

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА И ТРЕНИЯ В ТОНКОМ ВОЗДУШНОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НАД БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗАТУПЛЕННОГО КОНУСА МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

В.В. Горский<sup>1,2</sup>

gorskknat@yandex.ru

А.Г. Локтионова<sup>2</sup>

makonka7@gmail.com

<sup>1</sup> АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов,  
Московская обл., Российская Федерация

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Качественное решение задачи о расчете конвективного теплообмена может быть получено только в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя, что сопряжено с преодолением целого ряда вычислительных проблем. Исключительно важным является разработка относительно простых методов расчета, но имеющих достаточно высокую точность. Как первое приближение к решению данной задачи можно рассматривать применение метода эффективной длины, который характеризуется удовлетворительной с точки зрения практики точностью расчета конвективного теплообмена, вследствие чего он получил широкое распространение при проектировании летательных аппаратов. Однако этот метод также характеризуется относительно высокой трудоемкостью, хотя она и значительно меньше, чем при численном интегрировании дифференциальных уравнений пограничного слоя. Наиболее эффективным подходом к решению задач теплообмена и трения в инженерной практике является использование простых алгебраических формул, полученных на базе аппроксимации результатов строгих численных расчетов или экспериментальных исследований. К сожалению, в литературных источниках отсутствует информация о точности этих формул для различных условий функционирования изделий. Приведено решение этой проблемы на основе систематических числен-

### Ключевые слова

*Конвективный теплообмен,  
трение, толщина потери  
импульса, пограничный слой*

ных решений уравнений пограничного слоя в максимально строгой расчетно-теоретической постановке, а также проведения детального анализа точности полученных алгебраических формул и их литературных аналогов

Поступила 06.03.2020

Принята 06.05.2020

© Автор(ы), 2020

---

**Введение.** Расчетно-теоретические исследования тепломассопереноса и трения выполнены в широком диапазоне изменения следующих определяющих факторов:

- числа Маха  $M_\infty$  в набегающем воздушном потоке;
- давления торможения  $p_0$  воздушного потока;
- энтальпийного фактора  $R_h$  (отношение энтальпии воздуха при температуре стенки к энтальпии торможения газового потока);
- массовой скорости  $G_w$  вдува воздуха (это наиболее широко используемый на практике газ) в пограничный слой, измеренной в долях коэффициента теплообмена на непроницаемой стенке.

Под термином «стенка» понимается поверхность тела, обтекаемая набегающим потоком газа.

Исследования выполнены для многокомпонентной воздушной смеси, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, расчет диффузионного тепломассопереноса проведен в рамках уравнений Стефана — Максвелла [1].

Затупленные конусы малого удлинения относятся к числу наиболее теплонагруженных элементов конструкции летательных аппаратов, для которых повышение точности проектных расчетов в части интенсивности теплообмена является крайне актуальной задачей. В предыдущих работах [2, 3] выполнено исследование интенсивности теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое, образующемся над полусферой, т. е. над наиболее важной частью затупленного конуса. В настоящей работе аналогичные вопросы рассмотрены для боковой поверхности конуса при ламинарном режиме течения газа в пограничном слое.

В процессе расчетных исследований принималось, что:

- химический состав газовой смеси ограничен набором химических веществ



которые образованы из химических элементов O, N, Ar;

- в нормальных условиях воздух характеризуется мольными концентрациями веществ (1) —  $\kappa_{\text{O}} = 0$ ,  $\kappa_{\text{O}_2} = 0,2095$ ,  $\kappa_{\text{N}} = 0$ ,  $\kappa_{\text{N}_2} = 0,7808$ ,  $\kappa_{\text{NO}} = 0$ ,  $\kappa_{\text{Ar}} = 0,0097$  [4];

- используются результаты численного решения уравнений Эйлера;
- уравнения пограничного слоя и переносных свойств газовой смеси решаются по методикам, приведенным в работах [5, 6];
- стенка является абсолютно каталитической.

Значения определяющих параметров, при которых решали уравнения пограничного слоя, приведены в табл. 1, в которой  $\theta$  и  $L$  — угол полураствора конуса и его длина в долях радиуса  $R$  сферического затупления;  $T_w$  — температура стенки;  $Re$  — число Рейнольдса, рассчитанное по параметрам газа в набегающем потоке и радиусу  $R$ , при этом  $L=10$  для  $\theta \leq 5^\circ$ ,  $L=7$  для  $\theta=10^\circ$  и  $L=5$  для  $\theta \geq 15^\circ$ .

