

**МОДЕЛЬ УПРОЧНЕНИЯ БЕТОНА ПРИ АРМИРОВАНИИ**

А.Л. Исаев

isaeval@bmstu.ru

В.А. Велданов

vevladi@mail.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Предложена математическая модель поведения железобетона при динамическом нагружении. За основу принята модель, используемая в численном моделировании для бетона без армирования в случае ударного нагружения бетонной преграды проникающим телом. Численное моделирование проведено в рамках двумерной осесимметричной постановки задачи механики сплошной среды. Влияние армирования на бетонную конструкцию определено по изменению диаграммы динамической сжимаемости бетона в области положительных объемных деформаций, а также по модификации его критерия прочности. В указанных изменениях и модификации учтены физико-механические свойства арматурной стали и коэффициент армирования бетонной конструкции. Полученную модель можно использовать в моделировании поведения железобетонных конструкций под воздействием динамических нагрузок при проникании твердых тел

**Ключевые слова**

*Численное моделирование, бетон, армирование, сжимаемость, критерий прочности, динамическое нагружение, проникание*

Поступила в редакцию 20.12.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

**Введение.** Особенностью бетона является его различная сопротивляемость сжимающим и растягивающим нагрузкам. Причем абсолютные значения пределов прочности на сжатие и растяжение могут отличаться в 8–12 раз, поэтому для увеличения прочности на растяжение во всех конструкциях из бетона используется армирование.

Арматура представляет собой сварную сетку с прямоугольными ячейками со сторонами размером 100...300 мм. Она изготавливается либо из холоднокатаной проволоки диаметром 3...8 мм, либо из прутка специальной арматурной стали диаметром 6...40 мм. Сетки располагаются внутри бетонной конструкции с определенным шагом, увеличивающимся с удалением от поверхности. При этом в глубине конструкции устанавливаются сетки с крупной ячейкой, а возле поверхности — с мелкой. Число сеток может быть различным для конструкций разного назначения. Степень армирования конструкции оценивается специальным показателем — коэффициентом армирования (процентным отношением суммы площадей сечений прутков арматуры к общей площади сечения конструкции в какой-либо плоскости). Обычно в качестве таких плоскостей рассматривают две плоскости, перпендикулярные пруткам, образующим сетку. Значение коэффициента армирования составляет для обычных строительных

конструкций 0,3...0,4 %, для специальных усиленных конструкций она может достигать 2...4 %.

При численном решении задач высокоскоростного взаимодействия тел с бетонными преградами модели поведения бетона, принимаемые авторами, как правило, не учитывают влияние арматуры [1–3], которое может проявиться при взаимодействии с бетонными конструкциями с высоким коэффициентом армирования (например, фибробетоном с металлической стружкой). Поэтому представляет интерес учет армирования при компьютерном моделировании поведения железобетонных конструкций при ударном нагружении.

**Постановка задачи.** Рассмотрим модель поведения железобетона при динамическом нагружении. За основу примем модель, предложенную ранее для бетонной преграды без армирования в случае ее ударного взаимодействия с проникающим телом [4–6]. Эта модель включает в себя уравнения состояния, отражающие основные особенности поведения бетона под нагрузкой (разрушение материала во время нагружения и изменение его физико-механических свойств), что учитывается разными физическими соотношениями до и после разрушения бетона и условием его перехода в разрушенное состояние — условием прочности.

На основании экспериментальных данных [4, 7] использована следующая модель:

- до разрушения материал имеет физико-механические свойства бетона, является по аналогии с горными породами линейно упругим и его поведение описывается законом Гука [8];

- после разрушения материал имеет физико-механические свойства сыпучей среды, является изотропно-упрочняющимся, упругопластическим материалом и его поведение описывается соотношениями Прандтля — Рейсса и условием текучести Мизеса — Шлейхера [8];

- в качестве условия перехода бетона в разрушенное состояние используется критерий прочности Гениева — Киссюка [9] — модификация для бетона критериев Баландина и Хубера — Мизеса — Генке [10] — для материалов с различными пределами прочности при сжатии и растяжении;

- реальная диаграмма динамической сжимаемости бетона, отражающая нелинейность соотношений между давлением и объемной деформацией, по аналогии с горными породами аппроксимируется кусочно-линейной зависимостью, учитывающей необратимый характер деформаций после разрушения материала [11, 12].

