УДК 539.374

К. И. Романов

ОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На основе разложения однородных функций в ряды тейлоровского типа выделен класс операторов, определяющих энтропию. Даны оценки устойчивости различных вариантов ползучести с использованием теории течения. Приложениями являются различные критические значения и, в частности, время релаксации в нелинейном случае.

E-mail: romanovki@mail.ru

Ключевые слова: *ползучесть, устойчивость, материал, состояние, переменная, энергия.*

В теорию ползучести введем операторную переменную и покажем, что могут быть получены однородные функции критерия мощности с учетом упругих деформаций.

1. Уравнение состояния. Предположим, что в переменных систем автоматического управления $x - N$ (где x и N — обобщенные перемещения и сила) существует уравнение состояния теории течения [1]:

$$\dot{x} = \frac{\dot{N}}{c} + B(t)N^n, \tag{1}$$

где c — жесткость упругого элемента; $B(t)$ — функция времени, производная по которому обозначена точкой; $n =$ const.

В этом случае мощность

$$w = N\dot{x} = \frac{N\dot{N}}{c} + B(t)N^{n+1}$$

состоит из двух независимых частей: $w = w^e + w^c$. Из них первая часть (упругие деформации) может быть представлена полным дифференциалом

$$\frac{1}{2c}dN^2,$$

(а вторая вязкая составляющая) — нет.

Следовательно, если удастся в функции $N(t)$ найти однородные (в смысле одинаковой степени) w^e и w^c, то тогда мощность можно проинтегрировать и в теории ползучести окажется первый интеграл в виде энергии, подобно интегралу энергии в консервативной системе.

Определение однородных функций соответствует решению дифференциального уравнения

$$\frac{dN}{dt} = \alpha c B(t) N^{n}, \quad \alpha = \text{const}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ или $\alpha < 0$, а множители в правой части введены для выравнивания размерности.

Используя уравнение (1) при

$$(N\dot{N}/c) + BN^{n+1} = (N\alpha cBN^n/c) + BN^{n+1},$$

находим

$$w = (\alpha+1)BN^{n+1} = (\alpha+1)BN^nN = \frac{\alpha+1}{\alpha c}\frac{1}{2}\frac{dN^2}{dt},$$

и независимо от функции времени $B(t)$ получаем

$$Э = \int dw = \int wdt = \frac{\alpha+1}{2\alpha c}N^2,$$

т.е. в упруго-вязком материале существует интегрируемость.

Например, если $\alpha = -1$, то $Э = 0$, что соответствует нулевому обмену энергии упруговязкой системы с окружающей средой. Такой процесс является релаксацией. При $\alpha > 0$ и $N = \text{const}$ оказывается, что $Э = \text{const}$, как и в случае последействия. Следовательно, $\alpha = -1$ соответствует закрытой, а $\alpha > 0$ — открытой системе.

С помощью операторной переменной $\omega = \beta\Omega$ ($\beta = \text{const}$) уравнение (2) приводим к следующему виду:

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{\alpha c}{\beta}N^n.$$

Уравнения такого типа встречаются во многих разделах математической физики [2] (при $n = 1$), поэтому интересно выявить особенности решений и классифицировать свойства этих решений при различных значениях n и α ($n > 1$; $n < 1$; $n = 1$; $\alpha > 0$; $\alpha < 0$). Здесь переменные разделяются, и в результате получаем

$$\frac{N^{-n+1} - N(0)^{-n+1}}{-n+1} = \alpha c\Omega, \quad \Omega = \int_0^t B(t)dt$$

при $n \neq 1$ и

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{\alpha c}{\beta}N$$

при $n = 1$, а решением является функция

$$N = N(0)e^{\alpha c\Omega}.$$

Релаксация осуществляется при $\alpha = -1$ по уравнению

$$N = N(0)e^{-c\Omega}.$$

Условие $\Omega_* = 1/c$ определяет время релаксации [1] без начальных значений $N(0)$.

Когда $n < 1$, решение

$$N = N(0)\left[1 + \frac{\alpha c\,(1-n)}{N(0)^{1-n}}\Omega\right]^{\frac{1}{1-n}}$$

распадается на две интегральные кривые:

$$N_1 = N(0)\left[1 - \frac{c\,(1-n)}{N(0)^{1-n}}\Omega\right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (\alpha = -1)$$

и

$$N_2 = N(0)\left[1 + \frac{c\,(1-n)}{N(0)^{1-n}}\Omega\right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (\alpha = 1)\,,$$

причем N_1 представляет собой затухающее решение в конечное время

$$\Omega_*^{(1)} = \frac{N(0)^{1-n}}{c\,(1-n)}.$$

В случае если $n > 1$, также имеем две интегральные кривые

$$N_3 = N(0)\left[1 + c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega\right]^{-\frac{1}{n-1}} \quad (\alpha = -1)$$

и

$$N_4 = N(0)\left[1 - c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega\right]^{-\frac{1}{n-1}} \quad (\alpha = 1)\,.$$

В последнем случае происходит “катастрофа” с асимптотическим значением координаты времени:

$$\Omega_*^{(4)} = \frac{1}{c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}}.$$

Формулы для определения $N(\omega)$ находим как собственные функции уравнения состояния (1). Учитывая симметрию, можно представить существование еще четырех, так называемых сопряженных функций, не удовлетворяющих условию однородности, а именно: при $n < 1$

$$\bar{N}_1 = N(0)\left[1 - \frac{c\,(1-n)}{N(0)^{1-n}}\Omega\right]^{-\frac{1}{1-n}},$$

$$\bar{N}_2 = N(0)\left[1 + \frac{c\,(1-n)}{N(0)^{1-n}}\Omega\right]^{-\frac{1}{1-n}}$$

и при $n > 1$

$$\bar{N}_3 = N(0)\left[1 + c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\bar{N}_4 = N(0)\left[1 - c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega\right]^{\frac{1}{n-1}}.$$

Функции $N_1, N_3, \bar{N}_2, \bar{N}_4$ определяют интегральные свойства релаксационного типа, а $N_2, N_4, \bar{N}_1, \bar{N}_3$ соответствуют возрастающим решениям, из которых два — катастрофические [3].

2. Осциллятор с одной степенью свободы. Уравнение движения осциллятора [4] с учетом уравнения состояния (1) имеет вид

$$\frac{d^2N}{dt^2} + \omega_0^2 N + c\frac{d(BN^n)}{dt} = 0,$$

где ω_0 — собственная частота, или в операторной переменной

$$\frac{d}{d\omega}\left(\beta B\frac{dN}{d\omega}\right) + \frac{\omega_0^2 N}{\beta B} + c\frac{d\,(BN^n)}{d\omega} = 0. \tag{3}$$

В основе приближенного исследования лежит предположение об определении различных частных решений, удовлетворяющих отдельным составляющим дифференциального уравнения. Например, комбинация

$$\frac{d}{d\omega}\left(\beta B\frac{dN}{d\omega}\right) + c\frac{d}{d\omega}\,(BN^n) = 0$$

выполняется при

$$\frac{dN}{d\omega} = -\frac{c}{\beta}N^n$$

и имеет все свойства решения (2).

Отметим, что операторная переменная из-за различий в масштабе реального времени позволяет исследовать огибающие вне связи с периодическим движением.

Второе слагаемое

$$N = -\frac{c\beta B}{\omega_o^2}\frac{d}{d\omega}\,(BN^n)$$

при $B = B_0 =$ const приводим к уравнению

$$N = -\frac{c\beta B}{\omega_o^2}\frac{dN^n}{d\omega}, \tag{4}$$

собственными функциями которого оказываются

$$N = N(0)\left[1 - \frac{n-1}{n}\frac{\omega_0^2\Omega}{cB_0^2 N(0)^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{при } n > 1$$

и

$$N = N(0)\left[1 + \frac{1-n}{n}\frac{\omega_0^2\Omega}{cB_0^2}N(0)^{1-n}\right]^{-\frac{1}{1-n}} \quad \text{при } n < 1.$$

С точностью до множителя перед Ω первая из этих функций совпадает с $\bar{N}_4$, а вторая — с $\bar{N}_2$. Таким образом, сопряженные функции уравнения (1) получаются переводом выражения вида $c\,(1-n)\,\Omega/N(0)^{1-n}$ в вид $(1-n)\,\omega_0^2\Omega N(0)^{1-n}/\,(ncB_0^2)$ при $n<1$ и выражения $(n-1)\,\omega_0^2\Omega/\,[ncB_0^2N(0)^{n-1}]$ в $(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega c$, когда $n>1$. Появление сопряженных функций уравнения (1) обусловлено периодическим движением в реальном времени.