Таблица 1

## Значения определяющих параметров

$\theta$	$L$	$M_\infty$	$p_0$ , МПа	$R_h$	$G_w$	$Re \cdot 10^{-6}$	$T_{w,0}$ , К
[0, 20°]	[5, 10]	25	[0,001; 10]	[0,012; 0,1]	[0; 1,5]	[0,00055; 5,05]	[300; 2140]
		20		[0,017; 0,2]		[0,00067; 6,34]	[290; 3050]
		15		[0,028; 0,3]		[0,00086; 7,68]	[90; 2730]
		10		[0,056; 0,4]		[0,00120; 9,45]	[260; 3000]
		8	[0,001; 1]	[0,083; 0,4]		[0,00140; 16,2]	[300; 2140]
		6		[0,135; 0,4]		[0,00180; 21,5]	[240; 820]
		4		[0,270; 0,4]		[0,00250; 26,6]	[220; 840]

При этом, естественно, решению уравнений пограничного слоя предшествует численное решение уравнений Эйлера [7], полученное для равновесно диссоциированного воздуха методом Мак-Кормака [8].

**Результаты расчетных исследований.** Обобщение результатов с достаточно высокой точностью аппроксимации, полученных при систематическом численном интегрировании дифференциальных уравнений пограничного слоя, в целях построения стройной системы простых алгебраических формул приведено далее.

Объектами анализа являются следующие характеристики конвективного теплообмена и трения:

- число Стантона  $St$ , связанное с удельным тепловым потоком  $q_w$ , подводимым к стенке, выражением вида

$$St(s) = q_w(s) / [h_{00}(1 - R_h)\rho_\infty V_\infty], \quad s \in [0, s^*];$$

- число Стантона  $St_f$ , связанное с напряжением трения на стенке  $Fr_w$  выражением

$$St_f(s) = \begin{cases} Fr_w(s)/[u_e(s)\rho_\infty V_\infty], & s \in (0, s^*]; \\ Fr_{w,s}(s)/[u_{e,s}(s)\rho_\infty V_\infty], & s \rightarrow 0; \end{cases}$$

• интегральный член  $\vartheta_f$  в формуле для расчета толщины потери импульса  $\vartheta$  в пограничном слое, рассчитываемый по соотношениям:

$$\vartheta(s) = \frac{\sqrt{2\xi}}{r\rho_e u_e} \int_0^{\eta_e} f_\eta(1-f_\eta) d\eta; \quad \xi(s) = \int_0^s \rho_e \mu_e u_e \sin^2(s') ds';$$

$$\vartheta_f(s) = \int_0^{\eta_e} f_\eta(\eta, s) [1-f_\eta(\eta, s)] d\eta, \quad s \in [0, s^*].$$

Здесь  $f$  — безразмерная функция тока;  $r$  — удаление поверхности тела от его оси;  $\xi$  и  $\eta$  — переменные Лиза — Дородницына [5, 9];  $s$  — длина криволинейной координаты, отсчитываемой вдоль образующей конуса от его критической точки, расположенной в месте пересечения оси симметрии конуса с его поверхностью;  $s^*$  — значение этой координаты, соответствующее длине конуса  $L$ .

Анализ результатов систематического численного интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя проводится для трех функций:

$$\varphi_1(s) = St(s)/St(0), \quad \varphi_2(s) = St_f(s)/St_f(0), \quad \varphi_3(s) = \vartheta_f(s)/\vartheta_f(0).$$

Для табличных зависимостей, полученных для этих функций, используется обозначение  $T_j(l, i, k)$ ,  $j = \overline{1, 3}$ .

Если для числа расчетных узлов на образующей тела, числа вариантов расчета по параметрам набегающего потока и числа вариантов по скорости вдува газа в пограничный слой ввести обозначения  $N_l, N_i, N_k$ , то  $l = \overline{1, N_l}$ ,  $i = \overline{1, N_i}$ ,  $N_i = 64$ ,  $G_{w,k} = 0,25(k-1)$ ,  $k = \overline{1, N_k}$ ,  $N_k = 7$ .

Решение рассматриваемой задачи базируется на использовании алгоритма, инвариантного по отношению к номеру функции, и принципа суперпозиции.

При этом проводится оптимальная аппроксимация табличных функций, одна из которых относится к непроницаемой стенке (для ее обозначения используется индекс  $im$ ) и представляет собой выборку  $\Xi_{j, im}$  из табличной функции  $T_j(l, i, k)$ , соответствующую нулевой скорости вдува газа в пограничный слой, т. е.  $\Xi_{j, im}(l, i) = T_j(l, i, 1)$ .

Рассмотрим табличную функцию  $\Xi_j$ , представляющую собой отношение табличной функции  $T_j(l, i, k)$  к выборке из нее, для непроницаемой стенки, т. е.

$$\Xi_j(l, i, k) = T_j(l, i, k) / T_{j, im}(l, i). \quad (2)$$

Тогда

$$\varphi_j(s_l, i, G_w, k) = \Xi_{j, im}(l, i) \Xi_j(l, i, k). \quad (3)$$

Эффект от влияния вдува на теплообмен и трение в пограничном слое принято (см., например, работу [10]) представлять в виде зависимости его от функции вдува  $F_{Blow}$ , равной произведению коэффициента вдува  $\gamma_{Blow}$  на его массовую скорость, выраженную в долях коэффициента теплообмена на непроницаемой стенке, т. е.  $F_{Blow} = \gamma_{Blow} G_w$ .

В настоящей работе такой же подход применяется с использованием значений коэффициента вдува в критической точке сферы и аппроксимационных формул [2] для его расчета.

Предлагаемая методика расчета базируется на замене в выражении (3) табличных функций  $\Xi_{j, im}$  и  $\Xi_j$  формулами вида:

$$A_{j, im} = (\zeta_{1, j} + \Upsilon \zeta_{3, j}) s^{\zeta_{2, j} + \Upsilon \zeta_{4, j}}; \quad \Upsilon = \min(0, M_\infty = 10); \quad (4)$$

$$A_j = 1 - \zeta_{4, j} F_{Blow} + \zeta_{5, j} F_{Blow}^2 - \zeta_{6, j} F_{Blow}^3. \quad (5)$$

Здесь  $\zeta_{1, j}$  — аппроксимационные коэффициенты, оптимальные значения которых, полученные по одному из вариантов эвристического метода прямого поиска Хука — Дживса [11] в соответствии с предписанием метода наименьших квадратов [12], приведены в табл. 2. Здесь же указаны относительные максимальная  $\delta$  и среднеквадратическая  $\sigma$  погрешности в процентах, характеризующие использование данных формул.

Таблица 2

**Значения аппроксимационных коэффициентов (4), (5) и погрешностей, соответствующих применению этих формул**

$\theta$	$j$	$\zeta_{1, j}$	$\zeta_{2, j}$	$\zeta_{3, j}$	$\zeta_{4, j}$	$\delta_{im}$	$\sigma_{im}$	$\zeta_{5, j}$	$\zeta_{6, j}$	$\zeta_{7, j}$	$\delta$	$\sigma$
0	1	0,145	1,184	0,0053	0,093	38	13	1,154	0,227	-0,107	32	10
	2	0,154	0,971	0	0	51	17	1,120	0,180	-0,0846	60	22
	3	0,843	-0,054	0	0	9	4	1,360	0	0	11	4
5°	1	0,133	0,832	0,00592	0,086	25	11	1,154	0,222	-0,104	29	10
	2	0,164	0,770	0	0	43	18	1,120	0,207	-0,094	47	15
	3	0,848	-0,073	0	0	10	4	1,285	0	0	10	3

$\theta$	$j$	$\zeta_{1,j}$	$\zeta_{2,j}$	$\zeta_{3,j}$	$\zeta_{4,j}$	$\delta_{im}$	$\sigma_{im}$	$\zeta_{5,j}$	$\zeta_{6,j}$	$\zeta_{7,j}$	$\delta$	$\sigma$
10°	1	0,165	0,759	0,00769	0,0829	25	11	1,236	0,277	-0,1290	31	13
	2	1,163	0,609	0	0	33	14	1,120	0,191	-0,1030	44	13
	3	0,880	-0,0728	0	0	9	3	1,282	0	0	9	3
15°	1	0,193	0,648	0,0072	0,070	25	11	1,154	0,258	-0,0630	27	8
	2	0,177	0,490	0	0	32	12	1,120	0,187	-0,0931	43	11
	3	0,900	-0,0737	0	0	8	3	1,280	0	0	9	3
20°	1	0,231	0,440	0,0104	0,070	32	16	1,269	0,311	-0,084	45	17
	2	0,234	0,5	0	0	33	12	1,230	0,189	-0,093	78	23
	3	0,900	-0,090	0	0	10	4	1,314	0	0	10	4

Дополнительная информация о зависимости погрешностей, свойственных применению аппроксимационных формул (5), не в целом по всей рассмотренной совокупности скоростей вдува газа в пограничный слой, а в зависимости от интенсивности протекания этого процесса, приведена в табл. 3.