Используемое условие Гениева — Киссюка включает в себя первый инвариант тензора напряжений  $I_1$ , второй  $I_2$  и третий  $I_3$  инварианты девиатора напряжений, а также пределы прочности бетона при растяжении  $\sigma_p$ , сжатии  $\sigma_c$  и сдвиге  $\sigma_{cd}$  с учетом их упрочнения при динамическом нагружении [13, 14]:

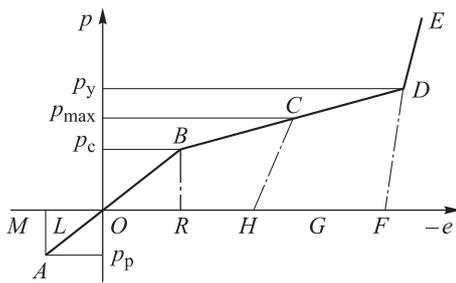
$$3I_2 - [\sigma_c \sigma_p + I_1 (\sigma_p - \sigma_c)] \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{3\sigma_{cd}^2}{\sigma_c \sigma_p} \right) \left[ 1 - \frac{I_3}{2} \left( \frac{I_2}{3} \right)^{-3/2} \right] \right\} < 0. \quad (1)$$

Оно учитывает разрушение материала в сложном напряженно-деформированном состоянии. Единственным его недостатком является отсутствие учета разрушения материала в состоянии, близком к всестороннему равномерному сжатию. Однако этот недостаток устраняется введением дополнительного условия о непривышении давлением предела структурной прочности бетона при всестороннем сжатии —  $p < p_c$ .

Таким образом, принимается, что, если в какой-либо рассматриваемой точке в какой-то момент времени был нарушен критерий прочности, то начиная с этого момента в этой точке меняются физико-механические свойства материала и модель его поведения. Материал перестает быть чисто упругим. Его прочность на сдвиг резко падает и пропадает способность выдерживать растягивающие нагрузки, т. е. он превращается из бетона в сыпучую среду, поведение которой описывается упругопластической моделью с условием текучести, учитывающим характерное для сыпучих сред упрочнение с ростом давления:

$$I_2 - \left( K_{\text{сц}} + \frac{\varphi p}{\sigma_{\text{с.п}} - K_{\text{сц}}} \right)^2 < 0. \tag{2}$$

Здесь  $K_{\text{сц}}$ ,  $\varphi$ ,  $\sigma_{\text{с.п}}$  — сцепление, коэффициент внутреннего трения и предельное значение сдвиговой прочности разрушенного бетона.



**Рис. 1.** Аппроксимация диаграммы динамической сжимаемости бетона ( $p$  — давление;  $e$  — объемная деформация)

существующих в нем пор. Уплотнение происходит по линии  $BD$  с углом наклона, тангенс которого равен модулю  $K_1$ , до достижения предела необратимого уплотнения  $p_y$  в точке  $D$ , положение которой определяется пористостью бетона (достигающей 10...12 %). Поведение уже полностью уплотненного, разрушенного материала описывает участок  $DE$  с углом наклона, тангенс которого равен объемному модулю  $K_2$ .

Разгрузка разрушенного материала (например, из точки  $C$ ) будет происходить по прямой  $CH$  с углом наклона, тангенс которого равен модулю  $K_3$ , значение последнего находится в диапазоне от  $K$  до  $K_2$  и зависит от положения точки  $C$  на прямой  $BD$ . При этом давление будет падать до точки  $H$ , а затем оставаться на нулевом уровне (прямая  $HR$ ), если объем будет продолжать увеличиваться.

На используемой диаграмме динамической сжимаемости бетона следует остановиться подробнее (рис. 1).