Из сопряженных функций $\bar{N}_2$ и $\bar{N}_4$ критическое время имеет вторая функция

$$\bar{\Omega}_*^{(4)} = \frac{1}{c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}}.$$

Собственные функции уравнения (4), соответствующие этим сопряженным функциям, дают также одно критическое время

$$\Omega_* = \frac{ncB_0^2N(0)^{n-1}}{(n-1)\,\omega_0^2}.$$

Равенство $\bar{\Omega}_*^{(4)}$ и Ω_* приводит к резонансу:

$$\omega_0 = \sqrt{n}cB_0N(0)^{n-1}. \tag{5}$$

Отметим совпадение $\bar{\Omega}_*^{(4)}$ и $\Omega_*^{(4)}$. В физическом смысле соотношение (5) определяет критическое равенство собственной частоты колебаний и параметров уравнения состояния (1) и начального условия. При выполнении этого условия осциллятор может потерять устойчивость колебаний в тех случаях, когда колебания происходят с подачей энергии, например при вращении, или вынуждающих сил, и создаются предпосылки катастрофического режима.

Сопоставляя время релаксации в решении уравнения (2) при $n=1$ и $\Omega_* = 1/c$ с аналогичной величиной в уравнении (4) $\Omega_* = cB_0^2/\omega_0^2$, получаем $\omega_0 = cB_0$, что непосредственно находится по уравнению (4) при $n=1$.

3. Энтропия процесса ползучести. Без последействия устойчивые интегральные кривые $N_i\,(\omega)$ и $\bar{N}_i\,(\omega)$ можно получить на основе энтропии с помощью выделения вычета ряда тейлоровского типа. По формуле

$$N = N(0)+\frac{dN}{d\omega}\omega+\frac{d^2N}{d\omega^2}\frac{\omega^2}{2}+\ldots=N(0)+N\left(\frac{dN}{Nd\omega}\omega+\frac{1}{N}\frac{d^2N}{d\omega^2}\frac{\omega^2}{2}+\ldots\right)$$

определим энтропию как первый член указанного разложения

$$\mathfrak{K} = \left|\frac{dN}{Nd\omega}\right|\omega.$$

Отметим, что отношение типа N'/N используется в целях получения, в частности, логарифмического вычета [5].

Например, для $N_1(t)$ имеем

$$\mathfrak{K}_1 = N(0)^{n-1} c\Omega \left[1 - \frac{c\,(1-n)\,\Omega}{N(0)^{1-n}}\right]^{-1}.$$

Выделенный оператор $\mathfrak{K}$ удовлетворяет определению энтропии как функции, у которой $\mathfrak{K}(0) = 0$; $d\mathfrak{K} > 0$ при $d\Omega > 0$. Критическое значение Ω_{**} можно найти по значению $\mathfrak{K} = 1$:

$$\Omega_{**}^{(1)} = \frac{N(0)^{1-n}}{c\,(2-n)} < \Omega_{*}^{(1)}.$$

Характерно то, что энтропия функции релаксационного типа асимптотически возрастает и, кроме того, $\mathfrak{K}$ и, соответственно, Ω_{**} оказываются зависящими от начальных условий. В случае если $n = 1$, последнее свойство не выполняется.

Если, например, определить энтропию у $N = N(0)\exp(-c\Omega)$, то $\mathfrak{K} = c\Omega$. По критерию $\mathfrak{K} = 1$ у указанной линейной функции $\Omega_{**} = \Omega_{*} = 1/c$, т.е. энтропия достигает критического значения в момент времени релаксации. Величина же $\Omega_{**}^{(1)}$ представляет собой время релаксации в нелинейном случае.

Возрастающая функция, например N_2, имеет, наоборот, ограниченную энтропию:

$$\mathfrak{K}_2 = c\Omega \left[1 + \frac{c\,(1-n)\,\Omega}{N(0)^{1-n}}\right]^{-1} N(0)^{n-1},$$

при том, что в функции N_2 значение Ω_{*} отсутствует.

По критерию $\mathfrak{K}_2 = 1$ получаем величину

$$\Omega_{**}^{(2)} = \frac{N(0)^{1-n}}{nc},$$

которую можно рассматривать как время катастрофы в нелинейной вязкоупругости в режиме, не имеющем асимптоты.

