БПЛА в любой точке заданной траектории. Для этого из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (2) выведем следующие кинематические соотношения:

$$\sin\Theta = \frac{\lambda y'_g}{V};\ \sin\Psi = -\frac{z'}{\sqrt{x'^2_g + z'^2_g}};$$

$$\cos\Theta = \frac{\lambda\sqrt{x'^2_g + z'^2_g}}{V};\ \cos\Psi = \frac{x'_g}{\sqrt{x'^2_g + z'^2_g}},$$

продифференцировав которые по τ, получим:

$$\Theta' = \frac{y''_g(x'^2_g + z'^2_g) - y'_g(x'_g x''_g + z'_g z''_g)}{(x'^2_g + y'^2_g + z'^2_g)^{3/2}\cos\Theta};$$

$$\Psi' = -\frac{\cos^2\Psi(x'_g z''_g - x''_g z'_g)}{x'_g{}^2};$$

$$\lambda' = \frac{V'(x'^2_g + y'^2_g + z'^2_g) - V(x'_g x''_g + y'_g y''_g + z'_g z''_g)}{(x'^2_g + y'^2_g + z'^2_g)^{3/2}}.$$

В качестве управляющих функций будем использовать угол крена γ и перегрузку n_{ya}:

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda\Psi\cos\Theta}{\lambda\Theta' + g\cos\Theta / V}\right);\ n_{ya} = \frac{\lambda V\Theta' + g\cos\Theta}{g\cos\gamma}. \qquad (3)$$

Метод решения задачи. Рассматриваемая задача относится к классу краевых задач динамики полета. Движение БПЛА задано системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2) $x'_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m)$, $i = 1, 2, ..., n$; $m < n$, удовлетворяющих начальным $x(\tau_0) = [x_1(\tau_0), x_2(\tau_0), ..., x_n(\tau_0)]$ и конечным $x(\tau_к) = [x_1(\tau_к), x_2(\tau_к), ..., x_n(\tau_к)]$ условиям. Известны также технические характеристики БПЛА $p_т = (p_{т1}, p_{т2}, ..., p_т)$.

Требуется найти оптимальную траекторию, доставляющую экстремальное значение заданному функционалу $J(x(\tau)) = \int_{\tau_0}^{\tau_к} f_0(x, u)\,d\tau \to \max$, и соответствующее этой оптимальной траектории управление $U(\tau) = [u_1, u_2, ..., u_m]$.

Применительно к исследуемой задаче $x_1 = V$, $x_2 = \Theta$, $x_3 = \Psi$, $x_4 = x_g$, $x_5 = y_g$, $x_6 = z_g$ управляющими функциями являются переменные $u_1 = n_{ya}$ и $u_2 = \gamma$. К техническим характеристикам БПЛА относятся характерная площадь S и аэродинамические характеристики C_{ya} (α, M) и C_{xa} (α, M), которые в рассматриваемой задаче считаются известными.

Суть прямого метода Ритца заключается в поиске экстремума некоторого функционала при определенных условиях в определенном классе базисных функций, от выбора которых зависит итоговое квазиоптимальное решение. Функции, которые задаются в качестве базисных, должны быть непрерывными, однозначными и, по крайней мере, дважды дифференцируемыми на всем интервале поиска экстремума. Кроме того, базисные функции должны содержать несколько варьируемых параметров, с помощью которых можно изменять характер функции в выбранном классе.

Идея применения метода Ритца — Галёркина для решения задач динамики полета самолета рассматривалась в ряде работ (например, [2, 3]). При решении задачи, изучаемой в настоящей работе, базисные функции будут формировать траекторию полета каждого БПЛА группы. Отметим, что поскольку в составе БПЛА отсутствует силовая установка, базисные функции, формирующие траекторию его движения, должны быть достаточно плавно меняющимися, способствующими минимизации потерь энергии при совершении маневров. Эта особенность требует дополнительного исследования и классификации базисных функций по типам маневров БПЛА. Вслед за работой [2] выберем в качестве базисных функций полиномы, состоящие из трех кубических сплайнов. Такая аппроксимация будет иметь три характерных интервала (τ_{m0}, τ_{m1}), (τ_{m1}, τ_{m2}), (τ_{m2}, $\tau_{m\text{к}}$), а сами базисные функции и ее первые и вторые производные примут следующий вид:

$$
\begin{gathered}
x_m(\tau) = x_{m0} + x'_{m0}\tau + x''_{m0}\frac{\tau^2}{2} + \frac{a_{m1}\tau^3}{6} + k_{m1}\frac{a_{m2}(\tau-\tau_{m1})^3}{6} + k_{m2}\frac{a_{m3}(\tau-\tau_{m2})^3}{6};\\
x'_m(\tau) = x'_{0m} + x''_{0m}\tau + \frac{a_{m1}\tau^2}{2} + k_{m1}\frac{a_{m2}(\tau-\tau_{m1})^2}{2} + k_{m2}\frac{a_{m3}(\tau-\tau_{m2})^2}{2}; \qquad (4)\\
x''_m(\tau) = x''_{m0} + a_{m1}\tau + k_{m1}a_{m2}(\tau-\tau_{m1}) + k_{m2}a_{m3}(\tau-\tau_{m2}),
\end{gathered}
$$

где

$$
k_{m1} = \begin{cases} 0 \text{ при } \tau \le \tau_{m1};\\ 1 \text{ при } \tau > \tau_{m1}; \end{cases} \quad k_{m2} = \begin{cases} 0 \text{ при } \tau \le \tau_{m2};\\ 1 \text{ при } \tau > \tau_{m2}; \end{cases}
$$

$$a_{m1}=\frac{6b_{m3}-2b_{m2}(2\overline{\tau}-\tau_{m1}-\tau_{m2})+b_{m1}(\overline{\tau}-\tau_{m1})(\overline{\tau}-\tau_{m2})}{\overline{\tau}\tau_{m1}\tau_{m2}};$$

$$a_{m2}=\frac{2b_{m2}(2\overline{\tau}-\tau_{m2})-6b_{m3}-b_{m1}(\overline{\tau}-\tau_{m2})\overline{\tau}}{(\overline{\tau}-\tau_{m1})(\tau_{m2}-\tau_{m1})\tau_{m1}};\ \ \overline{\tau}=\tau_{m\text{к}}-\tau_{m0};$$

$$a_{m3}=\frac{6b_{m3}-2b_{m2}(2\overline{\tau}-\tau_{m1})+b_{m1}(\overline{\tau}-\tau_{m1})\overline{\tau}}{(\overline{\tau}-\tau_{m2})(\tau_{m2}-\tau_{m1})\tau_{m2}};$$

$$b_{m1}=\ddot{x}_{m\text{к}}-\ddot{x}_{m0};\ b_{m2}=\dot{x}_{m\text{к}}-\ddot{x}_{m0}-\ddot{x}_{m0}\overline{\tau};$$

$$b_3=x_{m\text{к}}-x_{m0}-\dot{x}_{m0}\overline{\tau}-\ddot{x}_{m0}\,\frac{\tau^2}{2}.$$

Множители k_{m1} и k_{m2} необходимы для стыковки соседних сплайнов.

Индекс m = 1, 2, 3 обозначает принадлежность к координате $x_1 = x_g(\tau)$, $y_1 = y_g(\tau)$, $z_1 = z_g(\tau)$. Для формирования траектории каждую координату $x_g(\tau)$, $y_g(\tau)$, $z_g(\tau)$ будем задавать с помощью выбранных базисных функций, учитывающих граничные условия.

Определение граничных условий. Для вычисления коэффициентов базисных функций (4) необходимо задать начальные и конечные значения фазовых координат и их первых и вторых производных по аргументу τ. Задание этих параметров означает задание в начальный момент времени координат центра масс БПЛА и их первых и вторых производных по аргументу t. Из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (1) определяем:

$$\dot{x}_{gr}(t)=V_r\cos\Theta_r\sin\Psi_r;\ \ \dot{y}_{gr}(t)=V_r\sin\Theta_r;\ \ \dot{z}_{gr}(t)=-V_r\cos\Theta_r\sin\Psi_r. \quad (5)$$

Продифференцировав по времени соотношения (5), найдем:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{gr}(t)=\dot{V}_r\cos\Theta_r\cos\Psi_r-V_r\sin\Theta_r\cos\Psi_r\dot{\Theta}_r-V_r\cos\Theta_r\sin\Psi_r\dot{\Psi}_r;\\ \ddot{y}_{gr}(t)=\dot{V}_r\sin\Theta_r+V_r\cos\Theta_r\dot{\Theta}_r; \qquad (6)\\ \ddot{z}_{gr}(t)=-\dot{V}_r\cos\Theta_r\sin\Psi_r+V_r\sin\Theta_r\sin\Psi_r\dot{\Theta}_r-V_r\cos\Theta_r\cos\Psi_r\dot{\Psi}_r.\end{gathered}$$