Участок  $AB$  описывает поведение неразрушенного бетона вплоть до достижения давлением пределов структурной прочности при сжатии  $p_c$  или растяжении  $p_p$ . Тангенс угла наклона этой прямой равен объемному модулю упругости неразрушенного бетона  $K$ . После начала разрушения при нагружении за точкой  $B$  бетон будет уплотняться за счет закрытия

Это означает, что бетон потерял сопротивляемость растяжению после разрушения при сжатии. Повторная нагрузка в этом случае будет происходить по пути *RHCDE*.

В упругом диапазоне разгрузка происходит по линии *BA*. Если ранее не произошло разрушение от сдвига по критерию прочности, то давление может принимать отрицательное значение вплоть до достижения  $p_p$ . После этого оно скачком поднимется до нуля по прямой *AL* и при дальнейшей разгрузке будет оставаться на нулевом уровне *LM*. При повторном уплотнении давление будет изменяться по пути *MLOBDE*.

Аналитически представленная модель сжимаемости описывается следующим образом:

$$p = -Ke$$

— для линии *AB* ( $p_p < p < p_c$ );

$$p = -K_1 \left( e + \frac{p_c (K_1 - K)}{KK_1} \right)$$

— для линии *BD* ( $p_c < p < p_y$ );

$$p = -K_2 \left( e + \frac{p_c (K_1 - K)}{KK_1} + \frac{p_y (K_2 - K_1)}{K_1 K_2} \right)$$

— для линии *DE* ( $p > p_y$ );

$$p = -K_3 \left( e + \frac{p_c (K_1 - K)}{KK_1} + \frac{p_{\max} (K_3 - K_1)}{K_1 K_3} \right)$$

— для линии *CH*;

$$K_3 = K + (K_2 - K) \frac{e_{\max} - e_c}{e_y - e_c}.$$

Здесь  $p_{\max}$ ,  $e_{\max}$  — максимальное давление и соответствующая ему объемная деформация в рассматриваемой точке в процессе нагружения;  $e_c$ ,  $e_y$  — значения объемной деформации, соответствующие пределам структурной прочности при сжатии и необратимого уплотнения.

**Решение.** Предложенная модель не учитывает влияние армирования. Сделать это предлагается следующим образом. Поскольку основное назначение арматуры заключается в усилении сопротивляемости бетона растягивающим нагрузкам, в первую очередь необходимо обратить внимание на диаграмму динамической сжимаемости, а точнее, на область положительных объемных деформаций. Именно в этой части диаграмма для железобетона будет отличаться от диаграммы для бетона [15].

Общий качественный вид обеих диаграмм одинаков. В обоих случаях они имеют три участка (см. рис. 1): область неразрушенного материала с обратимым

характером деформаций  $AB$ , область разрушающегося материала с необратимыми деформациями  $B CD$  и область полностью разрушенного материала  $DE$ . Отличие будет наблюдаться лишь в значениях физико-механических характеристик, отмеченных на диаграмме. Для железобетона на них должны повлиять физико-механические характеристики стали и коэффициент армирования. А именно, значения пределов структурной прочности и модулей объемного сжатия железобетона определяются следующим образом:

$$p_p^{жб} = p_p + \mu\sigma_T; \quad p_y^{жб} = p_y + \mu\sigma_T;$$

$$p_c^{жб} = p_c + \mu\sigma_T; \quad K_i^{жб} = K_i + \mu K_{ст}.$$

Здесь  $p_p^{жб}$ ,  $p_c^{жб}$ ,  $p_y^{жб}$  — пределы структурной прочности железобетона при растяжении, сжатии и уплотнении соответственно;  $\mu$ ,  $\sigma_T$ ,  $K_{ст}$  — коэффициент армирования, предел текучести и модуль объемного сжатия стали соответственно.

Следует отметить, что таким же образом с учетом коэффициента армирования необходимо пересчитать и значение модуля упругости, используемого для расчета напряжений в железобетоне.

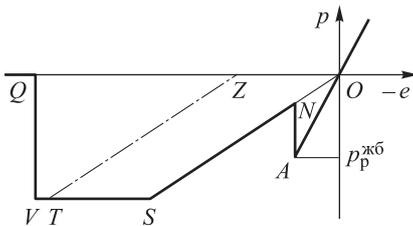


Рис. 2. Диаграмма растяжения железобетона

Поведение железобетона в области сжатия при нагрузке, разгрузке, повторной нагрузке будет таким же, что и у бетона. При положительных же объемных деформациях это поведение будет несколько другим (рис. 2).