Таблица 3

**Значения погрешностей (5) в зависимости от интенсивности вдува газа в пограничный слой**

$\theta$	$j$	$G_w$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
0	1	$\delta$	17	20	23	28	31	32
		$\sigma$	2	5	8	11	14	14
	2	$\delta$	15	21	28	37	48	60
		$\sigma$	3	7	12	19	28	39
	3	$\delta$	4	8	10	11	11	11
		$\sigma$	3	4	5	5	4	4
5°	1	$\delta$	14	16	19	23	27	29
		$\sigma$	2	5	8	11	14	16
	2	$\delta$	10	15	21	29	38	47
		$\sigma$	2	5	9	14	20	26
	3	$\delta$	4	7	9	9	9	9
		$\sigma$	2	3	4	3	3	4
10°	1	$\delta$	13	17	22	27	31	30
		$\sigma$	3	7	11	15	18	14
	2	$\delta$	9	13	19	27	35	44
		$\sigma$	2	4	7	11	17	22
	3	$\delta$	4	7	9	9	9	9
		$\sigma$	2	3	4	3	3	4

Окончание табл. 3

$\theta$	$j$	$G_w$	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
15°	1	$\delta$	9	11	14	17	21	27
		$\sigma$	2	4	6	8	10	13
	2	$\delta$	5	10	17	25	33	43
		$\sigma$	2	4	6	9	14	19
	3	$\delta$	4	6	8	9	9	9
		$\sigma$	2	3	4	3	3	4
20°	1	$\delta$	9	14	19	27	36	45
		$\sigma$	4	8	12	18	23	27
	2	$\delta$	6	15	25	38	55	78
		$\sigma$	2	5	9	15	26	46
	3	$\delta$	5	7	9	10	10	10
		$\sigma$	3	4	4	4	3	4

Использовать приведенные данные по параметрам теплообмена и трения для отличных от табличных значений угла полураствора конуса можно путем интерполяции затабулированных результатов исследований.

В случае непроницаемой стенки можно применять характеризующиеся удовлетворительной точностью приближенные формулы для расчета аппроксимационных коэффициентов  $\zeta_{i,j}$  в зависимости от угла полураствора конуса:

$$\begin{aligned} \zeta_{1,1} &= 0,14 + 0,004\theta; \quad \zeta_{2,1} = 1,2 - 0,04\theta; \quad \zeta_{3,1} = 0,005 + 0,0002\theta; \\ \zeta_{4,1} &= 0,09 - 0,001\theta; \quad \zeta_{1,2} = 0,15 + 0,004\theta; \quad \zeta_{2,2} = 0,9 - 0,03\theta; \quad (6) \\ \zeta_{1,3} &= 0,85 + 0,002\theta; \quad \zeta_{2,3} = -0,07. \end{aligned}$$

Используемые здесь значения угла  $\theta$  приведены в градусах.

Сопоставление погрешностей, соответствующих применению формулы (4), имеющих место при использовании оптимальных значений аппроксимационных коэффициентов и их приближенных значений, рассчитанных по формулам (6), приведено в табл. 4.

Таблица 4

**Сопоставление погрешностей формулы (4), соответствующих использованию различных подходов к расчету входящих в нее аппроксимационных коэффициентов**

$j$	$\theta$	0		5°		10°		15°		20°	
	$\zeta$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$
1	Оптимальные	38	13	25	11	25	11	25	11	29	13
	Приближенные	42	13	39	13	34	12	36	19	52	24

$j$	$\theta$	0		5°		10°		15°		20°	
	$\zeta$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\zeta$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$
2	Оптимальные	51	17	43	18	33	14	32	12	34	12
	Приближенные	74	20	53	22	57	27	64	32	76	35
3	Оптимальные	9	4	10	4	9	3	8	3	10	4
	Приближенные	13	4	11	3	10	4	11	5	11	5

Значения исследуемых параметров теплообмена и трения, полученные в результате численного интегрирования уравнений пограничного слоя для непроницаемой стенки и применения предложенной аппроксимационной процедуры, сравниваются с аналогичными данными, полученными соответствующими широко используемыми на практике следующими инженерными методами:

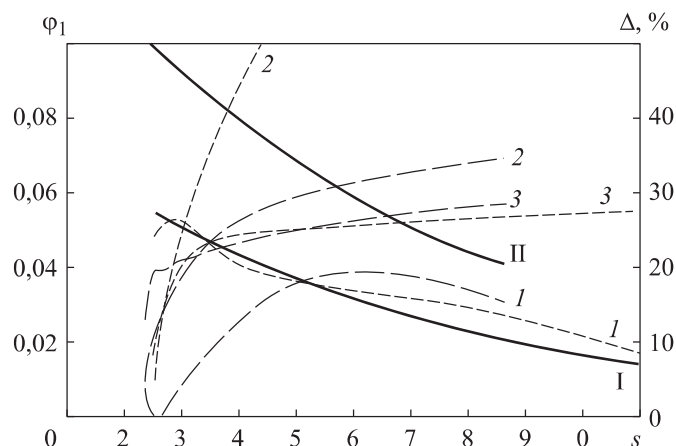
- методом эффективной длины [10, 13];
- по формуле из работы [10], основанной на аппроксимации результатов систематических исследований, выполненных по методу эффективной длины,

$$\varphi_1(s) = 0,8 \frac{p(s)u(s)}{p(0)V_\infty} \sqrt{\frac{\rho W_a}{\rho_\infty}} r^{-0,3}; \quad (7)$$

- по формуле из работы [10] для расчета функции толщины потери импульса  $\varphi_3(s)$  в ламинарном пограничном слое, основанной на применении метода эффективной длины. Здесь  $p, u$  — давление и скорость газа на поверхности конуса;  $\rho$  — плотность газа;  $r$  — расстояние поверхности конуса от его оси симметрии в долях радиуса затупления конуса; индекс  $a$  ( $W_a$ ) относится к газу за прямой ударной волной.

В качестве примера на рис. 1 приведена функция  $\varphi_1(s)$  для непроницаемой боковой поверхности конусов с различными углами полураствора для  $M_\infty = 6$ ,  $\rho_\infty = 0,344752$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_\infty = 216,65$  К,  $Pr = 0,71$ . Здесь  $\rho_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $Pr$  — плотность, температура и число Прандтля в набегающем потоке соответственно. Сплошными кривыми показаны результаты численного интегрирования уравнений пограничного слоя, штриховыми — модуль относительной погрешности  $\Delta$  (%) методов расчета для угла затупления конуса  $\theta = 0$ , штрихпунктирными кривыми — аналогичные погрешности при  $\theta = 10^\circ$ . Цифры 1 и 3 относятся к использованию данных аппроксимационных формул и метода эффективной длины, а цифра 2 — к использованию формулы из работы [10].





**Рис. 1.** Пример сопоставления результатов различных приближенных подходов к расчету функции  $\varphi_1(s)$  для непроницаемой стенки:

I —  $\theta = 0$ ; II —  $\theta = 10^\circ$

Сводная информация о точности всех перечисленных приближенных методов расчета параметров теплообмена и трения на непроницаемой стенке, соответствующая рассмотренной совокупности условий обтекания конусов потоком воздуха, приведена в табл. 5.

Таблица 5

**Точность приближенных методов расчета параметров теплообмена и трения на непроницаемой стенке**

$\theta$	Номер метода расчета	Функция					
		$\varphi_1(s)$		$\varphi_2(s)$		$\varphi_3(s)$	
		$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$
0	1	38	13	51	17	9	3
	2	150	50	—	—	54	24
	3	42	16	—	—	—	—
5°	1	25	11	43	18	10	4
	2	68	27	—	—	49	19
	3	37	17	—	—	—	—
10°	1	25	11	33	14	8	3
	2	49	21	—	—	43	15
	3	35	17	—	—	—	—
15°	1	25	11	32	12	8	3
	2	53	21	—	—	39	12
	3	38	17	—	—	—	—
20°	1	29	13	34	12	9	4
	2	69	31	—	—	44	10
	3	35	17	—	—	—	—

Из анализа приведенной информации для непроницаемой стенки следует:

- предложенный метод (максимально простой в реализации) и метод эффективной длины (повсеместно используемый на практике) имеют удовлетворительную точность расчета удельного теплового потока для всей боковой поверхности конусов;

- методы расчета теплообмена, основанные на использовании аппроксимационных формул, опубликованных в литературе и повсеместно используемых на практике, имеют уровень погрешности вычислений, который не позволяет рекомендовать их к применению.

Как это и принято в литературе, влияние, оказываемое на параметры теплообмена и трения вдувом газа в пограничный слой через стенку, характеризуется табличной функцией  $\Xi_j(l, i, k)$ , которая представляет собой отношение значений  $j$ -го параметра теплообмена или трения на проницаемой и непроницаемой стенках (2).

При этом основной объем исследований по этому вопросу посвящен удельному тепловому потоку на стенке, для которого функция  $\Xi_1(l, i, k)$  обычно называется функцией блокировки. Далее этот термин используется для всех трех исследуемых параметров теплообмена и трения, хотя значения функции  $\Xi_3(l, i, k)$  не уменьшаются, а увеличиваются с ростом скорости вдува.