Первые производные по аргументам τ и t при известном значении параметра λ связаны соотношениями:

$$x'_{gr}=\frac{\dot{x}_{gr}}{\lambda_r};\ y'_{gr}=\frac{\dot{y}_{gr}}{\lambda_r};\ z'_{gr}=\frac{\dot{z}_{gr}}{\lambda_r}.$$

Следуя работе [2], придадим аргументу τ физический смысл длины дуги траектории, тогда λ будет иметь размерность скорости. С учетом этого $\lambda_0 = V_0$. Вторая производная координат по времени позволяет установить зависимость между первыми и вторыми производными координат по аргументам τ и *t*:

$$x'_{gr}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_{gr}}{d\tau}\lambda_r\right)=x''_{gr}\lambda_r^2+\dot{x}_{gr}\frac{d\lambda_r}{d\tau};$$

$$y'_{gr}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_{gr}}{d\tau}\lambda_r\right)=y''_{gr}\lambda_r^2+\dot{y}_{gr}\frac{d\lambda_r}{d\tau};$$

$$z'_{gr}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz_{gr}}{d\tau}\lambda_r\right)=z''_{gr}\lambda_r^2+\dot{z}_{gr}\frac{d\lambda_r}{d\tau}.$$

Из четвертого, пятого и шестого уравнений системы (1) следует

$$\lambda_r=V_r\,/\sqrt{x'^2_{gr}+y'^2_{gr}+z'^2_{gr}}\quad,$$

тогда

$$\frac{d\lambda_r}{d\tau}=\frac{\dot{V}_r}{V_r}-\frac{\lambda_r^2}{V_r^2}(\dot{x}_{gr}x''_{gr}+\dot{y}_{gr}y''_{gr}+\dot{z}_{gr}z''_{gr}).$$

Получим зависимости вторых производных координат по аргументам τ и *t*:

$$\ddot{x}_{gr}=x''_{gr}\lambda_r^2+\frac{\dot{x}_{gr}\dot{V}_r}{V_r}-\dot{x}_{gr}\frac{(\dot{x}_{gr}x''_{gr}+\dot{y}_{gr}y''_{gr}+\dot{z}_{gr}z''_{gr})}{V_r^2}\lambda_r^2;$$

$$\ddot{y}_{gr}=y''_{gr}\lambda_r^2+\frac{\dot{y}_{gr}\dot{V}_r}{V_r}-\dot{y}_{gr}\frac{(\dot{x}_{gr}x''_{gr}+\dot{y}_{gr}y''_{gr}+\dot{z}_{gr}z''_{gr})}{V_r^2}\lambda_r^2; \qquad (7)$$

$$\ddot{z}_{gr}=z''_{gr}\lambda_r^2+\frac{\dot{z}_{gr}\dot{V}_r}{V_r}-\dot{z}_{gr}\frac{(\dot{x}_{gr}x''_{gr}+\dot{y}_{gr}y''_{gr}+\dot{z}_{gr}z''_{gr})}{V_r^2}\lambda_r^2.$$

Решив систему уравнений (7) относительно вторых производных по аргументу τ, получим систему уравнений для определения вторых производных по аргументу τ через первые и вторые производные по аргументу *t*:

$$(V_r^2-\dot{x}_{gr}^2)x''_{gr}-\dot{x}_{gr}\dot{y}_{gr}y''_{gr}-\dot{x}_{gr}\dot{z}_{gr}z''_{gr}=\frac{\ddot{x}_{gr}V_r^2-\dot{x}_{gr}\dot{V}_rV_r}{\lambda_r^2};$$

$$(V_r^2-\dot{y}_{gr}^2)y''_{gr}-\dot{x}_{gr}\dot{y}_{gr}x''_{gr}-\dot{y}_{gr}\dot{z}_{gr}z''_{gr}=\frac{\ddot{y}_{gr}V_r^2-\dot{y}_{gr}\dot{V}_rV_r}{\lambda_r^2};$$

$$(V_r^2-\dot{z}_{gr}^2)z''_{gr}-\dot{x}_{gr}\dot{z}_{gr}z''_{gr}-\dot{y}_{gr}\dot{z}_{gr}y''_{gr}=\frac{\ddot{z}_{gr}V_r^2-\dot{z}_{gr}\dot{V}_rV_r}{\lambda_r^2}.$$