При увеличении объема неразрушенного железобетона в области положительных деформаций давление будет уменьшаться по прямой  $OA$ . В точке  $A$  оно достигнет значения предела структурной прочности железобетона при сжатии  $p_p^{жб}$  и после этого не поднимется до нуля, как у бетона, а примет значение, равное давлению в точке  $N$ , расположенной на прямой  $OS$ . Тангенс угла наклона этой прямой равен произведению коэффициента армирования на модуль объемного сжатия стали  $\mu K_{ст}$ . При дальнейшем увеличении объема давление будет изменяться по прямой  $OS$ , т. е. растяжению будет сопротивляться только арматура до достижения давлением значения, равного произведению коэффициента армирования на предел текучести стали  $\mu\sigma_{ст}$ , соответствующего на диаграмме точке  $S$ . Отметим, что, если бетон был ранее разрушен при сжатии, изменение давления будет сразу же происходить по прямой  $OS$  (а не по прямой  $OA$ ).

Затем арматура начнет пластически деформироваться. В ней установится постоянное давление до разрыва в точке  $V$ , положение которой определяется значением линейной относительной деформации стали. После разрыва давление поднимется по линии  $VQ$  и в дальнейшем будет оставаться на нулевом уровне. Если до разрыва арматуры начнется сжатие (например, в точке  $T$ ), то давление будет увеличиваться вдоль линии  $TZ$ , параллельной  $OS$ .

Затем арматура начнет пластически деформироваться. В ней установится постоянное давление до разрыва в точке  $V$ , положение которой определяется значением линейной относительной деформации стали. После разрыва давление поднимется по линии  $VQ$  и в дальнейшем будет оставаться на нулевом уровне. Если до разрыва арматуры начнется сжатие (например, в точке  $T$ ), то давление будет увеличиваться вдоль линии  $TZ$ , параллельной  $OS$ .

Таким образом, можно на основе модификации диаграммы сжимаемости бетона учесть особенности поведения железобетона при растяжении и сжатии. Аналогичный подход используется и при получении критерия прочности железобетона [15]. При этом необходимо сделать следующие допущения:

- массив бетона армирован ортогонально расположенными стержнями, совпадающими с направлениями осей координатной системы (например,  $x, y, z$ );
- для каждой оси системы координат может быть свой коэффициент армирования ( $\mu_x, \mu_y, \mu_z$ );
- в стержнях арматуры могут возникать только продольные деформации (условие жесткости армировочной сетки);
- деформации в бетоне и арматуре равны (условие совместимости двух материалов);
- напряжения в железобетоне складываются из напряжений в бетоне и арматуре.

В этом случае можно записать следующие соотношения для предельных напряжений в железобетоне:

$$\begin{aligned}\sigma_i^{\text{жб}} &= \sigma_i + \mu_i \sigma_T; \\ \tau_{i,j}^{\text{жб}} &= \tau_{i,j}.\end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_i^{\text{жб}}, \tau_{i,j}^{\text{жб}}, \sigma_i, \tau_{i,j}$  ( $i, j = x, y, z$ ) — предельные нормальные и касательные напряжения в железобетоне и бетоне;  $\mu_i$  ( $i = x, y, z$ ) — коэффициенты армирования бетона в направлении соответствующих координатных осей;  $\sigma_T$  — предел текучести арматурной стали.

Расписав первый инвариант тензора напряжений, второй и третий инварианты девiatorа напряжений через эти соотношения и подставив их в критерий прочности бетона (1), получаем критерий прочности железобетона.

