

СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНОМ ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

А.В. Аттетков

fn2@bmstu.ru

И.К. Волков

fn12@bmstu.ru

Е.В. Пилявская

e.pilyavskaya@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Методами качественной теории дифференциальных уравнений исследована структура фронта стационарной ударной волны в двухфазном пористом материале. Теоретически обоснована возможность существования минимальной скорости распространения ударной волны и критической скорости, приводящей к полному пластическому затеканию пор во фронте волны. Приведены теоретические оценки ширины фронта ударной волны слабой интенсивности

Ключевые слова

Структура фронта ударной волны, двухфазный пористый материал, качественная теория дифференциальных уравнений

Поступила в редакцию 24.11.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Введение. Изучение закономерностей поведения пористых материалов при динамических воздействиях — одно из наиболее интенсивно развиваемых направлений физики высоких давлений. Его возникновение связано с решением широкого круга задач как фундаментального, так и прикладного характера [1–10].

Вопросам разработки математических моделей и методов математического моделирования ударно-волновых процессов в изучаемых системах посвящено значительное число работ. Важное место в теоретических исследованиях занимает проблема ударно-волновой чувствительности пористых энергетических материалов [6, 7, 10]. Несмотря на достигнутые результаты, ряд вопросов является еще открытым и требует дальнейшего изучения. В частности, актуальным остается вопрос о влиянии тонкого слоя пластификатора на поверхности пластически затекаемых пор на специфические особенности процесса распространения ударной волны (УВ) в двухфазном пористом материале.

Цель проведенных исследований — теоретическое обоснование возможности существования УВ в изучаемой двухфазной системе, анализ структуры фронта волны и оценка его ширины в УВ слабой интенсивности.

Постановка задачи и математическая модель. Рассмотрим задачу о стационарной УВ [11–14], распространяющейся со скоростью D в двухфазном пористом материале — несжимаемой вязкопластической среде (фаза 1), содержащей сферические поры радиусом a (регулярная ячеистая схема [2]; наличием газа в порах пренебрегаем) с покрытием их поверхности (фаза 2; несжимаемая вязкая среда). В предположении, что характерная ширина фронта УВ много больше характерного (представительного) элемента двухфазного пористого материала,

в системе координат, связанной с волной, интегралы законов сохранения массы и импульса на фронте УВ можно представить в виде [14]

$$p - p_0 = \rho_1 D^2 (\alpha_0 - \alpha) \alpha_0^{-2}. \quad (1)$$

Это выражение справедливо для всех промежуточных состояний во фронте УВ (объемным содержанием фазы 2 пренебрегаем). В уравнении (1)

$$p_0 = \frac{2Y}{3} \ln \frac{\alpha_0}{\delta + \alpha_0 - 1} \quad (2)$$

— амплитуда упругого предвестника (где Y — предел текучести материала фазы 1); зависимости между фазовыми и среднеинтегральными значениями величин двухфазного пористого материала определяются следующими равенствами [14]:

$$\begin{aligned} p &= \alpha^{-1} [\delta p_2 + (1 - \delta) p_1]; \\ \rho &= \alpha^{-1} [\delta \rho_2 + (1 - \delta) \rho_1] \approx \alpha^{-1} \rho_1; \\ \alpha &= \frac{b^3}{b^3 - a^3}; \quad \delta = \frac{c^3 - a^3}{b^3 - a^3}, \end{aligned}$$

где p — давление; α, δ — концентрационные симплексы подобия; ρ — плотность; b — радиус сферического объема характерного элемента двухфазного пористого материала; a — радиус поры; c — радиус контактной границы фаз; индекс 0 относится к состоянию пористого материала перед фронтом УВ.

Результирующее уравнение связи, определяющее скачок начального состояния изучаемого материала во фронте УВ, имеет вид [14]

$$p = p_d(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \delta, \gamma) + p_v(\dot{\alpha}, \alpha, \delta) + p_s(\alpha, \delta), \quad (3)$$

где динамические слагаемые $p_d(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \delta, \gamma)$ и $p_v(\dot{\alpha}, \alpha, \delta)$ отражают инерционные и вязкие эффекты при пластическом затекании пор, слагаемое $p_s(\alpha, \delta)$ характеризует статическое сопротивление материала фазы 1.

Уравнение (1) с учетом равенства (2) и уравнения связи (3), в котором нужно перейти к переменному $\xi = (x - Dt)/a_0$, определяет структуру фронта стационарной УВ в двухфазном пористом материале. Математическая модель, используемая при анализе волнового профиля в изучаемой системе, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\xi^2} &= A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ \frac{B(\alpha, \delta, \gamma)}{6} \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 + \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3(\alpha - 1)} \times \right. \\ &\times a \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta_5 \alpha \delta}{\delta + \alpha - 1} \frac{d\alpha}{d\xi} - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \left. \right\}, \quad \xi > 0; \quad (4) \\ \exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{d\alpha}{d\xi} &= 0; \quad \exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0, \end{aligned}$$

где

$$F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) = \alpha(\alpha_0 - 1)^{2/3} \left\{ [1 + (\gamma - 1)\delta] \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0^2} + \frac{2k^2}{3} \ln \frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)} \right\}; \quad (5)$$

$$\alpha \in [1, \alpha_0]; \quad \zeta \in \mathbb{R}^+; \quad \gamma \in \mathbb{R}^+, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Структура функционалов $A(\alpha, \delta, \gamma)$ и $B(\alpha, \delta, \gamma)$ известна [14]:

$$A(\alpha, \delta, \gamma) = A_1(\alpha, \delta) + \gamma A_2(\alpha, \delta);$$

$$A_1(\alpha, \delta) = \frac{1 - \delta}{3(\delta + \alpha - 1)^{1/3}} + \frac{(\delta + \alpha - 1)^{2/3} - \alpha^{2/3}}{2};$$

$$A_2(\alpha, \delta) = \frac{1}{3(\alpha - 1)^{1/3}} + \frac{(\alpha - 1)^{2/3} - (\delta + \alpha - 1)^{2/3}}{2} - \frac{1 - \delta}{3(\delta + \alpha - 1)^{1/3}}; \quad (6)$$

$$B(\alpha, \delta, \gamma) = B_1(\alpha, \delta) + \gamma B_2(\alpha, \delta);$$

$$B_1(\alpha, \delta) = \frac{1}{\alpha^{1/3}} - \frac{1}{(\delta + \alpha - 1)^{1/3}} + \frac{1 - \delta}{3(\delta + \alpha - 1)^{4/3}};$$

$$B_2(\alpha, \delta) = \frac{1}{(\delta + \alpha - 1)^{1/3}} - \frac{1}{(\alpha - 1)^{1/3}} + \frac{1}{3(\alpha - 1)^{4/3}} - \frac{1 - \delta}{3(\delta + \alpha - 1)^{4/3}}.$$

В математической модели (4)–(6)

$$k = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{Y}{\rho_1}}; \quad R = \frac{\eta}{a_0 \sqrt{Y \rho_1}}; \quad \zeta = \frac{\mu}{\eta}; \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1};$$

η, μ — коэффициенты вязкости фаз 1, 2.

Для достижения основной цели исследования ограничим дальнейший анализ определением точек покоя системы (4)–(6). Вопросы установления топологической структуры разбиения фазовой плоскости изучаемой системы на траектории по их типам с применением методов качественной теории дифференциальных уравнений [15–17] в работе не рассматриваются.

Системы алгебраических уравнений для определения точек покоя (4)–(6). Для удобства дальнейших рассуждений введем новое переменное

$$g \triangleq d\alpha/d\xi. \quad (7)$$

В этом случае $d^2\alpha/d\xi^2 = dg/d\xi$, и, согласно (4) и (7), приходим к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = g;$$

$$\frac{dg}{d\xi} = A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ \frac{B(\alpha, \delta, \gamma)}{6} g^2 + \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3(\alpha - 1)} \times \right. \quad (8)$$

$$\left. \times \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha - 1} g - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \right\}.$$

В фазовой плоскости $\alpha O g$ точки покоя изучаемой системы определяются как корни алгебраических систем

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ A(\alpha, \delta, \gamma) &= \infty, \end{aligned} \tag{10}$$

принадлежащие множеству

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \alpha \leq \alpha_0 \right\},$$

что непосредственно следует из (5) и (8). А поскольку $g = 0$ и в системе (9), и в системе (10), то, в случае своего существования, любая точка покоя изучаемой системы принадлежит отрезку $[1, \alpha_0]$ оси $O\alpha$, т. е. имеет координаты $(\alpha, 0)$, где $\alpha \in [1, \alpha_0]$.

Точки покоя, определяемые системой (9). 1. Согласно (9) и (5), при любых значениях входящих параметров всегда существует точка покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$, являющаяся очевидной.

2. Выясним, является ли точкой покоя изучаемой системы точка $O_1 = (1, 0)$; ее наличие связано с физическим процессом полного пластического затекания пор во фронте УВ. Отметим, что, согласно (5), имеет место очевидное неравенство

$$1 + (\gamma - 1)\delta > 0, \tag{11}$$

а второе уравнение системы (9) может быть представлено в эквивалентном виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2k^2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)}. \tag{12}$$

Полагая в (12) $\alpha = 1$, приходим к новому равенству

$$\alpha_0 - 1 = - \frac{2k^2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{\alpha_0\delta}{\delta + \alpha_0 - 1}, \tag{13}$$

которое может быть реализовано лишь при выполнении неравенства

$$\delta < 1, \tag{14}$$

поскольку справедливо неравенство (11), согласно (5), имеет место неравенство $\alpha_0 - 1 > 0$ и

$$\left(\frac{\alpha_0\delta}{\delta + \alpha_0 - 1} < 1 \right) \Leftrightarrow (\alpha_0\delta < \delta + \alpha_0 - 1) \Leftrightarrow (\delta < 1).$$

Таким образом, точка $O_1 = (1, 0)$ — точка покоя изучаемой системы, если выполнено неравенство (14) и

$$k^2 = k_1^2 \triangleq \frac{3(\alpha_0 - 1)[1 + (\gamma - 1)\delta]}{2\alpha_0^2 \ln[(\delta + \alpha_0 - 1)/(\alpha_0\delta)]}, \tag{15}$$

где равенство (15) непосредственно следует из равенства (13).

3. При выполнении неравенства (14) выражение, стоящее в правой части равенства (12) под знаком натурального логарифма, для любого $\alpha \in (1, \alpha_0)$ может принимать лишь значения, меньше единицы, поскольку

$$\left(\frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)} < 1 \right) \Leftrightarrow (\delta < 1|_{\alpha_0 > \alpha}). \tag{16}$$

4. Пусть далее

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &\triangleq \alpha_0 - \alpha; & \varphi_2(\alpha, k^2) &\triangleq k^2 \Phi(\gamma, \delta) \ln \frac{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)}{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}; \\ \Phi(\gamma, \delta) &\triangleq \frac{2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]}. \end{aligned} \tag{17}$$

В этом случае с учетом (11), (14), (16) и (17) при $\alpha \in (1, \alpha_0)$ справедливы следующие неравенства:

$$\Phi(\gamma, \delta) > 0; \quad \varphi_1(\alpha) > 0; \quad \varphi_2(\alpha, k^2)|_{k^2 > 0} > 0.$$

Поскольку

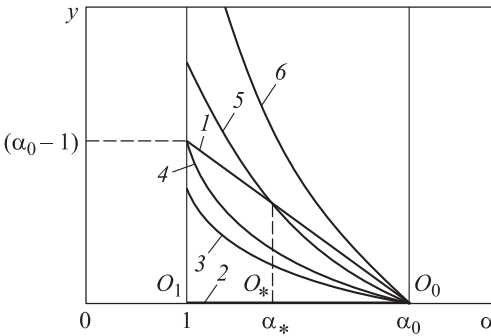
$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha} \right|_{k^2 > 0} &= -k^2 \Phi(\gamma, \delta) \frac{1 - \delta}{\alpha(\delta + \alpha - 1)} \Big|_{k^2 > 0} < 0; \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha^2} \right|_{k^2 > 0} &= k^2 \Phi(\gamma, \delta) (1 - \delta) \frac{\delta + 2\alpha - 1}{\alpha^2(\delta + \alpha - 1)^2} \Big|_{k^2 > 0} > 0; \\ \varphi_2(\alpha_0, k^2) &\equiv 0, \quad \forall k^2 \geq 0; \\ \varphi_2(\alpha, k^2) \Big|_{\substack{\alpha \in (1, \alpha_0), \\ k^2 \rightarrow +0}} &\rightarrow +0; \\ \varphi_2(1, k^2) &= k^2 \Phi(\gamma, \delta) \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\alpha_0 \delta}; \\ \left. \frac{\partial \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha = \alpha_0, \\ k^2 \rightarrow +0}} &= -k_{\max}^2 \Phi(\gamma, \delta) \frac{1 - \delta}{\alpha_0(\delta + \alpha_0 - 1)} = -1; \\ k_{\max}^2 &= \frac{\alpha_0(\delta + \alpha_0 - 1)}{\Phi(\gamma, \delta)(1 - \delta)}, \end{aligned} \tag{18}$$

то при $k_1^2 < k^2 < k_{\max}^2$ уравнение (12) определяет единственную точку покоя $O_* = (\alpha_*, 0)$ (рисунок), где $\alpha_* \in (1, \alpha_0)$, а значения k_1^2 и k_{\max}^2 определены равен-

ствами (15) и (18). Кроме того, при $k^2 < k_1^2$ система (9) определяет единственную точку покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_1^2$ появляется вторая точка покоя $O_1 = (1, 0)$, которая с ростом значения параметра k^2 начинает «перемещаться» по отрезку, соединяющему точки $(1, \alpha_0 - 1)$ и $(\alpha_0, 0)$, от точки $(1, \alpha_0 - 1)$ к точке $(\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_{\max}^2$ точка покоя $O_1 = (1, 0)$ «падает» в точку покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$; при дальнейшем росте параметра k^2 точка $O_1 = (1, 0)$ «исчезает» из зоны анализа. Значение параметра k_{\max}^2 , определенное равенством (18), где функционал $\Phi(\gamma, \delta)$ задан последним равенством (17), устанавливает условие существования минимальной скорости распространения УВ в двухфазном пористом материале:

$$D_{\min} = \left\{ \frac{2Y\alpha_0(1-\delta)}{3\rho_1(\delta + \alpha_0 - 1)[1 + (\gamma - 1)\delta]} \right\}^{1/2}. \tag{19}$$

Ее появление физически обусловлено механическими свойствами фазы 1 изучаемого материала. При $\delta = 0$ равенство (19) известно [11, 12].



Зависимость положения третьей точки покоя O_* изучаемой системы от значения бифуркационного параметра k :
 кривая 1 — $y = \varphi_1(\alpha)$; кривые 2–6 — $y = \varphi_2(\alpha, k^2)$: 2 — $k^2 = 0$, 3 — $k^2 < k_1^2$, 4 — $k^2 = k_1^2$, 5 — $k^2 \in (k_1^2, k_{\max}^2)$, 6 — $k^2 > k_{\max}^2$

Точки покоя, определяемые системой (10). Согласно (5), система (10) определяет единственную точку покоя $O_1 = (1, 0)$, которая всегда существует независимо к значениям определяющих безразмерных параметров системы. Таким образом, параметр k^2 является бифуркационным параметром. При $k^2 \in (0, k_1^2) \cup (k_{\max}^2, +\infty)$ система (10) имеет две точки покоя $O_1 = (1, 0)$ и $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При значении параметра $k^2 = k_1^2$, где k_1^2 определено равенством (15), точка покоя $O_1(1, 0)$ становится двойной; с ростом значения параметра k^2 из этой точки «выходит» третья точка покоя $O_* = (\alpha_*, 0)$ и «начинает свое движение» по оси 0α в направлении точки покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_{\max}^2$, где k_{\max}^2 определено равенством (18), точка $O_0 = (\alpha_0, 0)$ становится уже двойной точкой покоя. При дальнейшем росте параметра k^2 вторая точка покоя «исчезает» из зоны анализа.

Критическая скорость распространения УВ (инерционный режим пластического затекания пор). Исходное дифференциальное уравнение (4) при $R = 0$ интегрируется и с учетом (7) принимает следующий вид:

$$g^2 = \frac{2(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ [1 + (\gamma - 1)\delta] \frac{(\alpha_0 - \alpha)^2 (2\alpha + \alpha_0)}{2\alpha_0^2} - k^2 \left[(1 - \delta)(\alpha_0 - \alpha) + (1 - \delta)^2 \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta + \alpha - 1} + \alpha^2 \ln \frac{\alpha_0 (\delta + \alpha - 1)}{\alpha (\delta + \alpha_0 - 1)} \right] \right\}, \quad (20)$$

где функционал $A(\alpha, \delta, \gamma)$ определен в (6).

Рассмотрим поведение полученного решения в окрестности точки покоя $O_1 = (1, 0)$. Формально принимая $\alpha = 1$ в сомножителе в фигурных скобках правой части выражения (20) и учитывая асимптотическую оценку

$$A(\alpha, \delta, \gamma) \underset{\alpha \rightarrow 1+0}{\sim} (3\varepsilon^{1/3})^{-1},$$

где $\varepsilon = \alpha - 1$, получаем

$$g^2 = \frac{\varepsilon^{1/3} (\alpha_0 - 1)^{8/3} (2 + \alpha_0)}{2\alpha_0^2} [1 + (\gamma - 1)\delta] \left\{ 1 - \left(\frac{k}{k_{cr}} \right)^2 + \frac{4\varepsilon\alpha_0^2 k^2}{(\alpha_0 - 1)^2 (2 + \alpha_0) [1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{1}{\delta + \varepsilon} \right\};$$

$$k_{cr}^2 = (\alpha_0 - 1)^2 (2 + \alpha_0) [1 + (\gamma - 1)\delta] \times \left\{ 2\alpha_0^2 \left[(1 - \delta)(\alpha_0 - 1) - \delta(2 - \delta) \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta} + \ln \alpha_0 \right] \right\}^{-1}.$$

Значение параметра k_{cr}^2 устанавливает условие существования критической скорости распространения УВ $D_{cr} > D_{min}$, приводящей к полному пластическому затеканию пор во фронте волны:

$$D_{cr} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \left\{ \frac{2Y \left[(\alpha_0 - 1)(1 - \delta) - \delta(2 - \delta) \ln \left[\delta^{-1} (\delta + \alpha_0 - 1) \right] + \ln \alpha_0 \right]}{\rho_1 (\alpha_0 + 2) [1 + (\gamma - 1)\delta]} \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

При этом справедливы следующие асимптотические оценки:

$$(k < k_{cr}) \Rightarrow g \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{1/6};$$

$$(k = k_{cr}) \Rightarrow g \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon^{2/3} \left[-\ln(\delta + \varepsilon) \right]^{1/2};$$

равенство (21) при $\delta = 0$ известно [11].

Ударная волна слабой интенсивности. Теоретические оценки ширины фронта волны. По сложившейся терминологии (см., например, [11, 13]) УВ называют слабой или слабой интенсивности, если параметр $\omega = \alpha_0 - \alpha_*$, где

$\alpha_* \in (1, \alpha_0)$ является малым параметром, т. е. $\omega \ll 1$. С использованием данного предположения найдем решение исходной задачи (4)–(6) для двух предельных режимов затекания пор во фронте УВ — инерционном ($R = 0$) и сильновязком ($R \gg 1$).

Инерционный режим пластического затекания пор. При $R = 0$ дифференциальное уравнение (4) интегрируется, а исходная математическая модель (4)–(6), используемая при анализе структуры фронта УВ, принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{3}(\alpha_0 - 1)^{2/3} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ [1 + (\gamma - 1)\delta] \frac{(\alpha_0 - \alpha)^2 (2\alpha + \alpha_0)}{2\alpha_0^2} - k^2 \left[(1 - \delta)(\alpha_0 - \alpha) + (1 - \delta)^2 \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta + \alpha - 1} + \alpha^2 \ln \frac{\alpha_0 (\delta + \alpha - 1)}{\alpha (\delta + \alpha_0 - 1)} \right] \right\}, \quad \xi > 0; \quad (22)$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0,$$

где функционал $A(\alpha, \delta, \gamma)$ определен в (6).

Используя разложения в ряд правой части дифференциального уравнения (22) вначале по степеням $(\alpha_0 - \alpha)$, затем по $(\alpha - \alpha_*)$, получаем

$$\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{3}(\alpha_0 - 1)^{2/3} A^{-1}(\alpha_*, \delta, \gamma) \left\{ \frac{1 + (\gamma - 1)\delta}{\alpha_0^2} + \frac{k^2(1 - \delta)}{(\delta + \alpha_* - 1)^2} \right\} (\alpha_0 - \alpha)^2 (\alpha - \alpha_*), \quad \xi > 0; \quad (23)$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0.$$

Решение задачи (23) находится стандартными методами [15] и имеет вид

$$\alpha - \alpha_* = (\alpha_0 - \alpha_*) \operatorname{th}^2 \left(\frac{\xi}{\Delta} \right), \quad \xi \geq 0;$$

$$\Delta = 2\alpha_0 (\alpha_0 - 1)^{-1/3} \times \left\{ \frac{3A(\alpha_*, \delta, \gamma)(1 - \delta)(\delta + \alpha_* - 1)}{(\alpha_0 - \alpha_*) [1 + (\gamma - 1)\delta] [2(1 - \delta)(\alpha_* + \delta - 1) + (2\alpha_* + \alpha_0)]} \right\}^{1/2}.$$

Уравнение волнового профиля (24) при $\delta = 0$ согласуется с известным уравнением [12]. В данной работе определена и область пригодности используемого разложения. Видно, что в рассматриваемом (инерционном) режиме затекания пор ширина фронта УВ не зависит от механических свойств материалов фаз изучаемой системы, доминирующее влияние на структуру фронта УВ оказывает микроструктура двухфазного пористого материала.

Сильновязкий режим затекания пор. Предположение $R \gg 1$ позволяет пренебречь инерционными слагаемыми в дифференциальном уравнении (4) и представить исходную математическую модель (4)–(6) в следующем виде:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{3\alpha(\alpha-1)(\delta+\alpha-1)}{4kR[(\alpha-1)(1-\delta)+\zeta\alpha\delta]} \left\{ [1+(\gamma-1)\delta] \frac{\alpha_0-\alpha}{\alpha_0^2} + \frac{2k^2}{3} \ln \frac{\alpha_0(\delta+\alpha-1)}{\alpha(\delta+\alpha_0-1)} \right\}, \quad \xi > 0;$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0.$$
(25)

Используя аналогичную случаю $R = 0$ процедуру последовательного разложения в ряд правой части дифференциального уравнения (25) по степеням $(\alpha_0 - \alpha)$ и $(\alpha - \alpha_*)$, получаем

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{3(\alpha_*-1)[1+(\gamma-1)\delta](\delta+2\alpha_*-1)}{4kR\alpha_0^2[(\alpha_*-1)(1-\delta)+\zeta\alpha_*\delta]} (\alpha_0-\alpha)(\alpha-\alpha_*), \quad \xi > 0;$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0.$$
(26)

Решение задачи (26), определяющее уравнение волнового профиля в рассматриваемом (сильновязком) режиме затекания пор, имеет следующий вид:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \exp(\xi/\Delta) + \alpha_*}{\exp(\xi/\Delta) + 1}, \quad \xi \geq 0;$$

$$\Delta = \frac{2\sqrt{2}\alpha_0 R [(\alpha_*-1)(1-\delta) + \zeta\alpha_*\delta] [\alpha_* (\delta + \alpha_* - 1)]^{1/2}}{\sqrt{3(1-\delta)} (\alpha_0 - \alpha_*) (\alpha_* - 1) (\delta + 2\alpha_* - 1)}.$$
(27)

При $\delta = 0$ уравнение волнового профиля известно [12].

Отличительная особенность реализуемого режима затекания пор — преобладающее влияние на структуру фронта УВ механических свойств материалов фаз пористого материала: симплексов подобия R — аналога числа Рейнольдса $Re = R^{-1}$ и ζ — меры соотношения коэффициентов вязкости фаз изучаемой двухфазной системы. Отметим, что в рассматриваемом случае волна имеет монотонный профиль, минимальное значение параметра пористости α_* достигается при $\xi \rightarrow -\infty$.

Общий случай. Найдем решение задачи (4)–(6) для случая, когда реализуемый режим затекания пор сопровождается проявлением и инерционных, и вязких эффектов. Предположение, что УВ является слабой, определяет следующие асимптотические оценки:

$$\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} \underset{\omega \rightarrow +0}{\sim} \frac{\omega}{\xi^2}; \quad \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 \underset{\omega \rightarrow +0}{\sim} \frac{\omega^2}{\xi^2}.$$

Это позволяет пренебречь первым слагаемым в правой части уравнения (4) и представить реализуемую математическую модель в виде

$$\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} = A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ \frac{4kR(\alpha_0-1)^{2/3}(\alpha-1)(1-\delta) + \zeta\alpha\delta}{3(\alpha-1)(\delta+\alpha-1)} \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right) - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \right\}, \quad \xi > 0;$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{d\alpha}{d\xi} = 0; \quad \exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0.$$
(28)

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначение $s \triangleq \alpha - \alpha_0$. Используя в (28) разложения в ряд по степеням s функционалов $A(\alpha, \delta, \gamma)$ и $F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k)$, принимая во внимание равенства (18) и (17), преобразуем модель (28) к виду, более удобному для ее практической реализации:

$$\frac{d^2s}{d\xi^2} = f^{-1}(\alpha_0, \delta, \gamma) \left\{ kR\Psi(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R) \frac{ds}{d\xi} + \frac{1+(\gamma-1)\delta}{\alpha_0} \left(1 - \frac{k^2}{k_0^2} \right) s \right\}, \quad \xi > 0; \quad (29)$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{ds}{d\xi} = 0; \quad \exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} s = 0,$$

где

$$f(\alpha_0, \delta, \gamma) = A(\alpha_0, \delta, \gamma)(\alpha_0 - 1)^{-2/3};$$

$$\Psi(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R) = \frac{4kR}{3(\alpha_0 - 1)} \frac{(\alpha_0 - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha_0 - 1}.$$

Решение задачи (29) находится стандартными методами [15] и имеет вид

$$\alpha - \alpha_0 = c \exp(-\xi/\Delta), \quad \xi \geq 0;$$

$$\Delta = 2f(\alpha_0, \delta, \gamma) \left\{ -kR\Psi(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R) + \left[k^2R^2\Psi^2(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R) + 4\alpha_0^{-1}f(\alpha_0, \delta, \gamma)[1+(\gamma-1)\delta] \left(1 - k^2/k_{\max}^2 \right) \right]^{1/2} \right\}^{-1},$$

где c — положительная постоянная.

Представленную теоретическую оценку ширины фронта УВ можно упростить, учитывая, что в УВ слабой интенсивности $k \sim k_{\max}$, т. е. параметр $(1 - k^2/k_{\max}^2)$ является малым параметром:

$$\Delta = \frac{\alpha_0 k R \Psi(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R)}{(1 - k^2/k_{\max}^2)[1 + (\gamma - 1)\delta]} \left\{ 1 + \frac{f(\alpha_0, \delta, \gamma)(1 - k^2/k_{\max}^2)[1 + (\gamma - 1)\delta]}{\alpha_0 k^2 R^2 \Psi^2(\alpha_0, \delta, \zeta, k, R)} \right\}.$$

Полученные результаты позволяют констатировать физически объяснимый факт: в УВ слабой интенсивности определяющее влияние на ширину фронта волны оказывают механические свойства фаз двухфазного пористого материала.

Заключение. Представленные результаты теоретически обосновывают возможность существования минимальной скорости распространения УВ в двухфазном пористом материале и критической скорости, приводящей к полному пластическому затеканию пор во фронте волны. Полученные теоретические оценки устанавливают специфические особенности влияния механических и структурных свойств на ширину фронта слабой УВ в изучаемой системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.

3. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. *Нестеренко В.Ф.* Импульсное нагружение гетерогенных материалов. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1992. 200 с.
5. *Ударно-волновые* процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С.П. Киселев, А.П. Руев, А.П. Трунев, В.М. Фомин, М.Ш. Шавалиев. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1992. 261 с.
6. *Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортвов В.Е.* Ударно-волновые явления в конденсированных средах. М.: Янус-К, 1996. 408 с.
7. *Альтшулер Л.В., Трунин Р.Ф., Фортвов В.Е., Фунтиков А.И., ред.* Ударные волны и экстремальные состояния вещества. М.: Наука, 2000. 425 с.
8. *Орленко Л.П., ред.* Физика взрыва. В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит. 2004. 832 с.
9. *Орленко Л.П., ред.* Физика взрыва. В 2 т. Т. 2. М.: Физматлит. 2004. 656 с.
10. *Хасаинов Б.А., Аттетков А.В., Борисов А.А.* Ударно-волновое инициирование пористых энергетических материалов и вязкопластическая модель горячих точек // Химическая физика. 1996. Т. 15. № 7. С. 53–125.
11. *Дунин С.З., Сурков В.В.* Динамика закрытия пор во фронте ударной волны // ПММ. 1979. Т. 43. № 3. С. 511–518.
12. *Дунин С.З., Сурков В.В.* Структура фронта ударной волны в твердой пористой среде // ПМТФ. 1979. № 5. С. 106–114.
URL: http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=152760&ARTICLE_ID=152892
13. *Аттетков А.В., Соловьев В.С.* О возможности разложения гетерогенных ВВ во фронте слабой ударной волны // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23. № 4. С. 113–125.
URL: http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=148928&ARTICLE_ID=149087
14. *Attetkov A. V., Golovina E. V., Ermolaev B. S.* Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in a two-phase porous material subjected to shock compression // Journal of Heat Transfer Research. 2008. Vol. 39. No. 6. P. 479–487.
15. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.
16. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 248 с.
17. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Пилявская Елена Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аттетков А.В., Волков И.К., Пилявская Е.В. Структура фронта ударной волны в двух-фазном пористом материале // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 3. С. 41–53. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-3-41-53

SHOCK WAVE FRONT STRUCTURE IN TWO-PHASE POROUS MATERIAL

A.V. Attetkov

fn2@bmstu.ru

I.K. Volkov

fn12@bmstu.ru

E.V. Pilyavskaya

e.pilyavskaya@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of the article was to investigate the structure of stationary shock wave front by the qualitative theory of differential equations. We found a theoretical proof for possible existence of minimum speed of the shock wave propagation in a two-phase porous material and the critical speed leading to the full pores plastic wicking in the wave front. The study gives theoretical estimates of weak intensity shock wave front width

Keywords

Shock wave front structure, two-phase porous material, qualitative theory of the differential equations

REFERENCES

- [1] Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy [Physics of shock waves and hyperthermal hydrodynamic phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 686 p.
- [2] Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. Ch. 1 [Multiphase medium dynamics. Vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 464 p.
- [3] Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred. Ch. 2 [Multiphase medium dynamics. Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 360 p.
- [4] Nesterenko V.F. Impul'snoe nagruzhenie geterogennykh materialov [Impulsive loading of heterogeneous materials]. Novosibirsk, Nauka Publ.: Siberian Department, 1992. 200 p.
- [5] Kiselev S.P., Ruev A.P., Trunev A.P., Fomin V.M., Shavaliyev M.Sh. Udarno-volnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh [Shock-wave processes in two-component medium and biphasic mediums]. Novosibirsk, Nauka Publ.: Siberian Department, 1992. 261 p.
- [6] Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V., Fortov V.E. Udarno-volnovye yavleniya v kondensirovannykh sredakh [Shock-wave phenomena in condensed medium]. Moscow, Yanus-K Publ., 1996. 408 p.
- [7] Al'tshuler L.V., Trunin R.F., Fortov V.E., Funtikov A.I., eds. Udarnye volny i ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva [Shock waves and extremal states of matter]. Moscow, Nauka Publ., 2000. 425 p.
- [8] Orlenko L.P., ed. Fizika vzryva. T. 1 [Physics of explosions. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 832 p.

- [9] Orlenko L.P., ed. *Fizika vzryva*. T. 2 [Physics of explosions. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 656 p.
- [10] Khasainov B.A., Attetkov A.V., Borisov A.A. Shock-wave initiation of porous energy-yielding materials and hot spots viscoplastic model. *Khimicheskaya fizika*, 1996, vol. 15, no. 7, pp. 53–125 (in Russ.).
- [11] Dunin S.Z., Surkov V.V. Dynamics of the closing of pores at the shock wave front. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979, vol. 43, no. 3, pp. 550–558.
DOI: 10.1016/0021-8928(79)90103-5
Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892879901035?via%3Dihub>
- [12] Dunin S.Z., Surkov V.V. Structure of a shock wave front in a porous solid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 612–618. DOI: 10.1007/BF00910554
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00910554>
- [13] Attetkov A.V., Solov'yev V.S. Heterogeneous explosive decomposition in a weak shock wave. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 482–491.
DOI: 10.1007/BF00749311
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007/BF00749311>
- [14] Attetkov A.V., Golovina E.V., Ermolaev B.S. Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in a two-phase porous material subjected to shock compression. *Journal of Heat Transfer Research*, 2008, vol. 39, no. 6, pp. 479–487.
- [15] Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 280 p.
- [16] Errousmi D., Pleys K. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami* [Ordinary differential equations. Qualitative theory with applications]. Moscow, Mir Publ., 1986. 248 p.
- [17] Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinami-cheskikh sistem na ploskosti* [Methods and techniques of qualitative research on dynamic systems on a plane]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 488 p.

Attetkov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Researcher, Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Volkov I.K. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Simulation Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Pilyavskaya E.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Attetkov A.V., Volkov I.K., Pilyavskaya E.V. Shock Wave Front Structure in Two-Phase Porous Material. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 3, pp. 41–53.
DOI: 10.18698/0236-3941-2017-3-41-53