Оператор кривой N_4

$$\mathfrak{K}_4 = \frac{cN(0)^{n-1}\Omega}{1 - c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega}$$

и $\Omega_{**}^{(4)} = 1\Big/\left[cnN(0)^{n-1}\right]$, т.е. энтропия материала при $n > 1$ в катастрофическом режиме подобна энтропии при $n < 1$ в случае релаксации. При переходе значений n через единицу наблюдается инверсия физико-механических свойств.

Кривая N_3, определяющая интегральные свойства релаксационного типа, характеризуется энтропией

$$\mathfrak{K}_3 = \frac{cN(0)^{n-1}\Omega}{1 + c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}\Omega}.$$

Необычные свойства оператора $\mathfrak{K}_3$ заключаются в равенстве $\mathfrak{K}_3$ единице только в интервале $1 < n < 2$. В этом случае существует конечное время релаксации

$$\Omega_{**}^{(3)} = \frac{1}{(2-n)\,N(0)^{n-1}}.$$

Во всех других случаях процесс релаксации по кривой N_3 имеет особую точку — фокус. У сопряженных функций $\bar{N}_i$ энтропия совпадает с энтропией собственных функций N_i.

Решение уравнения (3) можно искать в виде $N = N(0)\exp(-\gamma\Omega)$, где параметр γ (в одном из вариантов) приближенно соответствует золотому сечению [6] вертикального отрезка, проведенного от абсциссы $\Omega_*^{(1)}$ или $\bar{\Omega}_*^{(4)}$ до пересечения с кривыми $\bar{N}_2$ или N_3.

4. Функция состояния. Выберем в качестве возможного варианта функцию $B(t)$ в виде экспоненты, соответствующей релаксации линейно-вязкой среды,

$$B(t) = B_0 e^{-\frac{t}{a}},\ a = \text{const}.$$

Для такого материала

$$\Omega = B_0 a\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right).$$

Функция Ω соответствует частному случаю ограниченной ползучести [1]. Энтропия материала с функцией состояния $B(t)$ указанного вида

$$\mathfrak{K} = \left|\frac{dB}{Bdt}t\right| = \frac{t}{a}.$$

Критическое значение $\mathfrak{K} = 1$ достигается при $t = a$. Отметим, что оператор типа $dB/(Bdt)$ является показателем устойчивости материала при больших пластических деформациях [1]. Здесь при $t = a$ значение $\Omega_* = B_0 a\,(e-1)/e$ можно рассматривать как ресурс устойчивости материала. Зависимость $\Omega(t)$ позволяет перевести функции $N(\Omega)$ в $N(t)$. И, кроме того, совпадение числа $(e-1)/e$ с одним из определенных ранее критических значений собственных или сопряженных функций свидетельствует о локальной неустойчивости процесса ползучести.

Глобальная неустойчивость в примере осциллятора с одной степенью свободы характеризуется совпадением

$$\frac{ncB_0^2 N(0)^{n-1}}{(n-1)\,\omega_0^2} = B_0 a\frac{e-1}{e}$$

и

$$\frac{1}{c\,(n-1)\,N(0)^{n-1}} = B_0 a\frac{e-1}{e}.$$

Условие (5) в сочетании со вторым из указанных равенств дает возможность получить соотношение

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{n}e}{a\,(n-1)\,(e-1)},$$

т.е. можно исключить упругую жесткость и начальное условие из формулы (5).

Таким образом, выделен класс операторов, определяющих энтропию, на основе разложения однородных функций в ряды тейлоровского типа. Даны оценки устойчивости различных вариантов ползучести с использованием теории течения. Приложениями являются различные критические значения и, в частности, время релаксации в нелинейном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а л и н и н Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
2. Г н е д е н к о Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС. 2001. – 320 с.
3. Р о м а н о в К. И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. 1993. – Вып. 33. – С. 139–151.
4. H o f f N. Damping of the vibrations of a coiled spring due to creep // Creep in structures/ Berlin: Springer–Verlag. 1960. – P. 355–373.
5. Л у н ц Г. Л., Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Функции комплексного переменного. – СПб.: Лань. 2002. – 304 с.
6. К о р о б к о В. И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ. 1998. – 373 с.

Статья поступила в редакцию 13.10.2009

Константин Игоревич Романов родился в 1952 г., окончил в 1975 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ в области механики деформируемого твердого тела.

K.I.Romanov (b. 1952) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1975. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 120 publications in the field of mechanics of deformable body.