Запишем эти уравнения относительно неизвестных x''_{gr}, y''_{gr}, z''_{gr}:

$$x''_{gr} = \frac{o_r b_r c_r + d_r f_r l_r - h_r e_r f_r - c_r b_r l_r - n_r d_r c_r + o_r f_r^2}{a_r b_r c_r - e_r^2 b_r - d_r^2 c_r + a_r f_r^2};$$

$$y''_{gr} = \frac{a_r n_r c_r + o_r f_r e_r + d_r l_r e_r - e_r^2 n_r - d_r o_r c_r - a_r f_r l_r}{a_r b_r c_r - e_r^2 b_r - d_r^2 c_r + a_r f_r^2};$$

$$z''_{gr} = \frac{a_r b_r l_r + d_r n_r e_r - d_r o_r f_r - o_r b_r e_r - d_r^2 l_r + f_r n_r a_r}{a_r b_r c_r - e_r^2 b_r - d_r^2 c_r + a_r f_r^2},$$

где

$$a_r = V_r^2 - \dot{x}_{gr}^2;\ b_r = V_r^2 - \dot{y}_{gr}^2;\ c_r = V_r^2 - \dot{z}_{gr}^2;$$

$$d_r = -\dot{x}_{gr}\dot{y}_{gr};\ e_r = -\dot{x}_{gr}\dot{z}_{gr};\ f_r = -\dot{y}_{gr}\dot{z}_{gr};$$

$$o_r = \frac{\ddot{x}_{gr}V_r^2 - \dot{x}_{gr}\dot{V}_r V_r}{\lambda_r^2};\ n_r = \frac{\ddot{y}_{gr}V_r^2 - \dot{y}_{gr}\dot{V}_r V_r}{\lambda_r^2};\ l_r = \frac{\ddot{z}_{gr}V_r^2 - \dot{z}_{gr}\dot{V}_r V_r}{\lambda_r^2}.$$

Индекс r = 1, 2 обозначает принадлежность к точке траектории. При r = 1 определяются граничные условия в точке $s_{i0} = \left(\Theta_{i0}, \Psi_{i0}, V_{i0}, x_{gi0}, y_{gi0}, z_{gi0}\right)$; при r = 2 определяются граничные условия в точке $s_{i\text{к}} = \left(\Theta_{i\text{к}}, \Psi_{i\text{к}}, V_{i\text{к}}, x_{gi\text{к}}, y_{gi\text{к}}, z_{gi\text{к}}\right)$.

Алгоритм максимизации дальности полета. С учетом условия одновременности подхода всех участников группы к ТИ $s_{i\text{к}}$ естественно рассматривать максимизацию дальности полета группы как максимизацию дальности полета первого стартовавшего БПЛА из группы. Для этого в условиях общей постановки задачи необходимо определить траекторию полета из точки старта $s_{10} = \left(\Theta_{10}, \Psi_{10}, V_{10}, x_{g10}, y_{g10}, z_{g10}\right)$ в точку на конусе $s_{1\text{к}} = \left(\Theta_{1\text{к}}, \Psi_{1\text{к}}, V_{1\text{к}}, x_{g1\text{к}}, y_{g1\text{к}}, z_{g1\text{к}}\right)$, обеспечивающую максимальную дальность, и, кроме того, определить управление БПЛА, обеспечивающее движение по этой траектории.

Для решения задачи максимизации дальности предположим, что первый БПЛА будет двигаться по траектории в направлении точки $s_{1\text{к}}$. В проекции на горизонтальную плоскость эта траектория будет прямой. Движение БПЛА описывается уравнениями системы (2). Координаты точек траектории найдем с помощью базисных функций (4), необходимые силы для движения по сформированной траектории — с помощью выражений (3). Кроме того, в начальной и конечной точках, а также в каждой точке траектории определим уровень полной механической энергии БПЛА, приведенной к безразмерному виду $E = y_g + V^2 / (2g)$.

