УДК 536.2 DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-4-15

ОПТИМАЛЬНАЯ ТОЛЩИНА АНИЗОТРОПНОГО ПОКРЫТИЯ РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ СТЕНКИ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.В. Аттетков fn2@bmstu.ru
И.К. Волков fn2@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Сформулирована и решена задача об определении стационарного температурного поля изотропной стенки, разделяющей среды с различными теплофизическими свойствами и имеющей покрытие с анизотропией свойств общего вида. Незащищенная граница анизотропного покрытия подвержена воздействию стационарного теплового потока с интенсивностью гауссова типа. Решение задачи, полученное в аналитически замкнутом виде, использовано для обоснования возможности существования оптимальной толщины анизотропного покрытия, обеспечивающей минимальную установившуюся температуру его наиболее нагретой точки

Ключевые слова

Изотропная разделительная стенка, анизотропное покрытие, локальное тепловое воздействие, стационарное температурное поле, оптимальная толщина покрытия

Поступила в редакцию 07.12.2017

Введение. Среди многочисленных приложений математической теории теплопроводности [1–4] заметно выделяются задачи оптимизации и оценивания эффективных значений теплофизических и геометрических параметров элементов конструкций. Среди известных задач этого класса выделим одну, заметно отличающуюся от других, как простотой математической постановки, так и прикладной значимостью. Речь идет о задаче определения достаточных условий существования оптимальной толщины изотропной стенки, одна из поверхностей которой находится под воздействием внешнего стационарного осесимметричного теплового потока с интенсивностью гауссова типа, а другая охлаждается внешней средой с постоянной температурой [5]. При этом в качестве критерия оптимальности используется требование минимизации температуры в наиболее нагретой точке объекта исследований.

Прикладная значимость задачи об определении «оптимальной толщины охлаждаемой стенки, подверженной местному нагреву» при всей простоте и наглядности ее исходной математической постановки [5] очевидна, равно как и полезность разного рода обобщений полученного результата. В частности, в [6] «оптимальная толщина анизотропного покрытия на охлаждаемой стенке при локальном внешнем нагреве» определяется как решение исходной задачи [5], где внешняя среда интерпретируется как охлаждаемая стенка, анизотропное покрытие имитируется ортотропной стенкой, тензор теплопроводности которой имеет два одинаковых диагональных элемента, обеспечивающих осевую симметрию температурного поля, а теплообмен в системе стенка–покрытие моделируется граничным условием третьего рода [2].

Отметим, что как в исходной постановке [5], так и в ее дальнейшем обобщении [6] на поверхности стенки, «подверженной местному нагреву», не учитывается ее теплообмен с внешней средой, температура которой может существенно отличаться от температуры внешней среды с охлаждаемой стороны объекта исследований.

С учетом сказанного и в связи с широким внедрением в инженерную практику [4] композиционных материалов целесообразность решения задачи об «оптимальной толщине анизотропного покрытия на охлаждаемой стенке при локальном внешнем нагреве» в полном объеме представляется очевидной и является основной целью настоящих исследований.

Исходные допущения и математическая модель. Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели стационарного температурного поля $T\left(x_1, x_2, x_3\right)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований имитируется изотропной стенкой постоянной толщины $h_{\text{с}}$, поверхность которой $x_2 = h_{\text{п}}$ обладает анизотропным покрытием постоянной толщины $h_{\text{п}}$;

2) внешняя поверхность анизотропного покрытия $x_2 = 0$ находится как под воздействием внешней среды с постоянной температурой $T_{\text{с.п}}$, так и внешнего стационарного теплового потока с интенсивностью гауссова типа, определяющими параметрами q_0, k и осью симметрии, совпадающей с координатной осью Ox_2, т. е.

$$Q\left(x_1, x_3\right) = q_0\left(\frac{k^2}{\pi}\right)\exp\left[-k^2\left(x_1{}^2 + x_3{}^2\right)\right];$$

3) незащищенная поверхность изотропной стенки $x_2 = h_{\text{п}} + h_{\text{с}}$ находится под воздействием внешней среды с постоянной температурой $T_{\text{с.с}} \neq T_{\text{с.п}}$;

4) теплообмен в системе объект исследований–внешняя среда реализуется по закону Ньютона с постоянными коэффициентами теплоотдачи [2, 3] $\alpha_{\text{п}}$ для среды при $x_2 < 0$ и $\alpha_{\text{с}}$ для среды при $x_2 > h_{\text{с}} + h_{\text{п}}$;

5) в системе изотропная стенка–анизотропное покрытие реализуются условия «идеального теплового контакта» [2, 3].