Приведенная математическая модель поведения железобетона при его динамическом нагружении предназначена для использования в компьютерном моделировании различных случаев оценки прочности конструкций и реализована в авторской программе [16] при использовании конечно-разностного лагранжевого подхода. Предложенный подход тестировался для случаев ударного нагружения конструкций проникающими телами [5, 16]. Результаты расчетов хорошо качественно и количественно согласуются с результатами экспериментов [4–7, 17]. При этом моделирование проводилось с помощью разных численных методов решения задачи в постановке механики сплошной среды. Во всех случаях наблюдалось достаточно хорошее соответствие результатов расчетов и экспериментов. На рис. 3 приведено одно из таких соответствий (крестиками показаны ячейки, в которых нарушен критерий прочности бетона (1) и он приобретает свойства сыпучей среды). Для расчета показана уже практически сформированная к моменту пробития картина разрушения преграды (время от начала процесса проникания 325 мкс), а для эксперимента представлен разрез преграды после ее пробития.

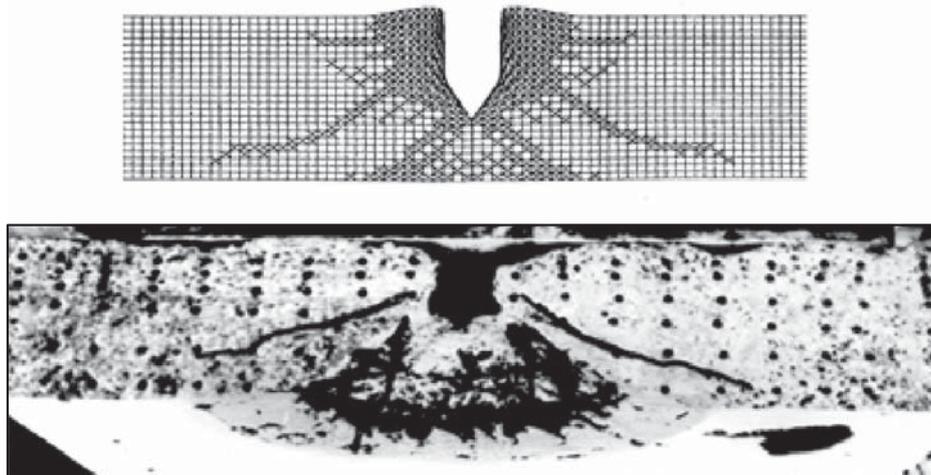


Рис. 3. Сравнение результатов расчета (время проникания 325 мкс) и эксперимента

Здесь использовался стальной ударник с конической головной частью с углом при вершине  $60^\circ$ , массой 0,347 кг, диаметром 24 мм. Преграда — железобетонная плита толщиной 100 мм, изготовленная из бетона марки 300, с коэффициентом армирования 2 %, скорость соударения 237 м/с.

Сравнение по виду и размерам зон разрушения, характеру разрушения в различных областях преграды показывает, что принятый подход к моделированию железобетона адекватно отражает процесс его ударного нагружения.

**Выводы.** Разработана математическая модель поведения железобетона при динамическом нагружении. Она может быть использована при компьютерном моделировании различных случаев оценки прочности конструкций из железобетона. Особую актуальность использование предложенного подхода приобретает при необходимости компьютерного моделирования поведения специальных усиленных бетонных конструкций с высоким коэффициентом армирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Luk V.K., Dykes J.A., Bishop J.E., Taylor P.A., et al. High speed penetration into low strength concrete target // Proc. 24th Int. Symp. on Ballistics. 2008. P. 706–713.
2. Thermal effect on mass loss of projectile during penetration into concrete: experimental and numerical study / L. Guo, Yo. He, X. Zhang, Yu. He, L. Qiao // Proc. 28th Int. Symp. on Ballistics. 2014. P. 959–1168.
3. Sauer C., Heine A., Riedel W., Wickert M. Application of the RHT concrete model for predictive simulations of the penetration into adobe targets // Proc. 30th Int. Symp. on Ballistics. 2017. P. 2093–2104.
4. Экспериментальные и теоретические исследования влияния механических свойств бетона и бетонных конструкций на характер их деформирования при проникании скоростного ударника / В.А. Велданов, А.Ю. Даурских, Д.Е. Дудик, А.Л. Исаев, М.Ю. Сотский, С.В. Федоров // Известия высших учебных заведений. Физика. 2013. Т. 56. № 7-3. С. 26–28.

5. Велданов В.А., Дудик Д.Е., Исаев А.Л., Фёдоров С.В. Взаимодействие высокоскоростных ударников с бетоном // Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму. 2012. № 7-8. С. 35–43.
6. Бабич В.П., Велданов В.А., Даурских А.Ю. и др. Высокоскоростное проникание ударников в бетон // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. XIX Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. Т. 1. М.: Изд-во МАИ, 2013. С. 21–23.
7. Экспериментально-теоретический метод расчета взаимодействия недеформируемых тел с бетоном / В.А. Велданов, А.Л. Исаев, А.Ю. Перфильев, С.А. Шляпина, М.Ю. Сотский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. XXI Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. Т. 2. М.: Изд-во МАИ, 2015. С. 110–114.
8. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. № 6. С. 1057–1072.
9. Гениев Г.А., Киссюк В.Н. К вопросу обобщения теории прочности бетона // Бетон и железобетон. 1965. № 2. С. 16–29.
10. Баландин П.П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. 1937. № 1. С. 19–24.
11. Вовк А.А. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. Киев: Наукова думка, 1984. 288 с.
12. Вовк А.А., Михалюк А.В., Белинский И.В. Образование подземной полости при внутреннем взрыве в изотропном породном массиве // Прикладная механика. 1974. Т. 10. № 9. С. 53–59.
13. Баженов Ю.М. Бетон при динамическом нагружении. М.: Стройиздат, 1970. 271 с.
14. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. 316 с.
15. Attalla I., Novotny B. Missile impact on a reinforced concrete structures // Nuclear Engineering and Design. 1976. Vol. 37. No. 3. P. 321–332. DOI: 10.1016/0029-5493(76)90063-7
16. Исаев А.Л. Влияние армирования бетона на результаты динамического нагружения внедряющимися телами // Труды междунар. конф. «III Харитоновские тематические научные чтения». Саров: ВНИИЭФ, 2002. С. 150–156.
17. Gueraud R., Sokolovsky A., Kavrychine M., Astruc M. Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles — General introduction and experimental study, part I // Nuclear Engineering and Design. 1977. Vol. 41. No. 1. P. 91–102. DOI: 10.1016/0029-5493(77)90097-8

**Исаев Андрей Львович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Велданов Владислав Антонович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Исаев А.Л., Велданов В.А. Модель упрочнения бетона при армировании // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 6. С. 34–43.  
DOI: 10.18698/0236-3941-2018-6-34-43

---

**MODEL FOR CONCRETE STRENGTHENING DUE TO REINFORCEMENT****A.L. Isaev**  
**V.A. Veldanov**isaeval@bmstu.ru  
vevladi@mail.ru**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

We present a mathematical model for reinforced concrete response to dynamic loads. We based our model on the one used in numerical simulations for non-reinforced concrete when a concrete target is subjected to dynamic loads created by a penetrator. We stated and solved numerically a two-dimensional axially symmetric continuum mechanics problem. We detected the effect of reinforcement on the concrete structure by varying the dynamic compressibility of concrete in the zone where volumetric strain is positive, as well as by modifying its strength criterion. These variations and modifications took into account the physical and mechanical properties of reinforcement steel and the reinforcement ratio of the concrete structure. The resulting model can simulate the behaviour of reinforced concrete structures subjected to dynamic loads caused by rigid bodies penetrating into them

**Keywords**

*Numerical simulation, concrete, reinforcement, compressibility, strength criterion, dynamic loading, penetration*

Received 20.12.2017  
© BMSTU, 2018

---

**REFERENCES**

- [1] Luk V.K., Dykes J.A., Bishop J.E., Taylor P.A., Ludwigsen J.S., Dederman D.A. High speed penetration into low strength concrete target. *Proc. 24th Int. Symp. on Ballistics*, 2008, pp. 706–713.
- [2] Guo L., He Yo., Zhang X., He Yu., Qiao L. Thermal effect on mass loss of projectile during penetration into concrete: experimental and numerical study. *Proc. 28th Int. Symp. on Ballistics*, 2014, pp. 959–1168.
- [3] Sauer C., Heine A., Riedel W., Wickert M. Application of the RHT concrete model for predictive simulations of the penetration into adobe targets. *Proc. 30th Int. Symp. on Ballistics*, 2017, pp. 2093–2104.
- [4] Veldanov V.A., Dauriskikh A.Yu., Dudik D.E., et al. Experimental and theoretical research on effect of mechanical properties of concrete and concrete constructions on their deformation behaviour at speed striker penetration. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2013, vol. 56, no. 7-3, pp. 26–28 (in Russ.).
- [5] Veldanov V.A., Dudik D.E., Isaev A.L., Fedorov S.V. Interaction between highspeed strikers and concrete. *Voprosy oboronnoy tekhniki. Ser. 16. Tekhnicheskie sredstva protivodeystviya terrorizmu* [Military Enginery. Counter-terrorism technical devices. Issue 16], 2012, no. 7-8, pp. 35–43 (in Russ.).
- [6] Babich V.P., Veldanov V.A., Dauriskikh A.Yu., et al. High speed striker penetration into concrete. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsiy i splotnykh sred. XIX Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova. Vol. 1* [Dynamical and technological problems of construction mechanics and continuum mechanics. XIX Int. Gorshkov Symp. Vol. 1]. Moscow, MAI Publ., 2013, pp. 21–23 (in Russ.).

- [7] Veldanov V.A., Isaev A.L., Perfil'ev A.Yu., Shlyapina S.A., Sotskiy M.Yu. Experimental-theoretical calculation method of interaction between non-deformable bodies and concrete. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred. XXI Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova. Vol. 2* [Dynamical and technological problems of construction mechanics and continuum mechanics. XXI Int. Gorshkov Symp. Vol. 2]. Moscow, MAI Publ., 2015, pp. 110–114 (in Russ.).
- [8] Grigoryan S.S. On basic concepts in soil dynamics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, vol. 24, no. 6, pp. 1604–1627. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90013-7
- [9] Geniev G.A., Kissyuk V.N. On problem of concrete strength theory generalization. *Beton i zhelezobeton*, 1965, no. 2, pp. 16–29 (in Russ.).
- [10] Balandin P.P. On problem of strength theory. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov*, 1937, no. 1, pp. 19–24 (in Russ.).
- [11] Vovk A.A. Povedenie gruntov pod deystviem impul'snykh nagruzok [Soil behaviour under impact of pulse loads]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 288 p.
- [12] Vovk A.A., Mikhalyuk A.V., Belinskiy I.V. Formation of underground cavity at internal explosion in isotropic rock mass. *Prikladnaya mekhanika*, 1974, vol. 10, no. 9, pp. 53–59 (in Russ.).
- [13] Bazhenov Yu.M. Beton pri dinamicheskom nagruzhenii [Concrete under dynamic loading]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1970. 271 p.
- [14] Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Teoriya plastichnosti betona i zhelezobetona [Plasticity theory of concrete and ferro-concrete]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974. 316 p.
- [15] Attalla I., Novotny B. Missile impact on a reinforced concrete structures. *Nuclear Engineering and Design*, 1976, vol. 37, no. 3, pp. 321–332. DOI: 10.1016/0029-5493(76)90063-7
- [16] Isaev A.L. Impact of concrete reinforcement on dynamic loading effect by intruding body. *Trudy mezhdunar. konf. "III Kharitonovskie tematicheskie nauchnye chteniya"* [Proc. Int. Conf. "III Kharitonov Themed Scientific Readings"]. Sarov, VNIIEF Publ., 2002, pp. 150–156 (in Russ.).
- [17] Gueraud R., Sokolovsky A., Kavyrchine M., Astruc M. Study of the perforation of reinforced concrete slabs by rigid missiles — General introduction and experimental study, part I. *Nuclear Engineering and Design*, 1977, vol. 41, no. 1, pp. 91–102. DOI: 10.1016/0029-5493(77)90097-8

**Isaev A.L.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Computer Software and Information Technology, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Veldanov V.A.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of High-Precision Airborne Devices, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Isaev A.L., Veldanov V.A. Model for Concrete Strengthening due to Reinforcement. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the BaumanMoscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2018, no. 6, pp. 34–43 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-6-34-43