Для поиска оптимальной траектории необходимо организовать итерационный процесс варьирования x_{g10}. Выберем в качестве первого приближения точку, отстоящую от точки $s_{1к}$ на величину баллистического относа БПЛА, т. е. на расстояние, которое преодолевает БПЛА в режиме полета по баллистической траектории. Для вычисления баллистического относа необходимо выполнить интегрирование уравнений системы (1) с заданными параметрами $\Theta_{10}, \Psi_{10}, V_{10}, x_{g10}, y_{g10}, z_{g10}$. Интегрирование системы (1) необходимо продолжать до тех пор, пока параметр y_{g1i} не примет значение ноль. В этом случае вычисленное значение координаты x_{g1i} будет являться величиной баллистического относа.

После формирования траектории полета из заданной точки s_{10} в конечную точку $s_{1к}$ сравнивается имеющийся запас энергии E с заданным $E_к$ в конечной точке траектории. Если $E > E_к$, то необходимо изменить параметр x_{g10} в сторону увеличения, если $E < E_к$ — уменьшить параметр x_{g10}. Если $E = E_к \pm \xi$ (ξ — заданная точность решения), то предполагается, что поиск квазиоптимальной траектории закончен и найдено решение задачи оптимизации. Для варьирования параметра x_{g10} можно использовать любой известный численный метод, в частности метод дихотомии, который показал в этой задаче удовлетворительную скорость сходимости решения. Кроме варьирования x_{g10}, необходимо также варьировать параметры базисных функций. Применительно к функциям, используемым в настоящей работе, варьируемыми параметрами являются координаты точек стыковки соседних сплайнов τ_{m1}, τ_{m2}. Опыт реализации предложенного алгоритма показывает, что чем больше варьируемых параметров, тем решение задачи ближе к оптимальному, и что увеличение числа варьируемых параметров базисных функций влечет за собой увеличение времени сходимости решения. Это явление требует отдельного исследования и зависит от требуемой точности квазиоптимального решения и вычислительных возможностей среды моделирования алгоритмов.

В результате решения рассматриваемой задачи формируется оптимальная траектория, вычисляются потребные для движения по этой траектории силы и время движения.

Алгоритм решения задачи группового применения БПЛА. Построим алгоритм решения задачи группового применения БПЛА, сформулировав ее следующим образом: в условиях предположений, упомянутых в общей постановке задачи, построить для каждого БПЛА, кроме первого, траекторию и алгоритм управления движением по этой траектории, обеспечивающие достижение вершины $s_{\text{ТИ}}$ конуса прицеливания как ТИ за заданное время с заданной стороны подхода.

В результате решения задачи максимизации дальности полета первого БПЛА из группы с помощью интегрирования седьмого уравнения системы (2) определено время T_1 полета первого БПЛА из группы. Тогда время полета каждого следующего БПЛА, удовлетворяющее требованию одновременности подхода всех БПЛА к ТИ $s_{\text{ТИ}}$, есть $T_i = T_1 - t_i$.

Поскольку задача максимизации дальности полета группы рассматривается как максимизация дальности полета первого БПЛА, то для всех остальных БПЛА из группы достаточно определить любую траекторию, допустимую с точки зрения динамической достижимости и удовлетворяющую требованиям, заданным на концах траектории, в том числе требованию по одновременности подхода всех БПЛА к ТИ.

Поскольку на предыдущем этапе алгоритма определено время движения, перейдем обратно от аргумента τ к аргументу t. Тогда движение БПЛА будет описываться уравнениями системы (1), а управление — функциями:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\Psi\cos\Theta}{\dot\Theta + g\cos\Theta / V}; \quad n_{ya} = \frac{V\dot\Theta + g\cos\Theta}{g\cos\gamma},$$

где $\dot\Theta = \dfrac{\dot V\dot y_g - V\ddot y_g}{V^2\cos\Theta}$.

Условия на концах траектории определятся с помощью уравнений (5) и (6), а базисные функции примут следующий вид:

$$x_m(t) = x_{m0} + \dot x_{m0}t + \ddot x_{m0}\frac{t^2}{2} + \frac{a_{m1}t^3}{6} + k_{m1}\frac{a_{m2}(t-t_{m1})^3}{6} + k_{m2}\frac{a_{m3}(t-t_{m2})^3}{6};$$

$$\dot x_m(t) = \dot x_{m0} + \ddot x_{m0}\tau + \frac{a_{m1}t^2}{2} + k_{m1}\frac{a_{m2}(t-t_{m1})^2}{2} + k_{m2}\frac{a_{m3}(t-t_{m2})^2}{2};$$

$$\ddot x_m(t) = \ddot x_{m0} + a_{m1}t + k_{m1}a_{m2}(t-t_{m1}) + k_{m2}a_{m3}(t-t_{m2}),$$

где

$$k_{m1} = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le t_{m1}; \\ 1 \text{ при } t > t_{m1}; \end{cases} \quad k_{m2} = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le t_{m2}; \\ 1 \text{ при } t > t_{m2}; \end{cases}$$

$$a_{m1} = \frac{6b_{m3} - 2b_{m2}(2\bar t - t_{m1} - t_{m2}) + b_{m1}(\bar t - t_{m1})(\bar t - t_{m2})}{\bar t t_{m1} t_{m2}};$$

$$a_{m2} = \frac{2b_{m2}(2\bar t - t_{m2}) - 6b_{m3} - b_{m1}(\bar t - t_{m2})\bar t}{(\bar t - t_{m1})(t_{m2} - t_{m1})t_{m1}};$$

$$a_{m3} = \frac{6b_{m3} - 2b_{m2}(2\overline{t} - t_{m1}) + b_{m1}(\overline{t} - t_{m1})\overline{t}}{(\overline{t} - t_{m2})(t_{m2} - t_{m1})t_{m2}};$$

$$b_{m1} = \ddot{x}_{m\text{к}} - \ddot{x}_{m0}; \;\; b_{m2} = \dot{x}_{m\text{к}} - \ddot{x}_{m0} - \ddot{x}_{m0}\overline{t};$$

$$b_{m3} = x_{m\text{к}} - x_{m0} - \dot{x}_{m0}\overline{t} - \ddot{x}_{m0}\frac{t^2}{2}; \quad \overline{t} = t_{m\text{к}} - t_{m0}.$$

Заключение. Сформулирована и решена задача построения алгоритма оптимального управления группой БПЛА произвольной аэродинамической схемы с учетом одновременности подхода к ТИ с заранее заданных направлений. Решена задача максимизации дальности полета группы. Полученные алгоритмы и разработанные компьютерные программы, их реализующие, позволяют решать различные практические задачи, связанные с построением оптимального управления и соответствующих траекторий движения как для одиночного применения БПЛА, так и для их применения в составе группы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М., Мир, 1988.

[2] Тараненко В.Т., Момджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета. М., Машиностроение, 1986.

[3] Лам Т.Т. Решение краевой задачи формирования траектории движения самолета при выполнении пространственного маневра. *Труды МАИ*, 2014, № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53732&eng=N

[4] Воронов Е.М., Карпенко А.П. Построение эффективных программ сближения-уклонения с учетом связей, ограничений и возмущений. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 1979, № 4, с. 108–110.

[5] Чикрий А.А., Шишкина Н.Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений. *Автоматика и телемеханика*, 1985, № 2, с. 59–68.

[6] Петров Н.Н. Об одном классе задач группового преследования с фазовыми ограничениями. *Автоматика и телемеханика*, 1994, № 3, с. 42–49.

[7] Ибрагимов Г.И. Об одной задаче группового преследования. *Автоматика и телемеханика*, 2005, № 8, с. 24–35.

[8] Емельянова Т.Ю. Дифференциально-игровой метод сближения группы летательных аппаратов с группой маневрирующих объектов. *Гироскопия и навигация*, 2006, № 2, с. 107–112.

[9] Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования. *Известия РАН. ТиСУ*, 2009, № 4, с. 29–34.

[10] Воронов Е.М., Ефремов В.А., Кусля А.М. и др. Методические основы формирования рационального облика перспективных авиационных средств поражения при одиночном и групповом применении. *Морская радиоэлектроника*, 2017, № 2, с. 48–51.

[11] Воронов Е.М., Микрин Е.А., Обносов Б.В., ред. Стабилизация, наведение, групповое управление и системное моделирование беспилотных летательных аппаратов. Современные подходы и методы. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018.

[12] Воронов Е.М., Никитенко А.И., Репкин А.Л. Оптимизация управления активными ресурсами группировки управляемых средств поражения в конфликтной ситуации с группой ракетных катеров. *Тр. XX Междунар. конф.* «*Проблемы управления и моделирования в сложных системах*». Самара, Офорт, 2018, с. 196–205.