Значения функции блокировки, полученные в результате численного решения уравнений пограничного слоя и применения предложенной аппроксимационной процедуры, сравниваются с аналогичными широко используемыми на практике данными следующими инженерными методами:

- по формуле из работы [10]

$$\Xi_{1, A}(G_w) = 1 - 0,68G_w + 0,06G_w^2; \quad (8)$$

- по формуле, приведенной в работе [14],

$$\Xi_{1, A}(G_w) = \begin{cases} 1 - F_{Blow}, & F_{Blow} \leq 0,4; \\ 1,012 - 1,16F_{Blow} + 0,325F_{Blow}^2, & F_{Blow} \in (0,4; 4]; \end{cases} \quad (9)$$

- по формуле из работы [15]

$$\Xi_{1, A}(G_w) = 1 / (1 + F_{Blow} + 3F_{Blow}^2); \quad (10)$$

- по формуле из работы [10] (на базе анализа результатов автоматических решений уравнений пограничного слоя [16–18])

$$\Xi_{3, A}(G_w) = 1 + 0,325G_w + 0,045G_w^3. \quad (11)$$

Приведенные результаты расчетов по формулам (8) и (10) получены при значении коэффициента вдува  $\gamma_{Blow} = 0,68$ , которое используется в формуле (8). В рамках данных численных решений уравнений пограничного слоя значение этого коэффициента изменялось в пределах 0,651–0,685.

В качестве примера на рис. 2 приведена максимальная погрешность расчета функции блокировки теплообмена  $\Delta$  на боковой поверхности конуса, полученная для конусов с различными углами полураствора, при  $M_\infty = 6$ ;  $\rho_\infty = 0,344752 \text{ кг/м}^3$ ;  $T_\infty = 216,65 \text{ К}$ ;  $Pr = 0,71$ . Штриховые и сплошные линии относятся к углам полураствора конуса, равным 0 и 10°, цифра 1 соответствует данной аппроксимационной зависимости, а цифры 2–4 — формулам (8)–(11).

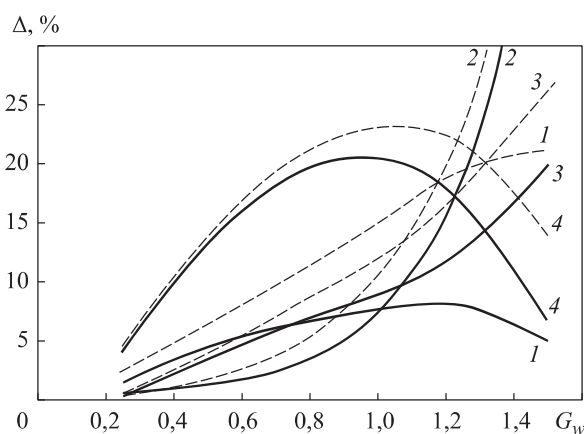


Рис. 2. Пример сравнения максимальных погрешностей расчета функции блокировки теплообмена различными приближенными методами

Сводная информация о точности тех же приближенных методов расчета, предназначенных для учета эффекта блокировки при расчете параметров теплообмена и трения при вдуве газа в пограничный слой, соответствующая рассмотренной совокупности условий обтекания полусферы потоком воздуха, приведена в табл. 6.

Таблица 6

**Точность приближенных методов для расчета функции блокировки параметров теплообмена и трения при вдуве газа в пограничный слой**

$\theta$	Функция	Метод	1		2		3		4	
			$G_w$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$
0	$\Xi_1$	0,75	23	8	19	4	22	4	33	19
		1,00	28	11	25	9	26	9	36	21
		1,25	31	14	35	20	31	20	34	19
		1,50	32	14	57	46	46	38	36	12

$\theta$	Функция	Метод	1		2		3		4	
		$G_w$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$	$\delta$	$\sigma$
0	$\Xi_2$	0,75	28	12	-	-	-	-	-	-
		1,00	37	19	-	-	-	-	-	-
		1,25	48	28	-	-	-	-	-	-
		1,50	60	39	-	-	-	-	-	-
	$\Xi_3$	0,75	10	5	26	22	-	-	-	-
		1,00	12	5	33	28	-	-	-	-
		1,25	11	4	39	33	-	-	-	-
		1,50	11	4	43	37	-	-	-	-
10°	$\Xi_1$	0,75	22	11	14	3	17	3	28	17
		1,00	27	15	20	6	21	6	31	18
		1,25	31	18	31	15	26	15	30	14
		1,50	30	14	55	40	40	34	42	12
10°	$\Xi_2$	0,75	19	7	-	-	-	-	-	-
		1,00	27	11	-	-	-	-	-	-
		1,25	35	17	-	-	-	-	-	-
		1,50	44	22	-	-	-	-	-	-
	$\Xi_3$	0,75	9	4	25	23	-	-	-	-
		1,00	9	3	32	28	-	-	-	-
		1,25	9	3	38	34	-	-	-	-
		1,50	9	4	43	38	-	-	-	-
20°	$\Xi_1$	0,75	18	12	11	3	10	3	22	16
		1,00	27	18	17	4	15	4	24	15
		1,25	36	29	26	11	35	11	29	11
		1,50	45	27	50	33	98	33	131	23
	$\Xi_2$	0,75	25	9	-	-	-	-	-	-
		1,00	38	15	-	-	-	-	-	-
		1,25	55	26	-	-	-	-	-	-
		1,50	78	46	-	-	-	-	-	-
	$\Xi_3$	0,75	9	4	26	23	-	-	-	-
		1,00	10	4	33	29	-	-	-	-
		1,25	10	3	38	34	-	-	-	-
		1,50	10	4	43	38	-	-	-	-