Согласно принятым допущениям и при использовании следующих обозначений запишем:

$$\theta = \frac{T - T_{\text{с.с}}}{T_{\text{с.с}}}, \quad \theta_{\text{п.с}} = \frac{T_{\text{с.п}} - T_{\text{с.с}}}{T_{\text{с.с}}}; \quad x = \frac{x_1}{l}, \quad y = \frac{x_2}{l}, \quad z = \frac{x_3}{l}; \; h = \frac{h_{\text{п}}}{l}, \; H = \frac{h_{\text{с}}}{l};$$

$$\mu_{ij}=\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}},\;\; \mu=\frac{\lambda}{\lambda_{22}};\;\; Q_0=\frac{q_0}{\lambda_{22} l T_{\text{с.с}}};\;\; \text{Bi}^{(\text{с})}=\frac{\alpha_{\text{с}}\, l}{\lambda},\;\; \text{Bi}^{(\text{п})}=\frac{\alpha_{\text{п}}\, l}{\lambda_{22}},$$

где l — используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij}\equiv\lambda_{ji}$ — компонента тензора теплопроводности анизотропного материала покрытия изотропной стенки, обладающей коэффициентом теплопроводности λ; функционал $\theta(x,y,z)$, определяющий искомое температурное поле, должен удовлетворять системе однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа [4]

$$\mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}+\mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0,$$

$$\begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,\;\; 0<y<h; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0,\;\; \begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,\;\; h<y<h+H, \qquad (2)$$

условиям «идеального теплового контакта» [2]

$$\theta\left(x,\, h-0,\, z\right)=\theta\left(x,\, h+0, z\right);$$
$$\left.\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\right|_{y=h-0}=\mu\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=h+0} \qquad (3)$$

и краевым условиям [7]

$$\left.\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\right|_{y=0}=-\,\text{Bi}^{(\text{п})}\left(\theta_{\text{п.с}}-\theta\right)\Big|_{y=0}-$$
$$-Q_0\frac{K^2}{\pi}\exp\left[-K^2\left(x^2+z^2\right)\right]; \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|_{y=h+H}=-\text{Bi}^{(\text{с})}\theta\Big|_{y=h+H}. \qquad (5)$$

Поскольку $\theta_{\text{п.с}}\neq 0$, то при построении замкнутой математической модели для искомого стационарного температурного поля объекта исследований возникает проблема определения класса функций, которому должен принадлежать функционал $\theta\left(x,y,z\right)$. При этом следует отметить, что в рассматриваемой ситуации указанная проблема фактически эквивалентна проблеме задания краевого условия при $x^2+z^2\to+\infty$.

Для преодоления возникших трудностей предполагаем, что функционал $\theta(x, y, z)$ имеет следующую структуру:

$$\theta(x, y, z) = \theta_1(y) + \theta_2(x, y, z) \tag{6}$$

и его аддитивная составляющая $\theta_1(y)$ удовлетворяет краевой задаче (1)–(5) при $Q_0 = 0$, т. е.

$$\begin{gathered}
\theta_1''(y) = 0,\ 0 < y < h; \\
\theta_1''(y) = 0,\ h < y < h + H; \\
\theta_1'(y)\big|_{y=0} = -\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\left[\theta_{\text{п.с}} - \theta_1(y)\right]\big|_{y=0}; \\
\theta_1(h-0) = \theta_1(h+0); \\
\theta_1'(y)\big|_{y=h-0} = \mu\,\theta_1'(y)\big|_{y=h+0}; \\
\theta_1'(y)\big|_{y=h+H} = -\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\,\theta_1(y)\big|_{y=h+H},
\end{gathered} \tag{7}$$

где штрихом обозначена производная по переменной y. Но в этом случае вторая аддитивная составляющая $\theta_2(x, y, z)$ искомого температурного поля объекта исследований согласно (1)–(7) является решением краевой задачи (1)–(5) при $\theta_{\text{п.с}} = 0$, т. е.

$$\begin{gathered}
\mu_{11}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2} = 0, \\
\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \ 0 < y < h; \\
\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2} = 0,\ \ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \ h < y < h + H; \\
\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} + \mathrm{Bi}^{(\text{п})}\theta_2\right]\Bigg|_{y=0} = -Q_0\frac{K^2}{\pi}\exp\left[-K^2\left(x^2 + z^2\right)\right]; \\
\theta_2(x,\ h-0,\ z) = \theta_2(x,\ h+0,\ z); \\
\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=h-0} = \mu\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\Bigg|_{y=h+0}; \\
\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\Bigg|_{y=h+H} = -\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\theta_2\big|_{y=h+H}; \\
\theta_2(x,\ y,\ z)\big|_{y\in[0,\,h+H]} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right),
\end{gathered} \tag{8}$$

где последнее условие означает, что для любого фиксированного значения $y \in \left[0,\, h + H\right]$ функционал $\theta_2(x,\, y,\, z)$ как скалярная функция пространственных переменных x и z принадлежит линейному пространству функций $L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, интегрируемых с квадратом в $\mathbb{R}^2$ [8], т. е. является оригиналом двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [9].

Температурное поле. Для определения первой аддитивной составляющей $\theta_1\left(y\right)$ искомого стационарного температурного поля $\theta\left(x, y, z\right)$ объекта исследований, воспользовавшись стандартными методами [10], находим решение краевой задачи (7) для системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка и представляем его в следующем виде:

$$\begin{gathered} \theta_1\left(y\right)\Big|_{y\in[0,h]} = a\mu\left(y-h\right)+b; \\ \theta_1\left(y\right)\Big|_{y\in[h,h+H]} = a\left(y-h\right)+b; \\ a=-\frac{\mathrm{Bi}^{(\text{с})}}{1+H\,\mathrm{Bi}^{(\text{с})}}b;\;\; b=\theta_{\text{п.с}}\left\{1+\mu\frac{\left(1+h\,\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\right)\mathrm{Bi}^{(\text{с})}}{\left(1+H\,\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right)\mathrm{Bi}^{(\text{п})}}\right\}^{-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Согласно сказанному ранее, функционал $\theta_2\left(x, y, z\right)$, определяющий вторую аддитивную составляющую искомого стационарного температурного поля $\theta\left(x, y, z\right)$ объекта исследований, при любом фиксированном значении пространственного переменного $y \in \left[0,\, h+H\right]$ является оригиналом двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [9], задаваемого парой линейных интегральных операторов:

$$\begin{gathered} \Phi\left[\cdot\right] \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp\left(-ipx-irz\right)dx\,dz; \\ \Phi^{-1}\left[\cdot\right] \equiv \frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp\left(ipx+irz\right)dp\,dr, \end{gathered} \tag{10}$$

где i — мнимая единица [2]. Воспользовавшись этим фактом, полагаем

$$A\left(p, y, r\right) \triangleq \Phi\left[\theta_2\left(x, y, z\right)\right]. \tag{11}$$

Поскольку оригинал $\theta_2(x, y, z)$ является решением краевой задачи (8) для системы двух линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, то для ее представления в пространстве изображений двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (10) воспользуемся стандартными свойствами [9] оператора $\Phi\left[\cdot\right]$ и соответствующими таблицами «оригинал–изображение» [11]. Таким образом, изображение $A\left(p, y, r\right)$ является решением следующей краевой задачи для системы двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2A}{dy^2}+2i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)\frac{dA}{dy}-\left(\mu_{11}p^2+2\mu_{13}pr+\mu_{33}r^2\right)A=0,\;\;0<y<h;\\
\frac{d^2A}{dy^2}-\left(p^2+r^2\right)A=0,\;\;h<y<h+H;\\
\left[\frac{dA}{dy}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)A-\mathrm{Bi}^{(\text{п})}A\right]\Bigg|_{y=0}=-Q_0\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right];\\
A\left(p,h-0,r\right)=A\left(p,h+0,r\right);\\
\left[\frac{dA}{dy}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)A\right]\Bigg|_{y=h-0}=\mu\frac{dA}{dy}\bigg|_{y=h+0};\\
\frac{dA}{dy}\bigg|_{y=h+H}=-\mathrm{Bi}^{(\text{c})}A\Big|_{y=h+H}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Специфика краевой задачи связана с наличием комплекса $i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)$ не только в первом уравнении системы и условиях сопряжения, но и в краевом условии при $y=0$. Поэтому естественно искать изображение $A\left(p,y,r\right)$ аддитивной составляющей $\theta_2\left(x,y,z\right)$ искомого стационарного температурного поля $\theta\left(x,y,z\right)$ объекта исследований в следующем виде:

$$
A\left(p,y,r\right)=B\left(p,y,r\right)\left\{\begin{array}{lr}\exp\left[i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)\left(h-y\right)\right], & 0\le y\le h-0\\ 1, & h+0\le y\le h+H\end{array}\right\}. \tag{13}
$$

При этом согласно (13) и (12) функционал $B\left(p,y,r\right)$ должен удовлетворять упрощенному аналогу краевой задачи (12):

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2B}{dy^2}-\delta\left(p,r\right)B=0,\;\;0<y<h;\\
\frac{d^2B}{dy^2}-\left(p^2+r^2\right)B=0,\;\;h<y<h+H;\\
\left[\frac{dB}{dy}-\mathrm{Bi}^{(\text{п})}B\right]\Bigg|_{y=0}=-Q_0\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}-i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)h\right];\\
B\left(p,h-0,r\right)=B\left(p,h+0,r\right);\\
\frac{dB}{dy}\bigg|_{y=h-0}=\mu\frac{dB}{dy}\bigg|_{y=h+0};\\
\frac{dB}{dy}\bigg|_{y=h+H}=-\mathrm{Bi}^{(\text{c})}B\Big|_{y=h+H},
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где положительная определенность квадратичной формы

$$\delta(p,r) \triangleq (\mu_{11}-\mu_{12}^2)p^2 + 2(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23})pr + (\mu_{33}-\mu_{23}^2)r^2 \tag{15}$$

при переходе к исходным обозначениям проверяется непосредственно с использованием критерия Сильвестра [12] и известных свойств тензора теплопроводности второго ранга [4].

С использованием стандартных методов [10] находим решение краевой задачи (14), (15) и представляем его в следующем виде:

$$B(p,y,r) = C(p,y,r,h)\,\mathrm{sh}\Big[(y-h)\sqrt{\delta(p,r)}\Big] + C_2(p,r,h)\,\mathrm{ch}\Big[(y-h)\sqrt{\delta(p,r)}\Big],$$

$$0 \le y \le h+H;$$

$$C(p,y,r,h) = C_1(p,r,h)\begin{Bmatrix} 1, & 0\le y\le h-0 \\ \mu^{-1}\sqrt{\delta(p,r)/(p^2+r^2)}, & h+0\le y\le h+H \end{Bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C_1(p,r,h) \\ C_2(p,r,h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12}(p,r) \\ a_{11}(p,r) \end{bmatrix}\frac{Q_0}{\Delta(p,r,h)}\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2} - i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)h\right];$$

$$\Delta(p,r,h) = a_{11}(p,r)a_{22}(p,r,h) + a_{12}(p,r)a_{21}(p,r,h); \tag{16}$$

$$a_{11}(p,r) = \sqrt{\delta(p,r)}\left\{\sqrt{p^2+r^2}\,\mathrm{ch}\Big[H\sqrt{p^2+r^2}\Big] + \mathrm{Bi}^{(\mathrm{c})}\,\mathrm{sh}\Big[H\sqrt{p^2+r^2}\Big]\right\};$$

$$a_{12}(p,r) = \mu\sqrt{p^2+r^2}\left\{\sqrt{p^2+r^2}\,\mathrm{sh}\Big[H\sqrt{p^2+r^2}\Big] + \mathrm{Bi}^{(\mathrm{c})}\,\mathrm{ch}\Big[H\sqrt{p^2+r^2}\Big]\right\};$$

$$a_{21}(p,r,h) = \sqrt{\delta(p,r)}\,\mathrm{ch}\Big[h\sqrt{\delta(p,r)}\Big] + \mathrm{Bi}^{(\text{п})}\,\mathrm{sh}\Big[h\sqrt{\delta(p,r)}\Big];$$

$$a_{22}(p,r,h) = \sqrt{\delta(p,r)}\,\mathrm{sh}\Big[h\sqrt{\delta(p,r)}\Big] + \mathrm{Bi}^{(\text{п})}\,\mathrm{ch}\Big[h\sqrt{\delta(p,r)}\Big].$$

Для завершения процедуры определения искомого стационарного температурного поля объекта исследований достаточно воспользоваться равенствами (11), (13), (16) и оператором $\Phi^{-1}[\cdot]$ обращения использованного двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (10). Таким образом, имеем:

$$\theta_2(x,y,z) = \frac{Q_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{a_{11}(p,r)\,\mathrm{ch}\Big[(y-h)\sqrt{\delta(p,r)}\Big] - g(p,r,y)\times$$

$$\times a_{12}(p,r)\,\mathrm{sh}\Big[(y-h)\sqrt{\delta(p,r)}\Big]\Big\}\frac{1}{\Delta(p,r,h)}\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2} + i(x-\mu_{12}y) + \right.$$

$$\left. + i(z-\mu_{23}y)\right]dp\,dr,\ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \ 0\le y\le h+H; \tag{17}$$

$$g(p,r,y) \triangleq \begin{Bmatrix} 1, & 0\le y\le h-0 \\ \mu^{-1}\sqrt{\delta(p,r)/(p^2+r^2)}, & h+0\le y\le h+H \end{Bmatrix}.$$

Для удобства практического использования полученного результата, представленного равенствами (17), (16) и (15), целесообразно воспользоваться известной теоремой о возможности одновременного приведения к каноническому виду двух квадратичных форм [12] и существующей связью между двумерными экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье и интегральным косинус-преобразованием Фурье [9].

Условия оптимальности. Согласно исходным допущениям, использованным при построении математической модели для описания искомого стационарного температурного поля объекта исследований, приходим к выводу, что его наиболее нагретая точка имеет нулевые координаты. Воспользовавшись равенствами (6), (9), (17) и (16), определяем температуру в этой точке:

$$\theta_0(h) \triangleq \theta(0,0,0) = \theta_{01}(h) + \theta_{02}(h);$$

$$\theta_{01}(h) \triangleq \theta_1(0) = b - a\mu h = \theta_{\text{п.с}}\left[1 - \frac{\mu \mathrm{Bi}^{(\text{с})}}{\left(\mathrm{Bi}^{(\text{п})} + \mu \mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right) + (H + \mu h)\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\ \mathrm{Bi}^{(\text{с})}}\right];$$

$$\theta_{02}(h) \triangleq \theta_2(0,0,0) = \frac{Q_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{a_{11}(p,r)\,\mathrm{ch}\left[h\sqrt{\delta(p,r)}\right] + \right.$$

$$\left. + a_{12}(p,r)\,\mathrm{sh}\left[h\sqrt{\delta(p,r)}\right]\right\}\Delta^{-1}(p,r,h)\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right]dp\,dr. \qquad (18)$$

Для идентификации искомых условий оптимальности толщины анизотропного покрытия согласно равенствам (18) находим производную от температуры в наиболее нагретой точке объекта исследований по толщине покрытия *h:*

$$\frac{d\theta_0(h)}{dh} = \frac{d\theta_{01}(h)}{dh} + \frac{d\theta_{02}(h)}{dh};$$

$$\frac{d\theta_{01}(h)}{dh} = \frac{\theta_{\text{п.с}}\left(\mu \mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right)^2 \mathrm{Bi}^{(\text{п})}}{\left[\left(\mathrm{Bi}^{(\text{п})} + \mu \mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right) + (H + \mu h)\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right]^2}; \qquad (19)$$

$$\frac{d\theta_{02}(h)}{dh} = \frac{Q_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(p,r)}{\Delta^2(p,r,h)}\left[a_{12}^2(p,r) - a_{11}^2(p,r)\right]\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right]dp\,dr.$$

Поскольку непосредственное использование полученного результата, представленного равенствами (19), для нахождения точки экстремума функционала $\theta_0(h)$ весьма проблематично, то вычисляем

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{d\theta_0(h)}{dh} = 0\cdot \operatorname{sign}\theta_{\text{п.с}} = +0 \Leftrightarrow \theta_{\text{п.с}} > 0, \qquad (20)$$

так как согласно (19), (15) и (16) при больших значениях параметра *h*, определяющего толщину анизотропного покрытия,

$$\frac{d\theta_{01}(h)}{dh} \sim o\left(h^{-2}\right), \ \frac{d\theta_{02}(h)}{dh} \sim o\left(\exp\left[-2h\sqrt{\delta(p_*, r_*)}\right]\right),$$

где $\left[p_*, r_*\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$.

Далее с учетом равенств (19), (20), (15) и (16) оцениваем значения производных для функционалов $\theta_{01}(h)$, $\theta_{02}(h)$ при малых значениях параметра h и приходим к следующему утверждению:

$$\left\{\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)+\left(\mu_{33}-\mu_{23}^2\right)>\mu^2\right\} \wedge \left\{K^2 > 2\pi\theta_{\text{п.с}}\, Q_0^{-1}\mu^4\left(\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\right)^2 \mathrm{Bi}^{(\text{с})} \times \right.$$
$$\left. \times\left[\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)+\left(\mu_{33}-\mu_{23}^2\right)>\mu^2\right]^{-1}\left[\mathrm{Bi}^{(\text{п})}+\mu\,\mathrm{Bi}^{(\text{с})}+H\,\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right]^{-1}\right\} \Rightarrow \quad (21)$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to+0}\frac{d\theta_0(h)}{dh}<0.$$

Таким образом, совокупность требований, содержащихся в соотношениях (20), (21) и обеспечивающих одновременную реализацию неравенств

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{d\theta_0(h)}{dh}=+0 \wedge \lim_{h\to+0}\frac{d\theta_0(h)}{dh}<0,$$

представляет собой искомые достаточные условия существования оптимальной (в смысле используемого критерия оптимальности) толщины анизотропного покрытия изотропной разделительной стенки двух различных сред.

Результаты и обсуждение. Достаточные условия существования оптимальной толщины анизотропного покрытия изотропной стенки, разделяющей среды с различными теплофизическими свойствами, при использовании в качестве критерия оптимальности требования минимизации температуры в наиболее нагретой точке объекта исследований и принятых допущениях:

- в системе изотропная стенка–анизотропное покрытие реализуются условия «идеального теплового контакта» [2, 3];
- теплообмен в системах внешняя поверхность объекта исследований–внешняя среда реализуется по закону Ньютона [2, 3];
- внешняя поверхность анизотропного покрытия находится под воздействием стационарного осесимметричного теплового потока с интенсивностью гауссова типа, определяются совокупностью трех неравенств:

$$\theta_{\text{п.с}}>0;$$

$$\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)+\left(\mu_{33}-\mu_{23}^2\right)>\mu^2;$$

$$K^2 > \frac{2\pi\theta_{\text{п.с}}\,\mu^4\left(\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\right)^2\mathrm{Bi}^{(\text{с})}}{Q_0\left[\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)+\left(\mu_{33}-\mu_{23}^2\right)-\mu^2\right]\left[\mathrm{Bi}^{(\text{п})}+\mu\,\mathrm{Bi}^{(\text{с})}+H\,\mathrm{Bi}^{(\text{п})}\mathrm{Bi}^{(\text{с})}\right]}.$$

Для реализуемости достаточных условий существования оптимальной толщины анизотропного покрытия изотропной разделительной стенки двух различных сред в рассматриваемой ситуации должно выполняться следующее необходимое условие:

$$\left(\theta_{\text{п.с}} > 0\right) \Leftrightarrow \left(T_{\text{с.п}} > T_{\text{с.с}}\right),$$

т. е. температура внешней среды со стороны анизотропного покрытия должна превышать температуру внешней среды с незащищенной стороны разделительной стенки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

4. *Формалёв В.Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Ч. 1. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.

5. *Зарубин В.С.* Оптимальная толщина охлаждаемой стенки, подверженной местному нагреву // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1970. № 10. С. 18–21.

6. *Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н.* Оптимальная толщина анизотропного покрытия на охлаждаемой стенке при локальном внешнем нагреве // Известия РАН. Энергетика. 2014. № 5. С. 45–50.

7. *Пехович А.И., Жидких В.М.* Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.

8. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

9. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 668 с.

10. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.

12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аттетков А.В., Волков И.К. Оптимальная толщина анизотропного покрытия разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 4. С. 4–15.
DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-4-15

OPTIMUM ANISOTROPIC COATING THICKNESS FOR A WALL SEPARATING TWO DIFFERENT MEDIA AND SUBJECTED TO LOCAL HEATING

A.V. Attetkov fn2@bmstu.ru
I.K. Volkov fn2@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article states and solves the problem of determining a steady-state temperature field in an isotropic wall separating media with different thermal and physical properties. The wall features an anisotropic coating displaying general anisotropy of its properties. The uncovered coating boundary is subjected to a steady-state heat flow with a Gaussian intensity profile. We obtained the solution in an analytically closed form and used it to validate the possibility that an optimum thickness of the anisotropic coating exists in terms of minimising the steady-state temperature at the hottest point

Keywords

Isotropic separator wall, anisotropic coating, local heating, steady-state temperature field, optimum coating thickness

Received 07.12.2017

REFERENCES

[1] Carslaw H., Jaeger J. Conduction of heat in solids. Oxford University Press, 1986. 520 p.

[2] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of thermal conduction]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p.

[3] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in heat conduction theory of solid bodies]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p.

[4] Formalev V.F. Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Ch. 1. Analiticheskie metody resheniya zadach [Thermal conduction of anisotropic bodies. P. 1. Analytical problem solving methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 312 p.

[5] Zarubin V.S. Optimum thickness of cooled wall exposed to the external heating. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 1970, no. 10, pp. 18–21 (in Russ.).

[6] Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Optimal thickness of the anisotropic surface on the cooling plate with applied local external heating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of RAS. Power Engineering], 2014, no. 5, pp. 45–50 (in Russ.).

[7] Pekhovich A.I., Zhidkikh V.M. Raschet teplovogo rezhima tverdykh tel [Calculating thermal regimes of solid body]. Leningrad, Energiya Publ., 1968. 304 p.

[8] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970. 712 p.

[9] Sneddon I.N. Fourier transforms. McGraw-Hill, 1951. 542 p.

[10] El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and variational calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.

[11] Bateman H., Erdelyi A. Tables of integral transforms. Vol. 1. McGraw Hill, 1954. 411 p.

[12] Bellman R. Introduction to matrix analysis. McGraw-Hill, 1960. 328 p.

Attetkov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Volkov I.K. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Attetkov A.V., Volkov I.K. Optimum Anisotropic Coating Thickness for a Wall Separating Two Different Media and Subjected to Local Heating. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2018, no. 4, pp. 4–15 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-4-15