[13] Ефремов В.А., Сычев С.И., Хамаев Н.В. и др. Групповое построение управляемых средств поражения при залповом применении. *Радиоэлектронные технологии*, 2018, № 3, с. 66–70.

[14] Карпежников Е.И. Групповое применение беспилотных планирующих летательных аппаратов. *Тр. XII Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Т. 1*. Уфа, БГУ, 2019, с. 469–471.

[15] Грумондз В.Т., Полищук М.А., Черторыжская С.С. Выбор параметров аэродинамического и динамического облика беспилотного планирующего летательного аппарата. *Вестник МАИ*, 2012, т. 19, № 4, с. 5–12.

[16] Грумондз В.Т., Полищук М.А., Черторыжская С.С. и др. Синтез системы управления малого беспилотного планирующего летательного аппарата с крылом большого удлинения. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2012, № 3, с. 22–27.

[17] Грумондз В.Т., Полищук М.А. Алгоритм формирования множества начальных состояний беспилотного планирующего ЛА в задаче о достижимости заданного набора навигационных точек. *Вестник МАИ*, 2013, т. 20, № 3, с. 154–159.

[18] Грумондз В.Т., Карпежников Е.И., Полищук М.А. и др. Алгоритмы построения областей начальных состояний беспилотных планирующих крылатых летательных аппаратов. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*, 2017, № 4, с. 51–58.

[19] Грумондз В.Т., Полищук М.А., Карпежников Е.И. Управление спуском в атмосфере беспилотного планирующего крылатого летательного аппарата. *Полет*, 2017, № 9-10, с. 42–48.

Грумондз Валерий Тихонович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Динамика и управление летательных аппаратов» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4).

Карпежников Евгений Иванович — заместитель начальника отдела аэродинамики АО «ГНПП «Регион» (Российская Федерация, 115230, Москва, Каширское шоссе, д. 13А).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Грумондз В.Т., Карпежников Е.И. Оптимальное управление группой беспилотных планирующих летательных аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2021, № 1 (136), с. 4–19.
DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2021-1-4-19

OPTIMUM CONTROL OF A GROUP OF UNMANNED GLIDING AIRCRAFT

V.T. Grumondz[1] v.grumondz@gmail.com
E.I. Karpezhnikov[2] karpezhnikov@rambler.ru

[1] **Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation**
[2] **JSC GNPP Region, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper focuses on an algorithm for controlling a group of unmanned gliding aircraft which are notable for the absence of a propulsion system. The flight is accomplished by using the full mechanical energy reserve received by the unmanned gliding aircraft at the time of the air launch. The task of a group flight with each gliding device being autonomous is currently relevant. Developing a group control algorithm and forming the trajectory of each unmanned gliding aircraft make it possible to solve a wide range of practical problems. This paper states the problem implying the maximization of the flight range with boundary conditions set at the ends of the trajectory. The trajectory of each of the group unmanned gliding aircraft is formed by specifying a reference function for each phase coordinate (x_g, y_g, z_g). The flight range of the group is maximized as a result of solving a boundary value problem by the Ritz — Galerkin method based on optimization of a function of several variables. In contrast to classical optimization methods, it allows solving the considered optimization problem with sufficient accuracy in a practical sense, without requiring large computational re-

Keywords

Unmanned gliding aircraft, group guidance, maximization of flight range, spatial motion, Ritz — Galerkin method

sources for its implementation. This method was used to optimize flight trajectories; however, in this work, it is applied with a number of significant differences both in terms of the problem statement and in terms of requirements for the dynamic capabilities of the aircraft

Received 11.09.2020
Accepted 15.10.2020

REFERENCES

[1] Fletcher C.A.J. Computational Galerkin methods. New York, Springer-Verlag, 1984.

[2] Taranenko V.T., Momdzhi V.G. Pryamoy variatsionnyy metod v kraevykh zadachakh dinamiki poleta [Direct variation method in boundary problem of flight dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986.

[3] Lam T.T. Solving boundary value problem of trajectory planning for aircraft executing spatial maneuvers. *Trudy MAI*, 2014, no. 78 (in Russ.).
Available at: http://trudymai.ru/published.php?ID=53732&eng=N

[4] Voronov E.M., Karpenko A.P. Making effective programs of closing up-deviation taking into account relations, restrictions and excitation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika*, 1979, no. 4, pp. 108–110 (in Russ.).

