

ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОДУЛЕЙ ОБЪЕМНОЙ УПРУГОСТИ РАЗРЫХЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ С РОСТОМ ДЕФОРМАЦИИ

К.Ф. Комков¹

06kfk38@mail.ru

А.Н. Ерёмичев²

lestech91@gmail.com

¹ Военно-технический университет, г. Балашиха,
Московская обл., Российская Федерация

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Тензорно-нелинейные уравнения связи главных деформаций с тензором главных напряжений преобразованы в матричную форму. Преобразование уравнения для объемной деформации, принятого в виде суммы двух слагаемых, представляющих собой линейную и нелинейную деформации (дилатансию), привело к новой формулировке модулей и податливостей объемной упругости. Расчеты объемной деформации выполнены с учетом податливостей объемной упругости, поскольку они, являясь величинами, обратными «кажущимся» модулям, представлены плавными и неразрывными функциями главных напряжений. Показано, что зависимость податливостей от главных напряжений близка к линейной, которая не отражает ни нелинейность исходных диаграмм, ни нелинейность коэффициентов поперечных деформаций. С помощью математической модели определены характеристики упругости, деформации и проведена оценка анизотропии композитов и серого чугуна

Ключевые слова

Формоизменение, дилатансия, модуль объемной упругости, податливость, «классический» модуль, параметр разрыхления, параметр изменяющейся упругости, анизотропия

Поступила в редакцию 26.10.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Введение. Наиболее заметной особенностью композиционных материалов и чугуна является их склонность к изменению структуры и разрыхлению даже при малых нагрузках, а также разномодульность и разносопротивляемость при растяжении и сжатии. При использовании естественных и строительных материалов, а также современных зернистых композиционных материалов в ответственных конструкциях повышаются требования к механическим характеристикам, зависящим от состояния структуры. Этой проблеме посвящено множество классических экспериментальных и фундаментальных работ, которые невозможно назвать устаревшими, если обратиться, например, к [1, 2].

В современных теоретических работах [3–5] представлены математические модели, способствующие проведению дополнительных испытаний, подтверждающих их выводы. Для исследований серого чугуна результаты испытаний были взяты из [6, 7], а для композитов, обработка которых уже проводилась ранее, — из [8]. Эти материалы испытывались при простом нагружении до разрушения.

При обработке результатов принимали, что деформация является упругой, допуская, что диссипативные процессы изменения структуры не оказывают существенного влияния на основные характеристики. Многие из них проявляют зависимость упругих свойств от времени, поэтому в настоящей работе использованы результаты испытаний, полученные при одной скорости деформации.

Постановка задачи. Цель настоящей работы — показать, что при разрыхлении происходит не только хаотичная потеря внутренних связей, которая снижает объемную упругость, но в то же время процесс, который, формируя новую структуру, создает в материале деформационную анизотропию с осями, совпадающими с направлениями главных напряжений. Наличие этого процесса выявляется по техническим характеристикам, в первую очередь по «кажущимся» модулям или податливостям объемной упругости, изменяющим свои значения как от вида напряженного состояния, так и с ростом главных напряжений. Учет этого эффекта повышает возможности математической модели, которая показывает, что при разрыхлении проявляется различие законов изменения объемной деформации и формоизменения, свидетельствующих о возможном различии механизмов этих деформаций.

Вывод уравнений связи деформаций с напряжениями для определения технических характеристик. Вывод соотношений для первого варианта математической модели проведен в [9], допуская при этом отсутствие дилатансии. Необходимость более точных уравнений, учитывающих разрыхление, требует более громоздких алгебраических преобразований для определения характеристик и деформаций структурно неоднородных сред. Описание общей объемной деформации как суммы линейной части и дополнительной части — дилатансии, возникающей вследствие потери внутренних связей, предлагается вначале принять в виде следующего уравнения:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0y} + \varepsilon_g = \sigma_0 / 3K_\theta + 2\alpha\Phi_d S_0 / 9, \quad (1)$$

где K_θ — модуль объемной упругости, названный теоретическим; α — параметр разрыхления; Φ_d — среднеквадратическая податливость, отражающая зависимость объемной деформации от формоизменения; $S_0 = \{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 2\}^{1/2}$ — интенсивность напряжений; $\sigma_i = S_0 c_i / 3 + \sigma_0$ — главные напряжения; $c_1 = 2 \cos \theta$, $c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$, $c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$ — коэффициенты.

Математическая модель включает в себя уравнение (1), уравнение связи деформаций с напряжениями принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_k \sigma_0 \delta_{ij} / 3 + \Phi_m S_{ij} / 2 + \Phi_d [S_{i\alpha} S_{\alpha j} - (2/9)(1 - \alpha) S_0^2 \delta_{ij}] / S_0, \quad (2)$$

где $\Phi_k = 1/K_\theta$ — объемная податливость; $\sigma_0 = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$ — среднее напряжение; Φ_m и Φ_d — характеристики формоизменения; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$ — средняя деформа-