Из анализа приведенной информации о функции блокировки параметров теплообмена и трения на боковой поверхности конусов следует, что:

- предложенный метод характеризуется наименьшими погрешностями вычислений по сравнению с аналогичными формулами из других ис-

точников, а достаточно низкий уровень погрешности вычислений при этом свидетельствует об обоснованности его использования в большинстве практических приложений;

- при умеренных скоростях вдува газа в пограничный слой также наблюдается удовлетворительный уровень погрешности вычислений, свойственный использованию проанализированных формул, предназначенных для расчета функций блокировки параметров теплообмена.

**Выводы.** На базе результатов систематического численного интегрирования дифференциальных уравнений пограничного слоя сформулирована система аппроксимационных формул для расчета основных параметров теплообмена и трения на боковой поверхности затупленных конусов малого удлинения, которая характеризуется:

- наименьшими погрешностями вычисления по сравнению с другими подходами к инженерному решению той же задачи;
- единым подходом к расчету основных параметров теплообмена и трения;
- возможностью учета тех факторов, которые не получили должного освещения в литературе (в первую очередь это касается расчета напряжения трения).

Впервые проведена качественная апробация основных опубликованных в литературе инженерных подходов к расчету теплообмена и трения на боковой поверхности затупленных конусов, на базе которой установлено, что:

- в случае непроницаемой стенки ни один из приведенных методов не обладает удовлетворительной точностью;
- практически все литературные рекомендации по расчету степени блокировки теплообмена и трения вдувом газа в пограничный слой имеют удовлетворительную точность, но только при умеренных скоростях вдува.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИЛ, 1961.

[2] Горский В.В., Леонов А.Г., Локтионова А.Г. К вопросу о расчете конвективного теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое на непроницаемой поверхности полусферы. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2019, № 3, с. 17–28.

DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2019-3-17-28>

[3] Горский В.В., Локтионова А.Г. Методика расчета степени блокировки теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое на поверхности затуп-

ленного конуса в результате вдува газа. *Космонавтика и ракетостроение*, 2018, № 5, с. 72–78.

[4] Предводителей А.С., ред. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000 К и давлений от 0,00001 до 100 атмосфер). М., Вычислительный центр АН СССР, 1962.

[5] Горский В.В. Теоретические основы расчета абляционной тепловой защиты. М., Научный мир, 2015.

[6] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.

[7] Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. М., ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[8] Mac-Cormack R.W. The effect of viscosity in hyper velocity impact ring. AIAA, 1969.

[9] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Дрофа, 2003.

[10] Землянский Б.А., ред. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М., ФИЗМАТЛИТ, 2014.

[11] Аоки М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования. М., Наука, 1977.

[12] Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., ФИЗМАТГИЗ, 1958.

[13] Авдеевский В.С., Кошкин В.К., ред. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., Машиностроение, 1975.

[14] Нариманов Г.С., Тихонравов М.К., ред. Основы теории полета космических аппаратов. М., Машиностроение, 1972.

[15] Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б. Тепловая защита. М., Энергия, 1976.

[16] Анфимов Н.А. Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность. *Изв. АН. СССР. МЖТ*, 1966, № 1, с. 18–27.

[17] Devey C.F. Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problem. *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 1, pp. 171–179.

DOI: <https://doi.org/10.2514/3.1464>

[18] Emmons H.W., Leigh D.C. Tabulation of the Blasius function with blowing and suction. Aeronautical Research Council, 1954.

**Горский Валерий Владимирович** — д-р техн. наук, главный научный сотрудник АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143966, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33); профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Локтионова Анастасия Геннадьевна** — студентка аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Горский В.В., Локтионова А.Г. Моделирование теплообмена и трения в тонком воздушном ламинарном пограничном слое над боковой поверхностью затупленного конуса малого удлинения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2020, № 6, с. 4–20.

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2020-6-4-20>

**SIMULATING HEAT EXCHANGE AND FRICTION  
IN A THIN LAMINAR BOUNDARY LAYER OF AIR OVER  
THE LATERAL SURFACE OF A BLUNTED CONE FEATURING  
A LOW ASPECT RATIO**

V.V. Gorskiy<sup>1,2</sup>

gorskmat@yandex.ru

A.G. Loktionova<sup>2</sup>

makonka7@gmail.com

<sup>1</sup>JSC “MIC “NPO Mashinostroyeniya”, Reutov, Moscow Region,  
Russian Federation

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

**Abstract**

It is not possible to obtain a high-quality solution to a convective heat transfer problem without numerically integrating the differential equations describing the boundary layer, which involves a whole range of computational issues. Developing relatively simple yet adequately accurate computation methods becomes crucial. Using the effective length method may be considered to be the first step towards solving this problem. This method boasts an accuracy of convective heat transfer calculation that is acceptable in practice, due to which it became prevalent in aircraft design. However, this method is also relatively labour-intensive, although significantly less so than numerical integration of the boundary layer differential equations. The most efficient approach to solving heat transfer and friction problems in engineering practice would be using simple algebraic equations based on fitting the results of rigorous numerical computations or experimental investigations. Regrettably, there is no information published regarding how accurate these equations are for various operation conditions. The paper presents a solution to

**Keywords**

*Convective heat transfer,  
friction, impulse loss thickness,  
boundary layer*

this problem based on deriving systematic numerical solutions to the boundary layer equations in the most rigorous analytical statement, along with conducting a thorough analysis of the equation accuracy for both the equations derived and previously published

Received 06.03.2020

Accepted 06.05.2020

© Author(s), 2020

---

## REFERENCES

- [1] Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. Molecular theory of gases and liquids. Wiley, London, Chapman and Hall, 1954.
- [2] Gorskiy V.V., Leonov A.G., Loktionova A.G. On the question of computing convective heat transfer parameters in a laminar-to-turbulent boundary layer on an impermeable hemispherical surface. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 3, pp. 17–28 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3941-2019-3-17-28>
- [3] Gorskiy V.V., Loktionova A.G. The methods of calculation of heat transfer blocking degree in laminar-turbulent boundary layer on the surface of blunt cone after blow of gas. *Kosmonavtika i raketostroyeniye*, 2018, no. 5, pp. 72–78 (in Russ.).
- [4] Predvoditelev A.S., ed. *Tablitsy termodinamicheskikh funktsiy vozdukha (dlya temperatur ot 200 do 6000 K i davleniy ot 0.00001 do 100 atmosfer)* [Tables of air thermodynamic functions: for temperature from 200 to 6000 K and pressure from 0.00001 to 100 atm]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR Publ., 1962.
- [5] Gorskiy V.V. *Teoreticheskie osnovy rascheta ablyatsionnoy teplovoy zashchity* [Theoretical fundamentals of calculating ablative thermal protection]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2015.
- [6] Gorskiy V.V., Fedorov S.N. An approach to calculation of the viscosity of dissociated gas mixtures formed from oxygen, nitrogen, and carbon. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2007, vol. 80, no. 5, pp. 948–953. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-007-0126-5>
- [7] Lunev V.V. *Techeniye real'nykh gazov s bol'shimi skorostyami* [Real gas flow with high velocity]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2007.
- [8] Mac-Cormack R.W. The effect of viscosity in hyper velocity impact ring. AIAA, 1969.
- [9] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003.
- [10] Zemlyanskiy B.A., ed. *Konvektivnyy teploobmen letatel'nykh apparatov* [Convective heat transfer of aircraft]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2014.
- [11] Aoki M. *Introduction to optimization techniques: fundamentals and applications of nonlinear programming*. Macmillan, 1971.
- [12] Linnik Yu.V. *Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy teorii obrabotki nablyudeniy* [Least squares method and fundamentals of observations processing theory]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1958.



- [13] Avduevskiy V.S., Koshkin V.K., eds. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Basics of heat transfer in aerotechnic and spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975.
- [14] Narimanov G.S., Tikhonravov M.K., eds. *Osnovy teorii poleta kosmicheskikh apparatov* [Fundamentals of spacecraft flight theory]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972.
- [15] Polezhaev Yu.V., Yurevich F.B. *Teplovaya zashchita* [Thermal protection]. Moscow, Energiya Publ., 1976.
- [16] Anfimov N.A. Heat and mass transfer near the stagnation point with injection and suction of various gases through the body surface. *Fluid Dyn.*, 1966, vol. 1, no. 1, pp. 14–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01016262>
- [17] Devey C.F. Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problem. *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 1, pp. 171–179. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.1464>
- [18] Emmons H.W., Leigh D.C. *Tabulation of the Blasius function with blowing and suction*. Aerounautical Research Council, 1954.

**Gorskiy V.V.** — Dr. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, JSC “MIC “NPO Mashinostroyeniya” (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143966 Russian Federation); Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Loktionova A.G.** — Student, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Gorskiy V.V., Loktionova A.G. Simulating heat exchange and friction in a thin laminar boundary layer of air over the lateral surface of a blunted cone featuring a low aspect ratio. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2020, no. 6, pp. 4–20 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2020-6-4-20>