[5] Chikriy A.A., Shishkina N.B. A problem of group pursuit in the presence of phase constraints. *Autom. Remote Control*, 1985, vol. 46, no. 2, pp. 188–197.

[6] Petrov N.N. On a class of problems of group pursuit with phase constraints. *Autom. Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 3, pp. 336–341.

[7] Ibragimov G.I. A group pursuit game. *Autom. Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 8, pp. 1214–1223. DOI: https://doi.org/10.1007/s10513-005-0162-6

[8] Emel'yanova T.Yu. Differential gaming technique for closing up of an aircraft group with a group of maneuvering objects. *Giroskopiya i navigatsiya*, 2006, no. 2, pp. 107–112 (in Russ.).

[9] Bannikov A.S. A non-stationary problem of group pursuit. *J. Comput. Syst. Sc. Int.*, 2009, vol. 48, no. 4, pp. 527–532. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064230709040054

[10] Voronov E.M., Efremov V.A., Kuslya A.M., et al. Methodical fundamentals developed for creating the rational image of future aviation destroying capabilities under single and group application. *Morskaya radioelektronika* [Marine Radio-Electronics], 2017, no. 2, pp. 48–51 (in Russ.).

[11] Voronov E.M., Mikrin E.A., Obnosov B.V., eds. Stabilizatsiya, navedenie, gruppovoe upravlenie i sistemnoe modelirovanie bespilotnykh letatel'nykh apparatov. Sovremennye podkhody i metody [Stabilization, guidance, group control and system modelling of unmanned aircraft. Modern approaches and methods]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2018.

[12] Voronov E.M., Nikitenko A.I., Repkin A.L. Control optimization of active resources for grouping manned weapons in conflict situation with a group of missile boats. *Tr. XX*

Mezhdunar. konf. "Problemy upravleniya i modelirovaniya v slozhnykh sistemakh" [Proc. XX Int. Conf. Problems of Control and Modelling in Complex Systems]. Samara, Ofort Publ., 2018, pp. 196–205 (in Russ.).

[13] Efremov V.A., Sychev S.I., Khamaev N.V., et al. Group formation of manned weapons at multi-strike. *Radioelektronnye tekhnologii* [Radio Electronic Technology], 2018, no. 3, pp. 66–70 (in Russ.).

[14] Karpezhnikov E.I. Using groups of unmanned gliding aircraft. *Tr. XII Vseros. s"ezda po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki. T. 1* [Proc. Russ. Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 1]. Ufa, BGU Publ., 2019, pp. 469–471 (in Russ.).

[15] Grumondz V.T., Polishchuk M.A., Chertoryzhskaya S.S. The choice of the pilotless plane vehicle dynamic image. *Vestnik MAI* [MAI Aerospace Journal], 2012, vol. 19, no. 4, pp. 5–12 (in Russ.).

[16] Grumondz V.T., Polishchuk M.A., Chertoryzhskaya S.S., et al. Synthesizing the control system of a small gliding unmanned aerial vehicle with high-aspect ratio wing. *Russ. Aeronaut.*, 2012, vol. 55, no. 3, pp. 251–258.
DOI: https://doi.org/10.3103/S1068799812030051

[17] Grumondz V.T., Polishchuk M.A. The algorithm of generation of the initial states set for the launch of the gliding unmanned aerial vehicle in the problem of attainability of the given set of navigation points. *Vestnik MAI* [MAI Aerospace Journal], 2013, vol. 20, no. 3, pp. 154–159 (in Russ.).

[18] Grumondz V.T., Karpezhnikov E.I., Polishchuk M.A., et al. Algorithms of constructing the regions of initial states for unmanned winged gliders. *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 4, pp. 534–541. DOI: https://doi.org/10.3103/S1068799817040092

[19] Grumondz V.T., Polishchuk M.A., Karpezhnikov E.I. The controlled descend in the atmosphere control for the unmanned gliding winged aircraft. *Polet* [Flight], 2017, no. 9-10, pp. 42–48 (in Russ.).

Grumondz V.T. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Aircraft Flight Dynamics and Control, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Karpezhnikov E.I. — Deputy Head of the Department of Aerodynamics, JSC GNPP Region (Kashirskoe shosse 13A, Moscow, 115230 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Grumondz V.T., Karpezhnikov E.I. Optimum control of a group of unmanned gliding aircraft. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2021, no. 1 (136), pp. 4–19 (in Russ.).
DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2021-1-4-19