ция, $e_0 = \left\{ 2 \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] / 9 \right\}^{1/2}$ — интенсивность деформации, ε_i — главные деформации. Для преобразования необходимо представить уравнения (2) для главных деформаций (вначале с индексом 1). Выразив инвариантные величины $S_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) / 3$, $S_1^2 = (4\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3) / 9$, а также нелинейные слагаемые

$$\Phi_d \left[S_1^2 - 2S_0^2 / 9 \right] / S_0 = \Phi_d \left(4\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \right) / 9S_0 = 3\Phi_d \left[\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_3 + \sigma_3 S_2 \right] / 9S_0$$

и

$$2\Phi_d \varepsilon S_0 / 9 = \Phi_d \varepsilon \left[\sigma_1 (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2 (-\sigma_1 + 2\sigma_3 - \sigma_2) + \sigma_3 (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \right] / 9S_0 = 3\varepsilon \Phi_d \left[\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_3 + \sigma_3 S_2 \right] / 9$$

в главных напряжениях, приводим уравнение (2) к виду

$$\varepsilon_1 = \left\{ \sigma_1 \left[3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d c_{11} \right] - \sigma_2 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{21} \right] - \sigma_3 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{31} \right] \right\} / 9.$$

Выполняя подобные действия для уравнений с индексами 2 и 3, получаем

$$\varepsilon_2 = \left\{ -\sigma_1 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{12} \right] + \sigma_2 \left[3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d c_{22} \right] - \sigma_3 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{32} \right] \right\} / 9,$$

$$\varepsilon_3 = \left\{ -\sigma_1 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{13} \right] - \sigma_2 \left[\frac{3\Phi_m}{2} - \Phi_k - \Phi_d c_{23} \right] + \sigma_3 \left[3\Phi_m + \Phi_k - \Phi_d c_{33} \right] \right\} / 9.$$

По форме представления эти уравнения совпадают с уравнениями для описания деформации анизотропной среды.

Таким образом, уравнения (2) для главных деформаций приводятся к матричной форме и им можно придать вид

$$\varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j \quad (3)$$

или

$$\varepsilon_i = \sigma_i / E_i - \nu_{ji} \sigma_j / E_j - \nu_{\alpha i} \sigma_\alpha / E_\alpha; \quad (4)$$

здесь a_{ij} — коэффициенты деформаций, которые в общем случае являются переменными величинами и связаны с техническими характеристиками как

$$a_{ii} = E_i^{-1}; \quad a_{ij} = -\nu_{ji} E_j^{-1}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (i \neq j), \quad (5)$$

где E_i и ν_{ij} — технические характеристики: первые — три модуля продольной упругости среды в направлении главных напряжений, вторые — шесть коэффициентов поперечных деформаций. Они при наличии характеристик формоизменения Φ_m и Φ_d , методику определения которых можно найти в [5], и характеристики объемной деформации Φ_k определяются для любого напряженного состояния по следующим формулам:

$$E_i^{-1} = (3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d c_{ii}) / 9; \quad (6)$$

$$v_{ij} E_i^{-1} = (3\Phi_m / 2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij}) / 9; \quad (7)$$

$$c_{ii} = c_i(1 + \alpha), \quad c_{ij} = c_\alpha + \alpha c_i; \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq \alpha. \quad (8)$$

Структура этих характеристик указывает на то, что напряженные состояния, которые они описывают, являются сложными процессами, объединяющими формоизменение и объемную деформацию. Эти процессы взаимосвязаны, что подчеркивалось ранее при выборе конкретного выражения для уравнения (1), чтобы отразить опытные данные, учитывающие результаты испытаний разрыхляющихся материалов, в частности то, что при чистом сдвиге наблюдается нелинейная объемная деформация.

Результаты исследований линейной объемной деформации и дилатансии. Настоящая работа, являясь продолжением работы [5], в которой большое внимание было уделено описанию объемной деформации композитов при разных видах напряженного состояния, дает возможность подробнее рассмотреть вопрос о соотношении двух ее частей — линейной и дилатансии. Именно их изучение позволило найти подход к разработке методики определения технических характеристик, в том числе модулей объемной упругости. Располагая методикой совмещения опытных кривых для коэффициентов поперечных деформаций v_i , $i = p, c$ (растяжение и сжатие), с расчетными кривыми по соотношениям (6) и (7) [5], можно найти значения теоретического модуля K_θ и параметра разрыхления α как функций угла θ не только для этих композитов, но и для серого чугуна.

Они позволяют определить объемную деформацию по уравнению (1) как ее линейную часть, так и дилатансию. Это совмещение обеспечивает почти точное совпадение опытных значений с расчетными результатами для объемных деформаций, найденных по простым формулам $\varepsilon_{0i} = (1 - 2v_i)\varepsilon / 3$, как суммы линейной $\varepsilon_{0y} = \sigma_0 / 3K_\theta$ и нелинейной (дилатансии) $\varepsilon_g = 2\alpha\Phi_d S_0 / 9$ частей. Последнюю уточняли, используя формулу $\varepsilon_{gi} = \pm 2(v_{ti} - v_i)\varepsilon / 3$ (плюс для растяжения, а минус для сжатия). Коэффициенты поперечных деформаций $v_{ti} = (1 - \sigma_i / (3K_{\theta i}\varepsilon)) / 2$ определяли после завершения процесса совмещения опытных кривых для коэффициентов v_i как функций продольной деформации с кривыми, найденных расчетами, где $i = p, c$.

Объемные деформации для других состояний рассчитывали, используя допущение $A = S_0 e_0 / 2$ — работа напряжений на деформациях является функцией угла θ , а именно $A = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2$. Опираясь на исходные данные, полученные при испытаниях на растяжение, сжатие и чистый сдвиг, вычисляли A_j ($a_1 = A_\tau$, $a_2 = 3(A_c - A_\tau) / \pi$, $a_3 = 36(A_p - 2A_\tau + A_c) / \pi^2$). При отсутствии данных для чистого сдвига с некоторым приближением объемные деформации можно найти по данным, относящимся к растяжению и сжатию:

$$S_{0\tau} = \sqrt{2S_{0p}S_{0c}} / \left[(S_{0p}e_{0c} / e_{0\tau})^2 + (S_{0c}e_{0p} / e_{0\tau})^2 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Здесь интенсивности напряжений S_{0j} и интенсивности деформаций e_{0j} , $j = p, c, \tau$, относятся к состояниям растяжения, сжатия и чистого сдвига. Данные об этом инварианте $e_{0\tau}$ можно найти, используя уравнение (4). Так, определяя разности главных деформаций $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ для трех состояний, получаем

$$e_{0\tau} = \sqrt{3} S_{0\tau} (e_{0p} / S_{0p} + e_{0c} / S_{0c}) / c_{\tau}, \quad (10)$$

$c_{\tau} = 3 \cos \vartheta + \sqrt{3} \sin \vartheta$ при допущении, что $\vartheta = \pi/6$, $\theta \cong \psi$, $c_{\tau} \cong 3,464$, где θ и ψ — углы напряженного и деформированных состояний.

На рис. 1, а пять кривых 1–5 (сплошные) представляют линейную часть объемной деформации эластичного композита ВППМ-1 в зависимости от продольной деформации, принятой для удобства за ось абсцисс. (Далее она используется и для других величин, хотя они являются функциями иных аргументов.) Кривая 1, относящаяся к растяжению с ростом продольной деформации, имеет ординаты во много раз меньше, чем кривая 5 для сжатия (по абсолютной величине). При деформации, соответствующей пределу прочности при растяжении, линейная объемная деформация примерно в 16 раз меньше общей, найденной по коэффициенту поперечной деформации. Большая ее часть относится к дилатансии. Именно эти графики заставили провести поиск причин, вызывающих такой эффект, и возможностей его описания с помощью данной математической модели. Для этого был подробно рассмотрен процесс развития дилатансии и ее отношение к интенсивности деформаций ε_g / e_0 , названной относительной дилатансией.

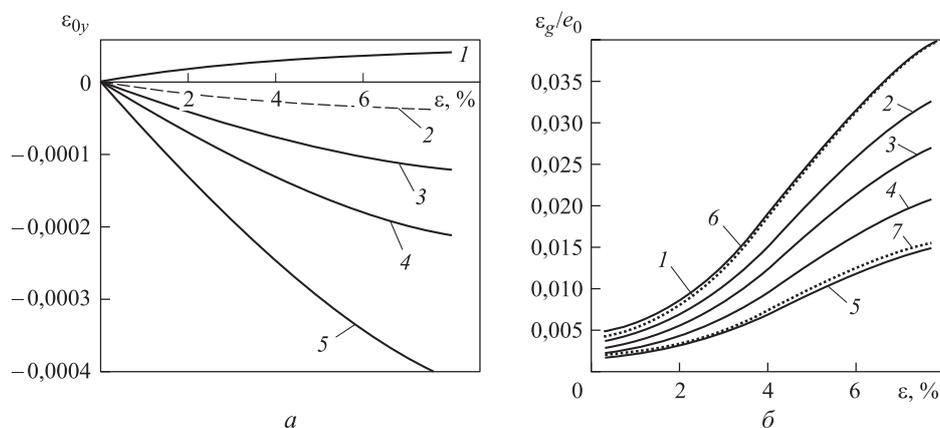


Рис. 1. Графики зависимостей линейной части объемной деформации эластичного композита ВППМ-1 (а) при $\theta = 0$ (кривая 1, растяжение) и $0, 50, 55$ и 60° (кривые 2–5, сжатие соответственно) и относительной дилатансии ε_g / e_0 (б) при $\theta = 0, 20, 30, 40$ и 60° (кривые 1–5 соответственно) от деформации ε ; кривые 6 и 7 (•••••) — опытные данные при $\theta = 0$ и 60°

Относительная дилатансия при нулевой продольной деформации отлична от нуля, что проверяется при простых состояниях расчетом по формуле $\varepsilon_g / e_0 = (v_{ii} - v_i) / (1 + v_i)$. На рис. 1, б пять кривых 1–5 (сплошные) представляют

относительную дилатансию ε_g/e_0 , а кривые 6 и 7 (•••••) построены по опытными данным о коэффициентах поперечных деформаций при растяжении и сжатии. Видно, что с ростом деформации примерно до 1,5 % внутренние связи сопротивляются их развитию. Процесс интенсивного разрушения начинается только при деформации более 2 %, далее он незначительно затухает, но при ~15 % приводит к полному разрыву связей. Поведение этого композита соответствует структурно-феноменологической модели В.В. Мошева [10], которая отчетливо показывает последовательный разрыв связи с освобождением ее от напряжений и связанных с ними частиц материала. С ростом дилатансии возрастает количество освобожденных от напряжений связей, а следовательно, «неработающего» материала. Следует отметить, что отсутствующие здесь кривые для дилатансии ε_g по конфигурации напоминают диаграмму связующего материала и отличаются от приведенных на рис. 1, б тем, что при нулевой деформации они исходят из начала координат, а в конце интенсивность их роста не снижается.

На рис. 2, а кривые 2–4 (сплошные) представляют дилатансию ε_g для углов $\theta = 0, 30$ и 60° , а кривые 1 и 5 (•••••) построены по опытными данным о коэффициентах поперечных деформаций при растяжении и сжатии жесткого композита ВНПМ-2. Кривые для растяжения и сжатия различаются незначительно по сравнению с первым композитом, что указывает на то, что механизмы их разрушения отличаются не существенно. Видно, что дилатансия, а следовательно, разрыхление, возрастает почти линейно вследствие стартовых дефектов, которые обнаруживают себя скачками относительной дилатансии в начале кривых (рис. 2, б), где пять кривых (сплошные) представляют относительную дилатан-

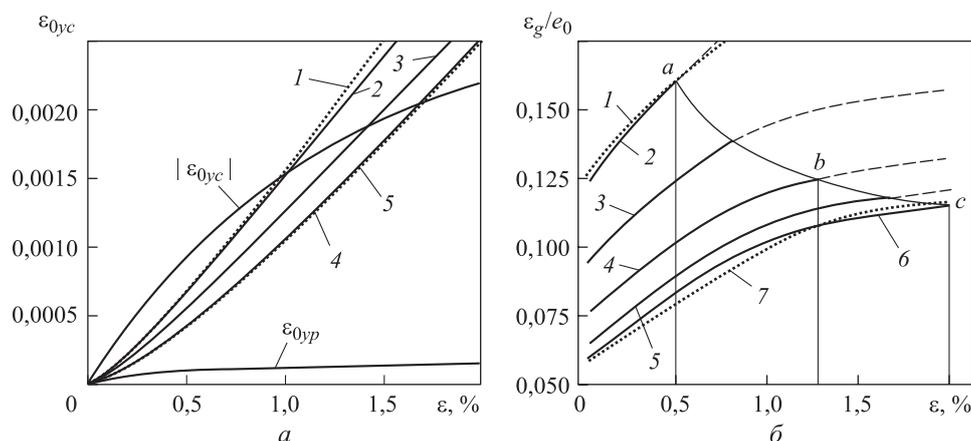


Рис. 2. Графики зависимостей для жесткого композита ВНПМ-2:

а — нелинейной части (дилатансии) ε_g от деформации ε при $\theta = 0, 30$ и 60° (кривые 2–4 соответственно), кривые 1 и 5 (•••••) — опытными данными при $\theta = 0$ и 60° , кривые ε_{0yp} и ε_{0yc} — зависимость линейной части объемной деформации от ε при растяжении и сжатии; б — относительной дилатансии ε_g/e_0 при $\theta = 0, 20, 30, 40$ и 60° (кривые 2–6 соответственно), кривые 1 и 7 (•••••) — опытными данными при $\theta = 0$ и 60°

сию. За пределами кривой *abc* начинается «экстраполяция», продолжение кривых — штриховая линия.

Для данного композита линейная объемная деформация, графики которой представлены кривой $\varepsilon_{0,yp}$ для растяжения, расположенной чуть выше оси абсцисс, тогда как абсолютные значения кривой $\varepsilon_{0,yc}$ для сжатия превышают их значения более чем на порядок. Эти же деформации для эластичного композита ведут себя аналогично. Такое соотношение линейной объемной деформации можно объяснить только утратой упругости вследствие разрыхления и потери упругих связей.

О поведении этих же деформаций для серого чугуна можно судить по графикам, приведенным на рис. 3. Графики для жесткого композита ВНПМ-2 и серого чугуна во многом повторяют друг друга, отличаясь лишь значениями объемных деформаций. Следует подчеркнуть то общее, что можно видеть на рис. 1–3, относящееся к достаточно разным материалам. Во-первых, линейная часть объемной деформации при растяжении, как и у эластичного композита, в несколько раз меньше, чем при сжатии, что подтвердило необходимость поиска причин этого эффекта. Во-вторых, зависимость относительной дилатансии от вида напряженного состояния — значительна, что подтверждается результатами испытаний (кривыми из точек).

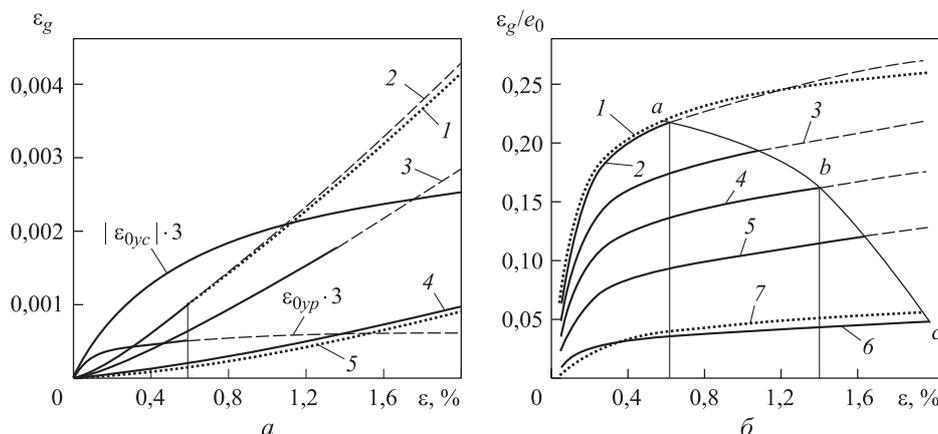


Рис. 3. Графики зависимостей для серого чугуна:

a — нелинейной части (дилатансии) ε_g от деформации ε при $\theta = 0, 30$ и 60° (кривые 2–4 соответственно), кривые 1 и 5 — опытные данные при $\theta = 0$ и 60° , кривые $\varepsilon_{0,yp}$ и $\varepsilon_{0,yc}$ — зависимости линейной части объемной деформации от ε при растяжении и сжатии; *b* — относительной дилатансии ε_g / e_0 при $\theta = 0, 20, 30, 40$ и 60° (кривые 2–6 соответственно), кривые 1 и 7 (•••••) — опытные данные при $\theta = 0$ и 60°

Большое различие начальных значений (скачки) относительной дилатансии для композита ВНПМ-2 и серого чугуна указывает на присутствие «стартовых» дефектов в виде микротрещин. У эластичного композита они незначительны, что говорит о высокой плотности внутренних связей и их прочности. Такое со-

отношение обеих частей объемной деформации можно объяснить только утратой упругости вследствие разрыхления и потери упругих связей.

«Кажущаяся» податливость и модули объемной упругости. Свертка уравнений (4) приводит к уравнению связи средней деформации с напряжениями в виде

$$\varepsilon_0 = (\sigma_1 \Phi_{k1} + \sigma_2 \Phi_{k2} + \sigma_3 \Phi_{k3}) / 9. \quad (11)$$

Расчеты объемной деформации можно проводить без математических трудностей, если заменить модули на их обратные величины:

$$\Phi_{ki} = 1 / K_i = 3(1 - \nu_{ij} - \nu_{i\alpha}) / E_i. \quad (12)$$

В этой формулировке податливостей объемной упругости продольные модули упругости E_i и все теоретические коэффициенты поперечных деформаций ν_{ij} занимают определенное место. Податливости, как и модули объемной упругости, являются «кажущимися» — термин В.В. Новожилова для деформационной анизотропии. Низкие значения «кажущихся» податливостей, но высокие для модулей, указывают не на возросшую жесткость материала, а на малость линейной объемной деформации вследствие потери внутренних связей между частицами, представляющими его макроструктуру ($i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j \neq \alpha$).

Податливости называют иногда коэффициентами объемного сжатия. Они как функции главных напряжений являются плавными и неразрывными, при использовании которых уравнение (11) становится удобным для детального исследования возникающей анизотропии и единственным для определения объемных деформаций. Привлекая соотношения (6) и (7) для продольных модулей упругости и коэффициентов поперечных деформаций податливости (12), получаем

$$\Phi_{ki} = \Phi_k + \Phi_d \varepsilon c_i,$$

что приводит к четким формулам, которые можно использовать для проверки результатов определения теоретического модуля K_0 и параметра разрыхления ε , найденных по предложенной методике.

Учитывая, что $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, среднее значение «кажущихся» податливостей приводит к определению теоретического модуля

$$\Phi_k = 1 / K_0 = (\Phi_{k1} + \Phi_{k2} + \Phi_{k3}) / 3,$$

а отношение разности первой и третьей податливости к среднеквадратической податливости с коэффициентами приводит к формуле определения параметра разрыхления

$$\varepsilon = (\Phi_{k1} - \Phi_{k3}) / (\Phi_d (c_1 - c_3)).$$

Проверка придает уверенность в том, что одни из самых необходимых характеристик определены без ошибки и позволяют провести исследования «кажущихся» податливостей, а следовательно, и модулей объемной упругости.

На рис. 4, *а* приведено пять кривых для податливостей с индексом 1. Они относятся к разным видам напряженного состояния, изменяющимся от нуля (растяжение) до 60° (сжатие) с шагом 15° . На рис. 4, *б* показаны графики для податливостей $\Phi_{k2-\theta}$, которые вначале положительные, но с ростом напряжений и с изменением угла θ могут принимать нулевые и отрицательные значения. Ниже всех расположена кривая Φ_{k2-0} , относящаяся к растяжению. Меньшее изменение проявляет податливость Φ_{k2-60} , как и на рис. 4, *б* относящаяся к сжатию.

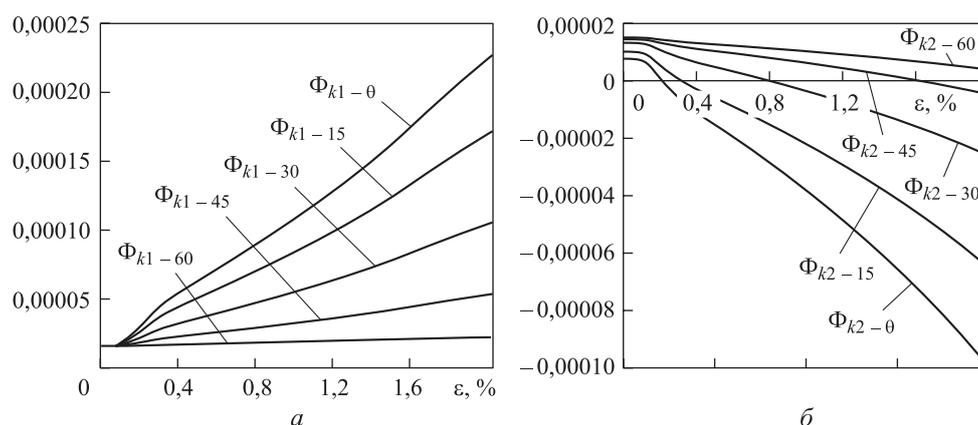


Рис. 4. Графики податливостей объемной упругости $\Phi_{k1-\theta}$ для эластичного композита ВНПМ-1 (*а*) и $\Phi_{k2-\theta}$ для серого чугуна (*б*) при $\theta = 0, 15, 30, 45$ и 60° соответственно

Начальные значения податливостей $\Phi_{k2-\theta}$ положительные, но отличаются большим изменением по ординате, чем $\Phi_{k1-\theta}$, что заметно на графиках, приведенных на рис. 4, *а*. Графики для податливостей $\Phi_{k3-\theta}$ по конфигурации близки к графикам $\Phi_{k2-\theta}$. Они изменяются так же по оси ординат и в том же диапазоне значений, поэтому здесь не приведены. На кривизну податливостей Φ_{ki} нелинейности исходных диаграмм и коэффициентов поперечных деформаций сказываются незаметно.

Начальные положительные значения «кажущихся» модулей K_i , найденные по начальным значениям податливостей Φ_{ki} , зависят только от угла θ . Эти модули превышают значение K — «классического» модуля, равного K_1 при угле $\theta = 0$ (растяжение), найденного по начальным исходным опытными данным. На рис. 5, *а* показаны графики для «кажущихся» модулей $K_i = 1/\Phi_{ki}$. Они представляют модули K_i и теоретический модуль K_0 для серого чугуна. Их следует рассматривать как величины, несущие информацию о состоянии внутренних связей материала, характеризующих объемную упругость, изменяющуюся с изменением угла θ от нуля (растяжение) до 60° (сжатие).

Графически они иллюстрируются тремя незамкнутыми ветвями, как и модули продольной упругости E_i . Каждое их значение относится не ко всему микроробъему, как модуль K , а к главным площадкам. При нулевом значении пара-

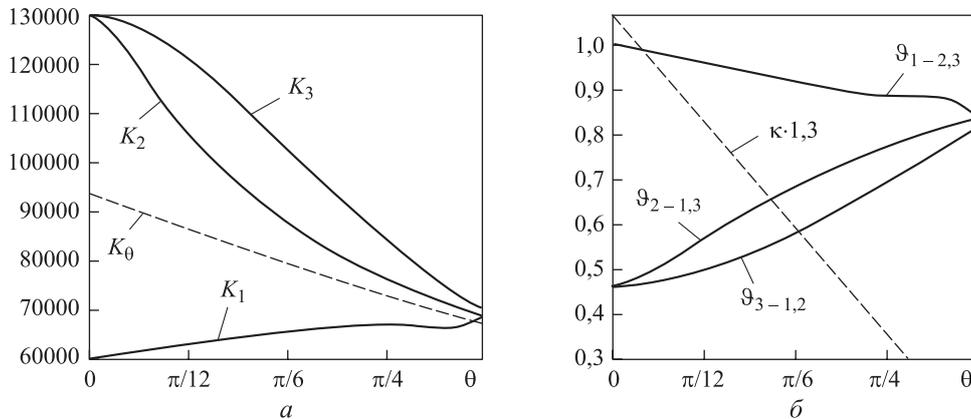


Рис. 5. Графики начальных модулей объемной упругости K_1 – K_3 , теоретический модуль K_0 , найденный по методике (а), и параметров изменяющейся упругости ϑ_i и разрыхления κ для серого чугуна (б)

метра разрыхления модули K_i равны теоретическому модулю K_0 . Этот модуль K_0 , найденный по методике, показан штриховой линией. По конфигурации кривые как для «кажущихся» модулей, так и для параметров аналогичны кривым для композитного материала (которые здесь не приведены, чтобы не повторяться), подтверждая, что подобное поведение характерно для всех разрыхляющихся материалов. По значениям начальных «кажущихся» модулей определены три параметра изменяющейся упругости ϑ_i как отношение «классического» модуля к «кажущимся» модулям упругости K_i . Эти параметры можно принять в качестве показателя количественной оценки остаточных внутренних связей и возникшей анизотропии. Их графики на рис. 5, б дают представление о сохранившейся упругости при значениях $\vartheta_i \leq 1$, а при $\vartheta_i > 1$ — о приобретенной в результате изменения связей и взаимодействия частиц структуры.

Параметры изменяющейся упругости зависят только от вида напряженного состояния. Индексы при них следующие: первый тот же, что и у модуля, второй и третий определяют площадки элементарного объема, в которых происходит потеря или приобретение упругости. Так, при простом растяжении $\theta = 0$ параметр $\vartheta_{1-2,3}$ означает, что в горизонтальных площадках элементарного объема никаких изменений упругости нет ($\vartheta_i = 1$), а в обеих вертикальных — наибольшие ($\vartheta_{2-1,3} = \vartheta_{3-1,2} = 0,47$). При чистом сдвиге ($\theta = \pi / 6 = 30^\circ$) изменения упругости происходят во всех трех плоскостях ($\vartheta_1 \approx 0,9$; $\vartheta_2 \approx 0,7$; $\vartheta_3 \approx 0,57$), а при простом сжатии во всех плоскостях упругость ($\vartheta_1 = \vartheta_{3,2} \approx 0,82$; $\vartheta_3 = 0,81$) не возрастает, как у эластичного композита. При сжатии у композита параметры ϑ_i возрастают значительно, тогда как у чугуна приобретенная упругость почти отсутствует.

«Экстраполяция» начальных данных для серого чугуна, относящихся к растяжению, вносит трудности в методику совмещения теоретической кривой для $\nu_{1,2}$ с опытной кривой, включающей значение коэффициента ν_p , соответствующую

щего разрушению. Разрушение является фактом полной потери упругости и добиться совмещения кривых не всегда удается, потому что модуль $K_\theta \rightarrow \infty$ при $\theta = 0$. Поэтому значения опытной кривой вместе с участком «экстраполяции» приходится увеличивать на 5...10 %, обходя значение коэффициента ν_p . Отметим, что с приближением данных к значению коэффициента ν_p конфигурация кривых и значения «кажущихся» модулей и параметров изменяющейся упругости заметно возрастают.

Малые значения параметра $\vartheta_{3-1,2}$ в начале кривой говорят о том, что при этом он приближается к предельному значению при растяжении, т. е. к полной утрате упругости. На площадках 1, 3 и 1, 2 параметры $\vartheta_{2-1,3} = \vartheta_{3-1,2}$ имеют наименьшие значения, свидетельствуя об утрате их упругости, а в горизонтальных площадках 2, 3 они раскрывают «стартовые дефекты», подготавливая материал к еще большим изменениям и даже к расслоению. Значения параметров $\vartheta_{2-1,3}$ и $\vartheta_{3-1,2}$, стремящиеся к нулю в начале кривой ($\theta = 0$) у композита, указывают на то, что материал при этом приближается к утрате упругости. У чугуна значение $\vartheta_{3-1,2} \cong 0,47$ следует считать завышенным, вследствие влияния изменений значений коэффициента ν_p до и в пределах «экстраполяции». Таким образом, найденные значения «кажущихся» модулей и параметров изменяющейся объемной упругости ϑ_i серого чугуна указывают на то, что для точного описания объемной деформации одним значением «классического» модуля обойтись невозможно.

Заключение. Высокие значения «кажущихся» модулей указывают не на возросшую жесткость материала, а на снижение линейной деформации вследствие потери внутренних связей между частицами, представляющими его макроструктуру.

При решении практических задач основным следует считать «классический» модуль, а при последующих исследованиях для каждого напряженного состояния необходимо определять все нелинейные характеристики, включая «кажущиеся» податливости, модули и параметры.

С ростом нагрузки (или деформации) при растяжении материал теряет свою объемную упругость, но при сжатии может ее приобретать; материал после утраты «коротких» связей воспринимает напряжения только сохранившиеся связями, большая часть его может стать ненапряженной.

Анизотропия, на которую указывают параметры изменяющейся упругости и «кажущиеся» податливости и модули, свидетельствует о возможности проявления новой структуры вследствие развития стартовых дефектов и расслоений по площадкам, перпендикулярным наибольшему главному напряжению.

Математическая модель, включающая в себя упомянутые уравнения и методики, способна найти для разрыхляющихся материалов, подобных зернистым композитам и серому чугуну, деформационные характеристики, параметры разрыхления, параметры изменяющейся упругости и выявить анизотропию. Последние дают возможность оценить состояние материала и прогнозировать не только опасные площадки, но и траектории опасного расслоения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бел Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. I, II. М.: Наука, 1984. 596 с., 431 с.
2. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Изв. АН СССР. ПММ. 1951. Т. 15. № 2. С. 183–194.
3. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 111–123.
4. Ломакин Е.В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. № 5. С. 41–52.
5. Комков К.Ф., Ерёмичев А.Н. О разрыхлении пластичного композита при активной нагрузке и влияние его на деформационные и прочностные свойства // Наука и образование: научное издание. 2015. № 9. С. 279–297. DOI: 10/7463/0915.0812703
URL: <http://www.technomag.bmstu.ru/doc/812703.html>
6. Потапова Л.Б., Ярцев В.П. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? М.: Машиностроение, 2005. 244 с.
7. Давиденков Н.Н., Васильев Д.М. О коэффициенте поперечной деформации // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1952. № 5. С. 596–599.
8. Ерёмичев А.Н. Комплексные испытания по определению механических свойств высоконаполненного полимерного материала // Инженерный вестник. 2014. № 9.
URL: <http://engsi.ru/doc/726783.html>
9. Комков К.Ф. Описание анизотропии изотропных материалов, вызванной пластической деформацией // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 147–153.
10. Мошев В.В. Структурная механика зернистых композитов на эластомерной основе. М.: Наука, 1992. 79 с.

Комков Кирилл Федотович — канд. техн. наук, доцент Военно-технического университета (до 2014 г.) (Российская Федерация, 143900, Московская обл., г. Балашиха, ул. Карбышева, д. 8).

Ерёмичев Александр Николаевич — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Комков К.Ф., Ерёмичев А.Н. Об изменении модулей объемной упругости разрыхляющихся материалов с ростом деформации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 5. С. 51–64. DOI: 10.18698/0236-3941-2018-5-51-64

ON BULK MODULUS VALUES IN DILATANT MATERIALS VARYING WITH THE INCREASE IN STRAIN

K.F. Komkov¹
A.N. Eremichev²

06kfk38@mail.ru
lestech91@gmail.com

¹ **Military Technological University (now Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great), Balashikha, Moscow Region, Russian Federation**

² **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper transforms non-linear tensor equations describing the relation of principal strains to the principal stress tensor into matrix form, leading to equations containing a sum of two terms representing linear and non-linear strain (dilatancy) that are required for derivation of a more general equation of volumetric strain. We present new statements for moduli and compliances in volumetric elasticity. We computed volumetric strain taking into account compliances of volumetric elasticity, since, being reciprocal to the "apparent" moduli, they are described by continuous smooth functions of principal stresses. We show that compliances as functions of principal stresses are almost linear, which does not reflect either the non-linearity of initial plots or the non-linearity of Poisson's ratios. We used our mathematical model to determine elastic properties, strain and anisotropy in composites and grey cast iron

Keywords

Deformation, dilatancy, bulk modulus, compliance, "classical" modulus, dilatancy parameter, variable elasticity parameter, anisotropy

Received 26.10.2017

© BMSTU, 2018

REFERENCES

- [1] Bell J.F. The Experimental foundations of solid mechanics. Springer, 1973. 813 p.
- [2] Novozhilov V.V. On relation between strain and deformation in non-linear elastic medium. *Izv. AN SSSR. PMM*, 1951, vol. 15, no. 2, pp. 183–194.
- [3] Golovin N.N., Kuvyrkin G.N. Mathematical models of carbon-carbon composite deformation. *Mechanics of Solids (Izv. RAN. MTT)*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 596–605.
DOI: 10.3103/S0025654416050137
Available at: <https://link.springer.com/article/10.3103/S0025654416050137>
- [4] Lomakin E.V. Mechanics of media with stress-state dependent properties. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2007, vol. 10, no. 5, pp. 41–52 (in Russ.).
- [5] Komkov K.F., Eremichev A.N. On loosening plastic composite under active load and its influence on the deformation and strength properties. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2015, no. 9, pp. 279–297 (in Russ.).
DOI: 10.7463/0915.0812703 Available at: <http://www.technomag.bmstu.ru/doc/812703.html>
- [6] Potapova L.B., Yartsev V.P. Mekhanika materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. Kak prognoziryuyut predel'nye napryazheniya? [Mechanics of materials under combined stress. How to predict ultimate stress?]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 244 p.
- [7] Davidenkov N.N., Vasil'yev D.M. On coefficient of lateral deformation. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial laboratory. Diagnostics of materials], 1952, no. 5, pp. 596–599.
- [8] Eremichev A.N. Complex tests for estimation of mechanical properties of high-filled polymers. *Inzhenernyy vestnik* [Engineering Bulletin], 2014, no. 9 (in Russ.).
Available at: <http://engsi.ru/doc/726783.html>
- [9] Komkov K.F. Description of anisotropy of isotropic materials caused by plastic strain. *Mechanics of Solids (Izv. RAN. MTT)*, 2008, vol. 43, no. 1, pp. 124–130.
DOI: 10.1007/s11964-008-1012-0
Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11964-008-1012-0>

[10] Moshev V.V. *Strukturnaya mekhanika zernistyx kompozitov na elastomernoy osnove* [Structural mechanics of grain elastomer-based composites]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 79 p.

Komkov K.F. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Military Technological University (now Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great) (Karbysheva ul. 8, Balashikha, Moscow Region, 143900 Russian Federation).

Eremichev A.N. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Komkov K.F., Eremichev A.N. On Bulk Modulus Values in Dilatant Materials Varying with the Increase in Strain. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2018, no. 5, pp. 51–64 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3941-2018-5-51-64



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет монография автора
С.А. Бекетова
«Теория управляемого движения гусеничных машин»

Изложены основные теории движения гусеничных машин. Представлена математическая модель движения, позволяющая исследовать управляемое движение гусеничных машин. Определены граничные условия и общие закономерности управляемого движения гусеничных машин. Приведены теоретические основы выбора параметров элементов трансмиссии. Для научных и инженерно-технических работников, занимающихся исследованием, проектированием и созданием механических систем гусеничных машин, а также для студентов и аспирантов высших технических учебных заведений машиностроительных специальностей.

По вопросам приобретения обращайтесь:
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru