

ОЦЕНКА ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ УЧЕТА КВАДРАТИЧНЫХ ЧЛЕНОВ В АНАЛИЗЕ ОШИБОК НАВЕДЕНИЯ МЕЖПЛАНЕТНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

С.В. Сухова

s.sukhova90@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Выполнено сравнение двух алгоритмов анализа ошибок наведения межпланетного космического аппарата. Первый использует линеаризованное дифференциальное уравнение движения космического аппарата, второй — линейные и квадратичные члены разложения правой части уравнения в ряд Тейлора. Ошибки наведения проанализированы методом Монте-Карло. Для оценки алгоритмов решена модельная задача анализа ошибок наведения космического аппарата, выполняющего полет к Венере. Полученные для каждого алгоритма результаты сравниваются с результатами анализа, проведенного с применением нелинеаризованного уравнения движения. По итогам сравнения сделан вывод о применимости представленных алгоритмов для анализа ошибок наведения на тех или иных этапах проектирования межпланетного космического аппарата

Ключевые слова

Анализ ошибок наведения, метод Монте-Карло, межпланетный перелет

Поступила в редакцию 31.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Введение. Проектирование траектории перелета межпланетного космического аппарата (КА) включает в себя оценку множества вариантов перелета на предмет соответствия различным требованиям (минимальные энергетические затраты на выведение КА, условия наблюдаемости и т. д.) с последующим отсеком траекторий, не удовлетворяющих данным требованиям. Анализ ошибок наведения межпланетного КА позволяет отсеять траектории, требующие слишком больших затрат импульса для коррекции.

С подходами к выполнению анализа ошибок наведения можно ознакомиться в работах [1–3]. Ошибки выполнения корректирующего маневра могут быть учтены с помощью модели маневра [4].

В настоящей работе выполнено сравнение двух алгоритмов анализа ошибок наведения: с удержанием только линейных членов разложения правой части дифференциального уравнения движения КА в ряд Тейлора и с удержанием линейных и квадратичных членов разложения. Результаты, полученные с помощью данных алгоритмов, сравнивают с результатами решения нелинеаризованного уравнения движения КА и проводят оценку затрат машинного времени на выполнение алгоритмов.

Постановка задачи. Цель настоящей работы — сравнение эффективности анализов ошибок наведения с учетом и без учета квадратичных членов разложения. Задача рассматривается в следующей постановке.

1. Опорную (номинальную) траекторию межпланетного перелета рассчитывают с использованием средних элементов орбит планет, относящихся к средним эклиптике и равноденствию эпохи J2000 [5].

2. Опорную траекторию определяют численным интегрированием дифференциального уравнения движения КА, начальное приближение вычисляют методом сопряженных конических сечений.

3. Ошибки наведения анализируют с помощью метода Монте-Карло.

Подробное описание алгоритмов и математические соотношения, необходимые для расчета, приведены далее.

Математические соотношения для расчета. Запишем уравнение движения КА под действием тел Солнечной системы в векторном виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla \left(U_p + U_s + \sum_{i=1}^n U_i \right), \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор положения КА относительно планеты-цели; U_p — потенциал силы тяготения планеты-цели; U_s — потенциал возмущающего воздействия Солнца на движение КА; U_i — потенциалы возмущающих воздействий других планет и тел Солнечной системы. Потенциалы сил, действующих на КА, имеют вид:

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{\mu_p}{r}; \\ U_s &= \mu_s \left(\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_p}{R_p} \right); \\ U_i &= \mu_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_{pi}}{R_{pi}} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где μ_p — гравитационный параметр планеты-цели; μ_s — гравитационный параметр Солнца; μ_i — гравитационный параметр i -го тела; r — модуль вектора \mathbf{r} ; R и R_p — модули гелиоцентрических радиусов-векторов КА \mathbf{R} и планеты-цели \mathbf{R}_p ; R_i — модуль радиуса-вектора КА относительно i -го тела \mathbf{R}_i ; R_{pi} — модуль гелиоцентрического радиуса-вектора i -го тела \mathbf{R}_{pi} . Подставляя (2) в (1) и применяя оператор набла, получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_p \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mu_s \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_p}{R_p} \right) - \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} - \frac{\mathbf{R}_{pi}}{R_{pi}} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) может быть сведено к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}; \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu_p \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mu_s \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_p}{R_p} \right) - \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} - \frac{\mathbf{R}_{pi}}{R_{pi}} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости КА относительно планеты-цели.

Воспользуемся предложенной в [6] формой записи системы (4)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad (5)$$

где $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z]^T$ — вектор состояния КА, а $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6]^T$ — вектор правых частей системы уравнений (4). Вектор функций $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ может быть разложен в ряд Тейлора относительно номинального решения \mathbf{X}^* (решение, соответствующее номинальной траектории перелета)

$$F(\mathbf{X}, t) = \left(1 + \mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{2} + \dots \right) F(\mathbf{X}^*, t), \quad (6)$$

где \mathbf{T} — дифференциальный оператор разложения функции в ряд Тейлора, который записывается как

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\partial}{\partial r_x} (r_x - r_x^*) + \frac{\partial}{\partial r_y} (r_y - r_y^*) + \frac{\partial}{\partial r_z} (r_z - r_z^*) + \frac{\partial}{\partial v_x} (v_x - v_x^*) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial v_y} (v_y - v_y^*) + \frac{\partial}{\partial v_z} (v_z - v_z^*). \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим $r_x - r_x^* = \Delta r_x$, $r_y - r_y^* = \Delta r_y$ и т. д. Оператор (7) примет вид

$$\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial r_x} \Delta r_x + \frac{\partial}{\partial r_y} \Delta r_y + \frac{\partial}{\partial r_z} \Delta r_z + \frac{\partial}{\partial v_x} \Delta v_x + \frac{\partial}{\partial v_y} \Delta v_y + \frac{\partial}{\partial v_z} \Delta v_z.$$

Преобразовав уравнение (6), запишем

$$F(\mathbf{X}, t) - F(\mathbf{X}^*, t) = \left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{2} + \dots \right) F(\mathbf{X}^*, t), \quad (8)$$

причем

$$F(\mathbf{X}, t) - F(\mathbf{X}^*, t) = \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}^* = \Delta \dot{\mathbf{X}},$$

где $\Delta \mathbf{X} = [\Delta r_x, \Delta r_y, \Delta r_z, \Delta v_x, \Delta v_y, \Delta v_z]^T$ — отклонение вектора состояния КА от номинального решения, тогда выражение (8) можно переписать в виде

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}(t) = \left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{2} + \dots \right) F(\mathbf{X}^*, t). \quad (9)$$

Рассмотрим два варианта уравнения (9) — для линейного и квадратичного приближений. В случае *линейного приближения* отбрасываются все члены разложения функции в ряд Тейлора выше первого порядка, и уравнение (9) принимает вид

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{T} F(\mathbf{X}^*, t). \quad (10)$$

Выражение (10) может быть представлено следующим образом [6]:

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{X}(t), \quad (11)$$

где \mathbf{A} — матрица (размера 6×6) частных производных вектора функций $\mathbf{F}(\mathbf{X}^*, t)$, вычисленных для номинальной траектории. Для удобства матрицу \mathbf{A} можно записать в виде четырех подматриц:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{E}_3 — единичная матрица размера 3×3 , $\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix}$ — симмет-

ричная подматрица, элементы которой приведены далее, $a_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial r_k} =$

$$= \mu_p \left(\frac{3r_k^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + \mu_s \left(\frac{3R_k^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{3R_{ik}^2}{R_i^5} - \frac{1}{R_i^3} \right), \quad \text{если } k = j-3, \quad a_{jk} =$$

$$= \mu_p \frac{3r_{j-3}r_k}{r^5} + \mu_s \frac{3R_{j-3}R_k}{R^5} + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{3R_{ij-3}R_{ik}}{R_i^5} \quad \text{в остальных случаях, где } r_k, r_{j-3},$$

$R_k, R_{j-3}, R_{ik}, R_{ij-3}$ — элементы векторов $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{R}_i$ соответственно, $j = 4, 5, 6$; $k = 1, 2, 3$.

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений, решение уравнения (11) можно представить в виде [6]

$$\Delta \mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0) \Delta \mathbf{X}_0, \quad (12)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — матрица перехода, связывающая между собой отклонения вектора состояния в моменты времени t_0 и t (матрицант). Продифференцировав уравнение (12), получим

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0) \Delta \mathbf{X}_0. \quad (13)$$

Приравняв правые части уравнений (11) и (13), запишем

$$\mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{X}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0) \Delta \mathbf{X}_0$$

и, учитывая (12), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\Delta\mathbf{X}_0 &= \dot{\Phi}(t, t_0)\Delta\mathbf{X}_0; \\ \Delta\mathbf{X}_0 [\mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) - \dot{\Phi}(t, t_0)] &= 0. \end{aligned}$$

В случае нетривиального решения $\Delta\mathbf{X}_0 \neq 0$, следовательно, матрицант должен удовлетворять соотношениям

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{E}. \quad (14)$$

Матрицант для анализа ошибок наведения может быть получен путем численного интегрирования уравнения (14) от t_0 до t .

В случае **квадратичного приближения** отбрасываются все члены разложения функции в ряд Тейлора выше второго порядка, и уравнение (9) принимает вид

$$\Delta\dot{\mathbf{X}}(t) = \left(\mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{2} \right) F(\mathbf{X}^*, t). \quad (15)$$

Систему дифференциальных уравнений (15) в развернутом виде запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{r}_x &= \Delta v_x; \\ \Delta\dot{r}_y &= \Delta v_y; \\ \Delta\dot{r}_z &= \Delta v_z; \\ \Delta\dot{v}_x &= a_{41}\Delta r_x + a_{42}\Delta r_y + a_{43}\Delta r_z + b_{411}\Delta r_x^2 + b_{422}\Delta r_y^2 + b_{433}\Delta r_z^2 + \\ &+ b_{412}\Delta r_x\Delta r_y + b_{423}\Delta r_y\Delta r_z + b_{413}\Delta r_x\Delta r_z; \\ \Delta\dot{v}_y &= a_{51}\Delta r_x + a_{52}\Delta r_y + a_{53}\Delta r_z + b_{511}\Delta r_x^2 + b_{522}\Delta r_y^2 + \\ &+ b_{533}\Delta r_z^2 + b_{512}\Delta r_x\Delta r_y + b_{523}\Delta r_y\Delta r_z + b_{513}\Delta r_x\Delta r_z; \\ \Delta\dot{v}_z &= a_{61}\Delta r_x + a_{62}\Delta r_y + a_{63}\Delta r_z + b_{611}\Delta r_x^2 + b_{622}\Delta r_y^2 + \\ &+ b_{633}\Delta r_z^2 + b_{612}\Delta r_x\Delta r_y + b_{623}\Delta r_y\Delta r_z + b_{613}\Delta r_x\Delta r_z, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$b_{jkl} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial r_k \partial r_l} = \mu_p \left(\frac{9r_k}{r^5} - \frac{15r_k^3}{r^7} \right) + \mu_s \left(\frac{9R_k}{R^5} - \frac{15R_k^3}{R^7} \right) + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{9R_{ik}}{R_i^5} - \frac{15R_{ik}^3}{R_i^7} \right),$$

если $k = l = j - 3$;

$$\begin{aligned} b_{jkl} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial r_k \partial r_l} &= \mu_p \left(\frac{3r_{j-3}}{r^5} - \frac{15r_{j-3}r_k^2}{r^7} \right) + \mu_s \left(\frac{3R_{j-3}}{R^5} - \frac{15R_{j-3}R_k^2}{R^7} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{3R_{i,j-3}}{R_i^5} - \frac{15R_{i,j-3}R_{ik}^2}{R_i^7} \right), \end{aligned}$$

если $k = l \neq j - 3$;

$$b_{jkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_j}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{1}{2} \left[-\mu_p \frac{15r_{j-3}r_k r_l}{r^7} - \mu_s \frac{15R_{j-3}R_k R_l}{R^7} - \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{15R_{i,j-3}R_{ik}R_{il}}{R_i^7} \right],$$

если $k \neq l \neq j - 3$;

$$b_{jkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_j}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{1}{2} \left[\mu_p \left(\frac{3r_l}{r^5} - \frac{15r_k^2 r_l}{r^7} \right) + \mu_s \left(\frac{3R_l}{R^5} - \frac{15R_k^2 R_l}{R^7} \right) + \sum_{i=1}^n \mu_i \left(\frac{3R_{il}}{R_i^5} - \frac{15R_{ik}^2 R_{il}}{R_i^7} \right) \right],$$

если $k = j - 3 \neq l$, $j = 4, 5, 6$; $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$.

Наличие в правой части системы (16) квадратов и смешанных произведений элементов вектора $\Delta \mathbf{X}$ не позволяет представить квадратичное приближение системы уравнений движения КА в форме, аналогичной записи линейного приближения данной системы. Поэтому для определения отклонения вектора состояния КА в квадратичном приближении необходимо численно решить систему дифференциальных уравнений (16).

Ковариационную матрицу ошибок наведения в картинной плоскости планеты-цели можно представить в виде [7]

$$\mathbf{C}_{RT} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & \rho_{RT} \sigma_R \sigma_T \\ \rho_{RT} \sigma_R \sigma_T & \sigma_T^2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где σ_R^2 — дисперсия ошибки по оси R картинной плоскости; σ_T^2 — дисперсия ошибки по оси T картинной плоскости; ρ_{RT} — коэффициент корреляции между σ_R и σ_T . Матрицу перехода между неподвижной орбитальной системой координат и картинной плоскостью планеты-цели можно вычислить, используя данные работ [6, 7]. Поскольку распределение ошибок наведения в картинной плоскости можно считать двумерным нормальным, по полученной ковариационной матрице можно определить контуры постоянной плотности вероятности, являющиеся эллипсами для данного распределения. Полуоси эллипса дисперсии, а также угол поворота эллипса можно вычислить по формулам [7]:

$$\begin{aligned} a &= N \left(\frac{\sigma_R^2 + \sigma_T^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_R^2 - \sigma_T^2}{2} \right)^2 + (\rho_{RT} \sigma_R \sigma_T)^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \\ b &= N \left(\frac{\sigma_R^2 + \sigma_T^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_R^2 - \sigma_T^2}{2} \right)^2 + (\rho_{RT} \sigma_R \sigma_T)^2} \right)^{\frac{1}{2}}; \\ \theta &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\rho_{RT} \sigma_R \sigma_T}{\sigma_T^2 - \sigma_R^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где a — большая полуось эллипса дисперсии; b — малая полуось; θ — угол наклона оси эллипса, отсчитываемый от оси T по ходу часовой стрелки; N — коэффициент, связанный с вероятностью p попадания ошибки положения КА в определенный эллипс

$$p(N\sigma) = 1 - e^{-\frac{N^2}{2}}.$$

Ковариационная матрица ошибок выведения КА ракетой-носителем (РН) имеет вид

$$C_X = \begin{bmatrix} \sigma_{r_x}^2 & \rho_{r_x r_y} \sigma_{r_x} \sigma_{r_y} & \rho_{r_x r_z} \sigma_{r_x} \sigma_{r_z} & \rho_{r_x v_x} \sigma_{r_x} \sigma_{v_x} & \rho_{r_x v_y} \sigma_{r_x} \sigma_{v_y} & \rho_{r_x v_z} \sigma_{r_x} \sigma_{v_z} \\ \rho_{r_x r_y} \sigma_{r_x} \sigma_{r_y} & \sigma_{r_y}^2 & \rho_{r_y r_z} \sigma_{r_y} \sigma_{r_z} & \rho_{r_y v_x} \sigma_{r_y} \sigma_{v_x} & \rho_{r_y v_y} \sigma_{r_y} \sigma_{v_y} & \rho_{r_y v_z} \sigma_{r_y} \sigma_{v_z} \\ \rho_{r_x r_z} \sigma_{r_x} \sigma_{r_z} & \rho_{r_y r_z} \sigma_{r_y} \sigma_{r_z} & \sigma_{r_z}^2 & \rho_{r_z v_x} \sigma_{r_z} \sigma_{v_x} & \rho_{r_z v_y} \sigma_{r_z} \sigma_{v_y} & \rho_{r_z v_z} \sigma_{r_z} \sigma_{v_z} \\ \rho_{r_x v_x} \sigma_{r_x} \sigma_{v_x} & \rho_{r_y v_x} \sigma_{r_y} \sigma_{v_x} & \rho_{r_z v_x} \sigma_{r_z} \sigma_{v_x} & \sigma_{v_x}^2 & \rho_{v_x v_y} \sigma_{v_x} \sigma_{v_y} & \rho_{v_x v_z} \sigma_{v_x} \sigma_{v_z} \\ \rho_{r_x v_y} \sigma_{r_x} \sigma_{v_y} & \rho_{r_y v_y} \sigma_{r_y} \sigma_{v_y} & \rho_{r_z v_y} \sigma_{r_z} \sigma_{v_y} & \rho_{v_x v_y} \sigma_{v_x} \sigma_{v_y} & \sigma_{v_y}^2 & \rho_{v_y v_z} \sigma_{v_y} \sigma_{v_z} \\ \rho_{r_x v_z} \sigma_{r_x} \sigma_{v_z} & \rho_{r_y v_z} \sigma_{r_y} \sigma_{v_z} & \rho_{r_z v_z} \sigma_{r_z} \sigma_{v_z} & \rho_{v_x v_z} \sigma_{v_x} \sigma_{v_z} & \rho_{v_y v_z} \sigma_{v_y} \sigma_{v_z} & \sigma_{v_z}^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где σ_i^2 — дисперсии ошибок элементов вектора состояния; ρ_{ij} — соответствующие корреляционные коэффициенты. При наличии необходимых данных о траектории выведения и структуре системы управления ковариационная матрица ошибок выведения может быть вычислена для любых РН и разгонных блоков (РБ) по методике [8].

Методика расчета. Запишем алгоритмы выполнения анализа наведения межпланетного КА методом Монте-Карло в случаях линейного и квадратичного приближений дифференциального уравнения движения.

Алгоритм в случае **линейного приближения**.

1. Табулируются величины вектора состояния $\mathbf{X}(t)$ для номинальной траектории. Для этого система уравнений (5) интегрируется методом Рунге — Кутты с постоянным шагом Δt от t_0 до t .

2. Посредством численного интегрирования матричного дифференциального уравнения (14) от t_0 до t вычисляется матрицант $\Phi(t, t_0)$. Отметим, что элементы матрицы коэффициентов $\mathbf{A}(t)$ содержат величины \mathbf{R}_p и \mathbf{R}_{p_i} (гелиоцентрические радиусы-векторы планеты-цели и других тел Солнечной системы, воздействующих на движение КА), которые необходимо вычислять на каждом шаге интегрирования. Модель расчета эфемерид и все необходимые исходные данные приведены в [5].

3. С помощью номинального значения \mathbf{X}_0^* вектора состояния в момент времени t_0 и ковариационной матрицы ошибок выведения (19) генерируются случайные значения вектора \mathbf{X}_0 и вычисляется ошибка $\Delta \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0^*$.

4. По формуле (12) находят ошибку вектора состояния $\Delta \mathbf{X}$ в момент времени t .

5. По полученному множеству значений $\Delta \mathbf{X}$ определяется математическое ожидание ошибки вектора состояния и ковариационная матрица ошибок наведения (17). По формулам (18) находят параметры контуров постоянной плотности распределения в картинной плоскости.

Алгоритм в случае **квадратичного приближения**.

1. См. п. 1 алгоритма линейного приближения.
2. См. п. 3 алгоритма линейного приближения.
3. Ошибка вектора состояния $\Delta \mathbf{X}$ в момент времени t определяется интегрированием системы уравнений (16) от t_0 до t с начальным условием $\Delta \mathbf{X}(t_0) = \Delta \mathbf{X}_0 = [\Delta r_{x0}, \Delta r_{y0}, \Delta r_{z0}, \Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, \Delta v_{z0}]^T$.
4. См. п. 4 алгоритма линейного приближения.

Результаты. Выполним анализ ошибок наведения для траектории полета к Венере в линейном и квадратичном приближении. Рассмотрим пуск посредством двух разных РН, обеспечивающих различные погрешности выведения. Ковариационные матрицы ошибок выведения взяты из источника [9] для двух пар РН / РБ: «Атлас» / «Центавр» (Atlas / Centaur) и «Тор» / «Дельта» (Thor / Delta). Выбор таких РН обусловлен доступностью необходимых для расчета данных и наглядностью получаемых результатов (величины ошибки при выведении системой «Тор» / «Дельта», как правило, выше, чем при пуске системой «Атлас» / «Центавр»). При анализе учитываются только гравитационные воздействия Венеры, Земли и Солнца.

Метод Монте-Карло применяется согласно рекомендациям [10]. Для каждого варианта расчета генерируется 1000 случайных значений вектора \mathbf{X}_0 .

Результаты анализа приведены в таблице, содержащей сравнение параметров 1σ эллипса дисперсии ошибки положения КА, вычисленных в линейном приближении, в квадратичном приближении и с помощью нелинеаризованных уравнений движения КА. В таблицах также приведены средние затраты машинного времени на одну симуляцию для ЭВМ с процессором Core i7-3770K и 16 Гб оперативной памяти (вычисления проведены с использованием одного ядра процессора).

Параметры 1σ эллипса дисперсии ошибки положения КА для системы «Атлас»/«Центавр»

| Математические соотношения | Полуось, км | | Угол поворота, град | Средние затраты времени на одну симуляцию, с |
|-----------------------------|-------------|-------|---------------------|--|
| | большая | малая | | |
| Линейное приближение | 185,9 | 2,6 | 19,1 | < 0,0006 |
| Квадратичное приближение | 190,5 | 2,6 | 19,1 | 312 |
| Нелинеаризованное уравнение | 186,1 | 2,6 | 19,1 | 163 |
| Линейное приближение | 3063 | 42 | 19,1 | < 0,0006 |
| Квадратичное приближение | 3152 | 44 | 19,1 | 312 |
| Нелинеаризованное уравнение | 3031 | 42 | 19,1 | 163 |

Из таблицы следует, что учет квадратичного члена разложения в ряд Тейлора при анализе ошибок наведения межпланетного КА не только дает несколько завышенные результаты, но и требует значительно больших затрат машинного времени (поскольку решение невозможно представить в виде, аналогичном линейному приближению, возникает необходимость интегрирования уравнения при каждой симуляции). Средние затраты времени на анализ в случае квадратичного приближения превышают затраты при использовании нелинеаризованного уравнения движения, так как правые части уравнений системы (16) (квадратичный случай) содержат значительно большее число членов, чем правые части уравнений нелинеаризованной системы (4), и требуют больших затрат времени при их численном интегрировании.

На рис. 1, *а* приведены эллипсы дисперсии (1σ , 2σ , 3σ , 4σ в порядке увеличения) ошибки положения КА для системы «Атлас» / «Центавр» в случае линейного приближения, а точки показывают частные случаи значения ошибки положения КА в картинной плоскости, полученные в результате моделирования методом Монте-Карло. На рис. 1, *б* — увеличенное изображение эллипсов дисперсии, а символом «+» отмечено значение математического ожидания ошибки положения КА. Аналогичные результаты для системы «Тор» / «Дельта» приведены на рис. 2.

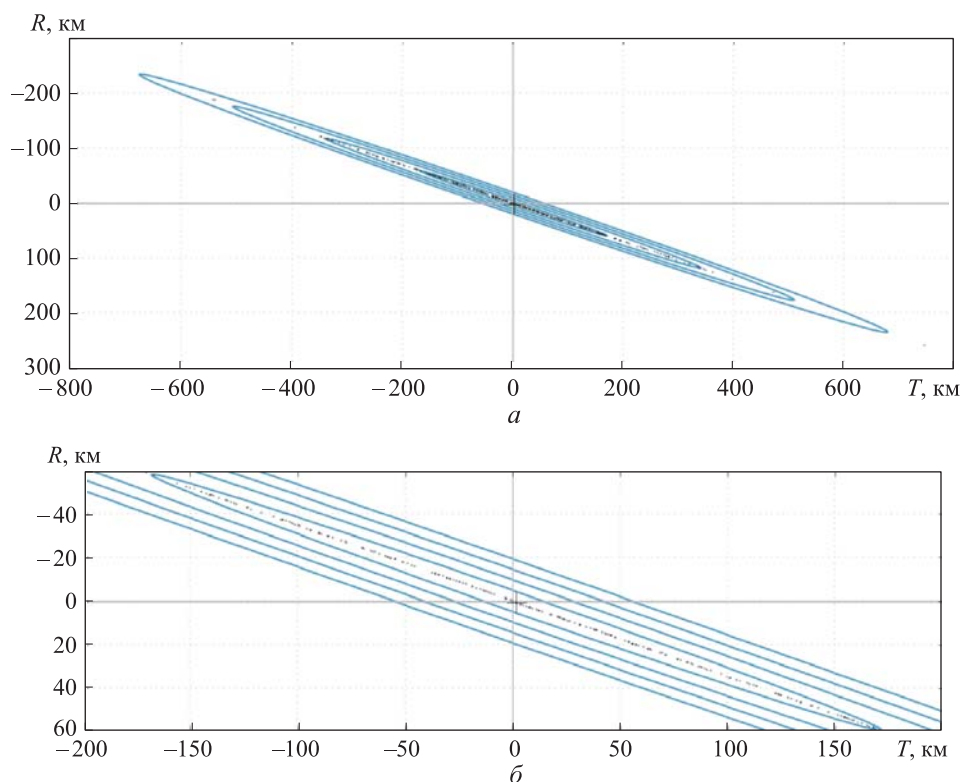


Рис. 1. Эллипсы дисперсии ошибки положения КА для системы «Атлас» / «Центавр» (*а*), то же увеличено (*б*)

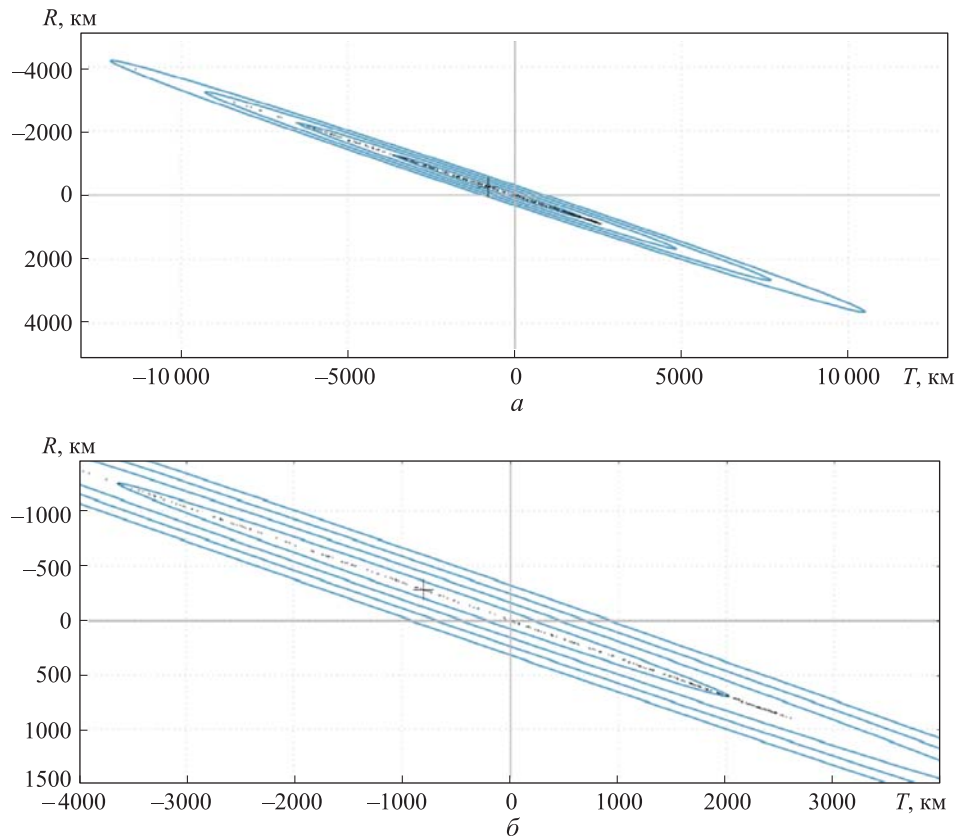


Рис. 2. Эллипсы дисперсии ошибки положения КА для системы «Гор» / «Дельта» (а), то же увеличено (б)

Выводы. Полученные результаты наглядно демонстрируют, что учет квадратичных членов разложения правой части дифференциального уравнения движения КА в ряд Тейлора не является целесообразным. Точности линейного приближения достаточно на этапе предварительного анализа ошибок наведения, а затраты машинного времени на выполнение алгоритма в линейном случае являются незначительными. Для более точного анализа в методе Монте-Карло можно использовать нелинеаризованное дифференциальное уравнение движения КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Danby J.M.A. Matrix methods in the calculation and analysis of orbits // AIAA Journal. 1964. Vol. 2. No. 1. P. 13–16. DOI: 10.2514/3.2206 URL: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.2206>
2. Danby J.M.A. The matrizant of Keplerian motion // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. No. 4. P. 769–770. DOI: 10.2514/3.2976 URL: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.2976>
3. Soong T.T. Preflight analysis of target errors of a space trajectory // Journal of Spacecraft and Rockets. 1966. Vol. 3. No. 1. P. 139–141. DOI: 10.2514/3.28402 URL: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.28402>

4. *Chioma V.C., Titu N.A.* Expected maneuver and maneuver covariance model // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2008. Vol. 45. No. 2. P. 409–412.
DOI: 10.2514/1.31154 URL: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/1.31154>
5. *HORIZONS System* // Jet Propulsion Laboratory: веб-сайт.
URL: <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons> (дата обращения: 15.05.2017).
6. *Wax J.D.* An analysis of approach navigation accuracy and guidance requirements for the grand tour mission to the outer planets. NASA, 1971. 158 p.
URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19720005187.pdf> (дата обращения: 15.05.2017).
7. *Jah M.* Derivation of the B-plane (body plane) and its associated parameters // Chauncey Uphoff: веб-сайт.
URL: <http://cbboff.org/UCBoulderCourse/documents/b-plane.PDF> (дата обращения: 15.05.2017).
8. *Cole G.L., Teren F.* Analytical calculation of partial derivatives relating lunar and planetary midcourse correction requirements to guidance system injection errors. NASA, 1968. 37 p.
URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19680010899.pdf> (дата обращения: 15.05.2017).
9. *Systems design study of the Pioneer Venus spacecraft. Final study report. Vol. 1. Technical analyses and tradeoffs sections 1-4 (Part 1 of 4).* NASA, 1973. 460 p.
URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19740024191.pdf> (дата обращения: 15.05.2017).
10. *Beard B.B., Hanson J.M.* Applying Monte Carlo simulation to launch vehicle design and requirements analysis. NASA, 2010. 134 p.
URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20100038453.pdf> (дата обращения: 15.05.2017).

Сухова Светлана Владимировна — аспирантка кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Сухова С.В. Оценка целесообразности учета квадратичных членов в анализе ошибок наведения межпланетного космического аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 2. С. 89–101. DOI: 10.18698/0236-3941-2018-2-89-101

**ESTIMATING FEASIBILITY OF TAKING QUADRATIC TERMS
INTO ACCOUNT DURING GUIDANCE ERROR ANALYSIS
FOR THE CASE OF INTERPLANETARY SPACECRAFT**

S.V. Sukhova

s.sukhova90@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We compared two guidance error analysis algorithms for interplanetary spacecraft. The first one uses a linearised differential equation of spacecraft motion, the second one

Keywords

Guidance error analysis, Monte Carlo method, interplanetary transfer

adds linear and quadratic terms found in the Taylor series expansion of the right-hand side of the equation. We used the Monte Carlo method to analyse guidance errors. In order to evaluate the algorithms, we solved a test problem of guidance error analysis for the case of a spacecraft on a flight to Venus. We compared the results obtained for each algorithm to the results of the analysis that used a non-linearised equation of motion. The comparison led to the conclusion stating whether it is feasible to use the algorithms presented to analyse guidance errors at certain stages of interplanetary spacecraft development

Received 31.05.2017
© BMSTU, 2018

REFERENCES

- [1] Danby J.M.A. Matrix methods in the calculation and analysis of orbits. *AIAA Journal*, 1964, vol. 2, no. 1, pp. 13–16. DOI: 10.2514/3.2206
Available at: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.2206>
- [2] Danby J.M.A. The matrizant of Keplerian motion. *AIAA Journal*, 1965, vol. 3, no. 4, pp. 769–770. DOI: 10.2514/3.2976
Available at: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.2976>
- [3] Soong T.T. Preflight analysis of target errors of a space trajectory. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1966, vol. 3, no. 1, pp. 139–141. DOI: 10.2514/3.28402
Available at: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.28402>
- [4] Chioma V.C., Titu N.A. Expected maneuver and maneuver covariance model. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2008, vol. 45, no. 2, pp. 409–412.
DOI: 10.2514/1.31154 Available at: <https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/1.31154>
- [5] HORIZONS System. Jet Propulsion Laboratory: website.
Available at: <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons> (accessed: 15.05.2017).
- [6] Wax J.D. An analysis of approach navigation accuracy and guidance requirements for the grand tour mission to the outer planets. NASA, 1971. 158 p.
Available at: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19720005187.pdf>
(accessed: 15.05.2017).
- [7] Jah M. Derivation of the B-plane (body plane) and its associated parameters. Chauncey Uphoff: website. Available at: <http://cbboff.org/UCBoulderCourse/documents/b-plane.PDF>
(accessed: 15.05.2017).
- [8] Cole G.L., Teren F. Analytical calculation of partial derivatives relating lunar and planetary mid-course correction requirements to guidance system injection errors. NASA, 1968. 37 p.
Available at: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19680010899.pdf>
(accessed: 15.05.2017).
- [9] Systems design study of the Pioneer Venus spacecraft. Final study report. Vol. 1. Technical analyses and tradeoffs sections 1-4 (Part 1 of 4). NASA, 1973. 460 p.
Available at: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19740024191.pdf>
(accessed: 15.05.2017).
- [10] Beard B.B., Hanson J.M. Applying Monte Carlo simulation to launch vehicle design and requirements analysis. NASA, 2010. 134 p.
Available at: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20100038453.pdf>
(accessed: 15.05.2017).

Sukhova S.V. — post-graduate student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Sukhova S.V. Estimating Feasibility of Taking Quadratic Terms into Account During Guidance Error Analysis for the Case of Interplanetary Spacecraft. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2018, no. 2, pp. 89–101 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-2-89-101



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие авторов
Е.А. Власовой, В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина

**«Математические модели процессов
теплопроводности»**

Изложены сведения, составляющие содержание раздела «Математические модели тепловых систем» курса «Математические модели технических систем». Приведены примеры решения задач, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы студентов. Часть задач может служить основой для проведения студентами самостоятельной научно-исследовательской работы.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru