

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТЕЛАХ ПРОСТОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

В.Н. Елисеев

В.А. Товстоног

Т.В. Боровкова

v.n.eliseev@gmail.com

tovstonv@mail.ru

tatjana-@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложен единый алгоритм решения одномерных нестационарных задач теплопроводности в телах простой геометрической формы с внутренними источниками энергии различной природы. Рассматриваемые тела могут иметь форму пластины, стержня (ребра), сплошного или полого цилиндров и шара. В основе решения поставленной задачи лежат обобщенная формулировка неоднородного дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности в частных производных для тел указанной формы и метод интегральных преобразований в конечных пределах. Процедура решения конкретной краевой задачи предусматривает наличие математической модели, но не требует интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности. Приведен пример определения температурного поля в пластине с неравномерно распределенными источниками теплоты и разными условиями теплообмена на граничных поверхностях. Решения задач рассматриваемого типа удобно, в частности, использовать для тестирования сложных программ расчета температурного поля теплонагруженных элементов конструкции, анализа их теплового режима на начальной стадии проектирования и обоснования выбираемых допущений

### Ключевые слова

*Температурное поле, обобщенная задача теплопроводности, тела простой формы, алгоритм решения*

Поступила в редакцию 12.10.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Конструкции современных высокоскоростных летательных аппаратов при полете в атмосфере даже на больших высотах испытывают на себе интенсивное тепловое воздействие. На стадии проектирования и подготовки испытаний таких конструкций выполняют большой объем расчетов для определения работоспособности отдельных элементов и конструкции в целом. На этой же стадии для оценки тепловой и силовой нагрузок на конструкцию нередко используют метод ее декомпозиции, в соответствии с которым реальную конструкцию заменяют одним или совокупностью тел простой геометрической формы [1, 2]. Это позволяет не только с достаточной степенью точности определить действующие на конструкцию нагрузки, но и существенно проще обосновать и оценить принимаемые в расчете наиболее значимые допущения.

Определение температурного состояния конструкции в широком диапазоне изменения режимов ее работы — один из важнейших этапов проектно-конструкторских работ. В настоящее время для этой цели наиболее широко используют как необходимый этап создания и практического применения соответствующего программного обеспечения [4] численные методы расчета [3], при верификации которых выполняют сравнение с результатами точных аналитических решений тестовых задач. Вместе с тем аналитические методы решения задач теплопроводности представляют практический интерес и с точки зрения прикладных расчетов.

Методы решения одномерных задач нестационарной теплопроводности в телах простой геометрической формы и примеры их использования приведены, в частности, в работах [5–9]. Однако различия, нередко имеющие место в постановке известной и рассматриваемой задач, отражающие особенности теплообмена внутри материала элемента конструкции (свободный член в неоднородном дифференциальном уравнении, его коэффициенты) и на его поверхностях, затрудняют использование известных решений.

В связи с этим полезно для практики использовать предлагаемый далее единый алгоритм решения большой группы одномерных задач нестационарной теплопроводности для тел простой геометрической формы в виде пластин, цилиндров, сфер и стержней, выполненных из материалов монолитной или пористой структур.

**Постановка задачи и ее решение.** В основе предлагаемого алгоритма лежит использование метода конечных интегральных преобразований. Вывод соответствующего дифференциального уравнения теплопроводности, а также формулировка краевой задачи в общей форме рассмотрены в работе [10]. Для условий нестационарного теплообмена математическая модель этой задачи имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = a_{\xi\xi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + b_{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + c_{\xi} \theta + F(\xi); \quad (1)$$

$$\xi = \xi_1: \alpha_1 \theta'(\xi_1) + \beta_1 \theta(\xi_1) = f_1(Fo); \quad (2)$$

$$\xi = \xi_2: \alpha_2 \theta'(\xi_2) + \beta_2 \theta(\xi_2) = f_2(Fo); \quad (3)$$

$$Fo = 0: \theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad (4)$$

где  $\theta = \theta(\xi, Fo) = T(x, \tau) / T_m$ ;  $\xi = x/h$  или  $r/h$ ;  $\theta(\xi, 0) = f(\xi) = T_0 / T_m$ ;  $T_m$  — любое значение температуры, кроме 0 и  $\pm\infty$ ;  $T_0 = T_0(x, 0)$  — начальное распределение температуры или ее постоянное значение;  $a_{\xi\xi}$ ,  $b_{\xi}$ ,  $c_{\xi}$  — известные коэффициенты в уравнении (1);  $F(\xi)$  — безразмерная зависимость внутренних источников (стоков) энергии в теле от координаты;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — коэффициенты в граничных условиях;  $f_1(Fo)$  и  $f_2(Fo)$  — функции времени или константы;  $f(\xi)$  — функция координаты или константа в начальном условии;  $Fo$  — число Фурье;  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — безразмерные координаты границ тела.

Применив к задаче (1)–(4) интегральное преобразование в конечных пределах по переменной  $\xi$  [11]

$$\bar{\theta}(Fo) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) \theta(\xi, Fo) \bar{K}(\mu_n, \xi) d\xi, \quad (5)$$

получим

$$\frac{d\bar{\theta}(Fo)}{dFo} + \mu_n^2 \bar{\theta}(Fo) = \bar{F} + P_2 - P_1, \quad (6)$$

$$\bar{\theta}(0) = \bar{f}, \quad (7)$$

где  $\bar{\theta}(Fo)$  — изображение функции  $\theta(\xi, Fo)$ ;

$$\rho(\xi) = \exp \left[ - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{a_{\xi\xi}} (a'_{\xi\xi} - b_{\xi}) d\xi \right] \quad (8)$$

— весовая функция;  $\bar{K}(\mu_n, \xi)$  — нормированное ядро интегрального преобразования, связанное с ненормированным ядром  $K(\mu_n, \xi)$  соотношением

$$\bar{K}(\mu_n, \xi) = \frac{K(\mu_n, \xi)}{\sqrt{N}}, \quad (9)$$

$$N = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) K^2(\mu_n, \xi) d\xi \quad (10)$$

— норма,  $\mu_n$  — собственные числа;  $\bar{f}$  и  $\bar{F}$  — изображения функций  $f(\xi)$  и  $F(\xi)$ , определяемые из формул

$$\bar{f} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) f(\xi) \bar{K}(\mu_n, \xi) d\xi \quad (11)$$

и

$$\bar{F} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(\xi) F(\xi) \bar{K}(\mu_n, \xi) d\xi; \quad (12)$$

$P_1$  и  $P_2$  — выражения, для вычисления которых служат соотношения

$$P_1 = \frac{f_1(Fo)}{\alpha_1} p(\xi_1) \bar{K}(\mu_n, \xi_1), \quad \alpha_1 \neq 0, \quad (13)$$

$$P_1 = - \frac{f_1(Fo)}{\beta_1} p(\xi_1) \bar{K}'(\mu_n, \xi_1), \quad \beta_1 \neq 0 \quad (14)$$

— для нижнего предела интегрирования ( $\xi_1$ );

$$P_2 = \frac{f_2(Fo)}{\alpha_2} p(\xi_2) \bar{K}(\mu_n, \xi_2), \quad \alpha_2 \neq 0, \quad (15)$$

$$P_2 = -\frac{f_2(Fo)}{\beta_2} p(\xi_2) \bar{K}'(\mu_n, \xi_2), \beta_2 \neq 0 \tag{16}$$

— для верхнего предела интегрирования ( $\xi_2$ ) в зависимости от того, какой из коэффициентов  $\alpha$  или  $\beta$  отличен от нуля (если оба они отличны от нуля, то формулы дают одинаковые результаты).

Ядро интегрального преобразования, обозначив для краткости  $K(\mu_n, \xi) = K$ , находим из решения граничной задачи Штурма — Лиувилля:

$$-(pK')' + (q - \mu_n^2 \rho)K = 0, \tag{17}$$

$$\alpha_1 K'(\xi_1) + \beta_1 K(\xi_1) = 0, \tag{18}$$

$$\alpha_2 K'(\xi_2) + \beta_2 K(\xi_2) = 0, \tag{19}$$

где

$$p = p(\xi) = a_{\xi\xi} \rho(\xi) \text{ и } q(\xi) = -c_{\xi} \rho(\xi). \tag{20}$$

Представим решение уравнения (17) в виде

$$K = K(\mu_n, \xi) = \bar{B}_1 \psi(\mu_n, \xi) + \bar{B}_2 \varphi(\mu_n, \xi), \tag{21}$$

где  $\psi(\mu_n, \xi)$  и  $\varphi(\mu_n, \xi)$  — функции, образующие решение однородного уравнения (17). Вид этих функций для некоторых частных случаев приведен в табл. 1, а более подробные сведения о них можно найти в работе [12].

Таблица 1

**Выражения для функций  $\psi(\mu_n, \xi)$  и  $\varphi(\mu_n, \xi)$**

Форма тела и коэффициенты в уравнении (17)	Уравнение для ядра преобразования $K(\lambda, \xi)$	Функция		Примечание
		$\psi(\mu_n, \xi)$	$\varphi(\mu_n, \xi)$	
Пластина (монокристаллическая или пористая): $\rho = 1, p = 1, q = 0$	$K'' + \mu^2 K = 0$	$\cos(\mu\xi)$	$\sin(\mu\xi)$	—
Цилиндр (сплошной или полый): $\rho = \xi, p = \xi, q = 0$	$K'' + \frac{1}{\xi} K' + \mu^2 K = 0$	$J_0(\mu\xi)$	$Y_0(\mu\xi)$	—
Шар (сплошной или полый): $\rho = \xi^2, p = \xi^2, q = 0$	$K'' + \frac{2}{\xi} K' + \mu^2 K = 0$	$\xi^{-0,5} J_{0,5}(\mu\xi)$	$\xi^{-0,5} Y_{0,5}(\mu\xi)$	—
Ребро (стержень) постоянного поперечного сечения: $\rho = 1, p = 1, q = (ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$K'' + \omega^2 K = 0$	$\cos(\omega\xi),$ $\text{ch}(\omega\xi)$	$\sin(\omega\xi),$ $\text{sh}(\omega\xi)$	$\omega^2 > 0,$ $\omega^2 < 0$

Форма тела и коэффициенты в уравнении (17)	Уравнение для ядра преобразования $K(\lambda, \xi)$	Функция		Примечание
		$\Psi(\mu_n, \xi)$	$\Psi(\mu_n, \xi)$	
Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $\rho = 1, p = \xi, q = (ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$\xi K'' + K' + \omega^2 K = 0$	$J_0(2\omega\sqrt{\xi}), I_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$Y_0(2\omega\sqrt{\xi}), K_0(2\omega\sqrt{\xi})$	$\omega^2 > 0, \omega^2 < 0$
Круглое ребро постоянной толщины: $\rho = \xi, p = \xi, q = \xi(ml)^2, \omega^2 = \mu^2 - (ml)^2$	$K'' + \frac{1}{\xi}K' + \omega^2 K = 0$	$J_0(\mu\xi), I_0(\mu\xi)$	$Y_0(\omega\xi), K_0(\omega\xi)$	$\omega^2 > 0, \omega^2 < 0$

В выражении (21) содержится три неизвестные величины  $\bar{B}_1, \bar{B}_2$  и  $\mu_n$ , для определения которых имеются только два граничных условия (18) и (19).

Для устранения этого затруднения поделим обе части (21) на одну из постоянных  $\bar{B}_1$  или  $\bar{B}_2$  и определим ненормированное ядро интегрального преобразования  $K(\mu_n, \xi)$  с точностью до постоянной интегрирования. Основанием для такого шага служит то, что в решении рассматриваемой задачи используется только нормированное ядро, а процедура нормирования позволяет исключить его зависимость от точности определения ненормированного ядра (формулы (9) и (10)).

Поделив обе части (21) на  $\bar{B}_1$  и используя условия (18) и (19), находим значение константы

$$B_2 = \frac{\bar{B}_2}{\bar{B}_1} = -\frac{\alpha_1 \Psi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \Psi(\mu_n, \xi_1)}{\alpha_1 \Phi'(\mu_n, \xi_1) + \beta_1 \Phi(\mu_n, \xi_1)}, \tag{22}$$

а также характеристическое уравнение для определения собственных чисел

$$\alpha_2 \Phi'(\mu_n, \xi_2) + \beta_2 \Phi(\mu_n, \xi_2) = -\frac{1}{B_2} [\beta_2 \Psi(\mu_n, \xi_2) + \alpha_2 \Psi'(\mu_n, \xi_2)]. \tag{23}$$

Соотношение для определения ненормированного ядра принимает вид

$$K(\mu_n, \xi) = \Psi(\mu_n, \xi) + B_2 \Phi(\mu_n, \xi). \tag{24}$$

Из выражения (8) находим весовую функцию  $\rho(\xi)$ , а из табл. 1 или справочника по обыкновенным дифференциальным уравнениям — функции  $\Psi(\mu_n, \xi)$  и  $\Phi(\mu_n, \xi)$ .

Используя далее последовательно формулы (22)–(24), (10), (9), (20), (13)–(16) и (11), (12), находим  $B_2, \mu_n, K(\mu_n, \xi), N, \bar{K}(\mu_n, \xi), p(\xi), P_1, P_2$  и  $\bar{F}, \bar{f}$ .

После определения указанных параметров становятся известными правые части в уравнении (6) и начальном условии (7). Решение задачи (6)–(7) дает следующий результат:

$$\bar{\theta}(Fo) = \frac{\bar{F} + P_2 - P_1}{\mu_n^2} \left(1 - e^{-\mu_n^2 Fo}\right) + \bar{f}e^{-\mu_n^2 Fo}. \tag{25}$$

В соответствии с принятой в рассматриваемом методе формулой обращения оригинал функции (25) можно записать так:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, Fo) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}(Fo) \bar{K}(\mu_n, \xi) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\bar{F} + P_2 - P_1}{\mu_n^2} \left(1 - e^{-\mu_n^2 Fo}\right) + \bar{f}e^{-\mu_n^2 Fo} \right] \bar{K}(\mu_n, \xi). \end{aligned} \tag{26}$$

Недостатком полученного решения является неравномерная сходимость рядов на границах интервала изменения переменной [5]. Объяснением этого служит тот факт, что эти ряды не удовлетворяют неоднородным граничным условиям и в окрестности рассматриваемого интервала сходятся неравномерно. Поэтому найденное решение нуждается в улучшении.

Для устранения отмеченного недостатка воспользуемся рекомендацией, приведенной в работе [5]. Найдем два дополнительных решения задачи (1)–(3) в стационарной постановке, полагая в уравнении (1)  $\partial\theta/\partial Fo = 0$ .

Первое из них — частный случай выражения (26) при  $Fo \rightarrow \infty$  представим в виде ряда

$$\theta^*(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{F} + P_2 - P_1}{\mu_n^2} \bar{K}(\mu_n, \xi). \tag{27}$$

Второе — аналитическое решение (в замкнутом виде [5]) такой же задачи, опубликованное в работе [10], представим формулой

$$\theta_3^*(\xi) = c_3\psi(\xi) + c_4\varphi(\xi) - \psi(\xi)H_1(\xi) + \varphi(\xi)H_2(\xi), \tag{28}$$

где

$$c_3 = \frac{b_2b_3 - b_4}{b_1b_3 - 1}, \tag{29}$$

$$c_4 = \frac{b_1b_4 - b_2}{b_1b_3 - 1}, \tag{30}$$

$$b_1 = \left[ \frac{\alpha_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)}{\alpha_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_2}, \tag{31}$$

$$b_2 = \left[ \frac{f_2(Fo) + [\alpha_2\psi'(\xi) + \beta_2\psi(\xi)]H_1(\xi)}{\alpha_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} - H_2(\xi) \right]_{\xi=\xi_2}, \tag{32}$$

$$b_3 = \left[ \frac{\alpha_1 \varphi'(\xi) + \beta_1 \varphi(\xi)}{\alpha_1 \psi'(\xi) + \beta_1 \psi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_1}, \quad (33)$$

$$b_4 = \left[ \frac{f_1(F_0) + [\alpha_1 \varphi'(\xi) + \beta_1 \varphi(\xi)] H_2(\xi)}{\alpha_1 \psi'(\xi) + \beta_1 \psi(\xi)} + H_1(\xi) \right]_{\xi=\xi_1}, \quad (34)$$

$$H_1(\xi) = \int F(\xi) \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\varphi(\xi) \psi'(\xi) - \psi(\xi) \varphi'(\xi)}, \quad (35)$$

$$H_2(\xi) = \int F(\xi) \frac{\psi(\xi) d\xi}{\varphi(\xi) \psi'(\xi) - \psi(\xi) \varphi'(\xi)}, \quad (36)$$

$\psi(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$  — функции, образующие решение однородного дифференциального уравнения (1) (при  $\theta'_{F_0} = F(\xi) = 0$ ) для некоторых частных случаев приведены в табл. 2 [12, 13].

Таблица 2

**Решение однородного дифференциального уравнения (1)**

Форма тела и коэффициенты в уравнении (1)	Однородное уравнение теплопроводности	Функция $\psi(\xi)$	Функция $\varphi(\xi)$
Пластина $b_\xi = c_\xi = 0$	$\theta'' = 0$	$\xi$	1
Пористая пластина, охлаждаемая жидкостью: $c_\xi = 0$ , $b_\xi = K = -\frac{\dot{m} C_{pж} l}{\lambda_k (1 - \Pi)}$	$\theta'' - Kn\theta' = 0$	$\exp(Kn\xi)$	1
Полый или сплошной цилиндр: $c_\xi = 0$ , $b_\xi = \frac{1}{\xi}$	$\theta'' + \frac{1}{\xi}\theta' = 0$	$\ln \xi$	1
Сплошной или полый шар: $c_\xi = 0$ , $b_\xi = \frac{2}{\xi}$	$\theta'' + \frac{2}{\xi}\theta' = 0$	$\frac{1}{\xi}$	1
Ребро (стержень) постоянного сечения: $c_\xi = -(ml)^2$ , $b_\xi = 0$ , $m = \sqrt{\frac{\alpha \Pi}{\lambda S_0}}$ ( $\Pi$ , $S_0$ — периметр и площадь поперечного сечения стержня)	$\theta'' - (ml)^2 \theta' = 0$	$\exp(-ml\xi)$	$\exp(ml\xi)$
Ребро треугольного и трапециевидного поперечного сечения с малым углом при вершине: $c_\xi = -(ml)^2$ , $b_\xi = 1$ , $m = \sqrt{\alpha / \lambda \delta}$	$\xi \theta'' + \theta' - (ml)^2 \theta = 0$	$I_0(2ml\sqrt{\xi})$	$K_0(2ml\sqrt{\xi})$
Круглое ребро постоянной толщины $2\delta$ : $c_\xi = -(ml)^2$ , $b_\xi = \frac{1}{\xi}$ , $m = \sqrt{\alpha / \lambda \delta}$	$\theta'' + \frac{1}{\xi}\theta' - (ml)^2 \theta = 0$	$I_0(ml\xi)$	$K_0(ml\xi)$

*Примечание.*  $I_0$ ,  $K_0$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка [13].

В случае отсутствия в теле внутренних источников (стоков) теплоты (полагая  $F(\xi) = H(\xi) = 0$ ) выражение (28) принимает более простой вид

$$\theta_3^*(\xi) = c_3\psi(\xi) + c_4\varphi(\xi), \quad (37)$$

константы  $c_3$  и  $c_4$  определяют по формулам (29) и (30),  $b_1$  и  $b_3$  находят из (31) и (33), а  $b_2$  и  $b_4$  определяют из выражений

$$b_2 = \left[ \frac{f_2(F_0)}{\alpha_2\varphi'(\xi) + \beta_2\varphi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_2}, \quad (38)$$

$$b_4 = \left[ \frac{f_1(F_0)}{\alpha_1\psi'(\xi) + \beta_1\psi(\xi)} \right]_{\xi=\xi_1}. \quad (39)$$

Складывая выражение (26) с (28) и вычитая из полученной суммы правую часть (27), получаем окончательное решение задачи (1)–(4) с улучшенной сходимостью ряда

$$\theta(\xi, Fo) = \theta_3^*(\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\bar{F} + P_2 - P_1}{\mu_n^2} - \bar{f} \right) e^{-\mu_n^2 Fo} \bar{K}(\mu_n, \xi), \quad (40)$$

где  $\theta_3^*(\xi)$  — представлена формулой (28).

Использование формулы (40) для определения одномерного нестационарного температурного поля в телах простой геометрической формы на основе единого алгоритма его расчета может оказаться удобным и оправданным, например, в процессе анализа работоспособности теплонагруженных элементов конструкции, подвергнутой декомпозиции. Такой анализ часто связан с определением температурного состояния тел простой формы, выполненных из материалов той или иной структуры, а в отдельных случаях — с наличием в них внутренних источников теплоты различной природы и законом распределения по координате и во времени (например, воздействие мощного потока электромагнитного излучения на остекление летательного аппарата), с заданием неодинаковых условий теплообмена на границах тела и пр.

Формула (40) позволяет получать решения многих частных одномерных задач нестационарной теплопроводности с помощью достаточно простых алгебраических операций и выражений для интегралов, как правило, табличных.

Процедура решения конкретной краевой задачи предусматривает наличие ее математической модели, но уже не нуждается в интегрировании дифференциального уравнения теплопроводности.

**Алгоритм решения.** Порядок расчета одномерного нестационарного температурного поля в телах простой формы на основе предлагаемого алгоритма может быть представлен в виде следующей последовательности действий.

1. Формулируем математическую модель рассматриваемой задачи в безразмерной форме.



2. Сопоставляем модель рассматриваемой задачи с общей математической моделью (1)–(4) и записываем значения следующих параметров:  $a_{\xi\xi}$ ,  $b_{\xi}$ ,  $c_{\xi}$ ,  $F(\xi)$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $f_1(\text{Fo})$ ,  $f_2(\text{Fo})$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ .

3. Из табл. 2 или справочника по обыкновенным дифференциальным уравнениям [12] выбираем функции  $\psi(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , образующие решение однородного дифференциального уравнения теплопроводности (37).

4. Из формул (35), (36), (31)–(34) и (29), (30) последовательно находим  $H_1(\xi)$ ,  $H_2(\xi)$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $b_4$ ,  $c_3$  и  $c_4$ .

5. Записываем выражение для определения стационарного температурного поля в виде (28) или (37), подставляя в них найденные ранее значения  $c_3$ ,  $c_4$  и  $H_1(\xi)$ ,  $H_2(\xi)$ , в зависимости от условий рассматриваемой задачи.

6. Из формул (8) и (20) находим  $\rho(\xi)$ ,  $p(\xi)$  и  $q(\xi)$ .

7. Из табл. 1 выбираем функции  $\psi(\mu_n, \xi)$ ,  $\varphi(\mu_n, \xi)$ , из формул (22) и (23) находим константу  $B_2$  и уравнение для определения собственных чисел  $\mu_n$ .

8. Обращаясь к формулам (24), (10) и (9), получаем  $K(\mu_n, \xi)$ ,  $N$  и  $\bar{K}(\mu_n, \xi)$ .

9. Из формул (11) и (12) находим  $\bar{f}$  и  $\bar{F}$ , а из соотношений (13)–(16) — выражения для  $P_1$  и  $P_2$ .

10. Используя формулу (40) совместно с результатами пп. 5–9, получаем решение задачи, сформулированной в п. 1.

**Пример.** Определим нестационарное температурное поле в частично прозрачной плоской пластине, нагреваемой с одной стороны потоками горячего газа плотностью  $q_m$  и излучения  $q_{л,0}$  и охлаждаемой с другой стороны за счет конвекции.

Представим математическую модель рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\text{ср} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k q_{л,0} e^{-\text{Bu}_x}; \quad (41)$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = q_m; \quad (42)$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=h} = \alpha_{\text{ж}} (T_2 - T_{\text{ж}}); \quad (43)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (44)$$

где  $T = T(x, \tau)$ ;  $k$  — коэффициент поглощения;  $\text{Bu}_x = kx$  — критерий Бугера;  $T_2$  — температура охлаждаемой поверхности пластины.

*Алгоритм решения.*

1. Представим задачу (41)–(44) в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \text{Ki}_л \text{Bu} e^{-\text{Bu}\xi}; \quad (45)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_1} = -\text{Ki}_T; \tag{46}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_2} + \text{Bi} \theta(\xi_2) = \text{Bi} \theta_{\text{ж}}; \tag{47}$$

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi) = \theta_0, \tag{48}$$

где  $\text{Ki}_л = q_{л,0}h/(\lambda T_m)$ ;  $\text{Ki}_T = q_T h/(\lambda T_m)$ ;  $\text{Bi} = \alpha h/\lambda$ ;  $\text{Bu} = kh$ ;  $\theta_{\text{ж}} = T_{\text{ж}}/T_T$ ;  $\theta_0 = T_0/T_T$ .

2. Сопоставляя модель рассматриваемой задачи (45)–(48) с обобщенной моделью (1)–(4), получаем, что  $a_{\xi\xi} = 1$ ,  $b_{\xi} = c_{\xi} = 0$ ,  $F(\xi) = \text{Ki}_л \text{Bu} e^{-\text{Bu}\xi}$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \text{Bi}$ ,  $f_1(\text{Fo}) = -\text{Ki}_T$ ,  $f_2(\text{Fo}) = \text{Bi}\theta_{\text{ж}}$ ,  $f(\xi) = \theta_0$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 1$ .

3. Из табл. 2 для пластины при  $b_{\xi} = c_{\xi} = 0$  выбираем функции  $\psi(\xi) = \xi$  и  $\varphi(\xi) = 1$ .

4. Из формул (35), (36), (31)–(34), (29) и (30) последовательно находим

$$H_1(\xi) = -\text{Ki}_л e^{-\text{Bu}\xi};$$

$$H_2(\xi) = -\frac{e^{-\text{Bu}}}{\text{Bu}} (\text{Bu} \xi + 1) \text{Ki}_л;$$

$$b_1 = 1 + \frac{1}{\text{Bi}}; \quad b_2 = \theta_{\text{ж}} - \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}}\right) \text{Ki}_л e^{-\text{Bu}} + \frac{e^{-\text{Bu}}}{\text{Bu}} (1 + \text{Bu}) \text{Ki}_л;$$

$$b_3 = 0, \quad b_4 = -(\text{Ki}_T + \text{Ki}_л), \quad c_3 = -(\text{Ki}_T + \text{Ki}_л);$$

$$c_4 = \theta_{\text{ж}} + \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}}\right) [\text{Ki}_T + \text{Ki}_л (1 - e^{-\text{Bu}})] + (1 + \text{Bu}) \frac{e^{-\text{Bu}}}{\text{Bu}} \text{Ki}_л.$$

5. Подставляя найденные значения  $c_3$ ,  $c_4$  и  $H_1(\xi)$ ,  $H_2(\xi)$  в формулу (28), получаем выражение для определения стационарной температуры пластины:

$$\begin{aligned} \theta^* = \theta_{\text{ж}} + \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}}\right) [\text{Ki}_T + \text{Ki}_л (1 - e^{-\text{Bu}})] - [\text{Ki}_T + \text{Ki}_л (1 - e^{-\text{Bu}\xi})] \xi + \\ + [(1 + \text{Bu}) e^{-\text{Bu}} - e^{-\text{Bu}\xi} (1 + \text{Bu} \xi)] \frac{\text{Ki}_л}{\text{Bu}}; \end{aligned} \tag{49}$$

6. Из формул (8) и (20) находим  $\rho(\xi) = \rho = 1$ ,  $p(\xi) = p = 1$ ,  $q(\xi) = q = 0$ .

7. Из табл. 1 выбираем функции  $\psi(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n \xi)$ ,  $\varphi(\mu_n, \xi) = \sin(\mu_n \xi)$  и из формул (22) и (23) находим константу  $B_2 = 0$  и уравнение для определения собственных чисел:

$$\text{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{\text{Bi}}. \tag{50}$$

8. Обратившись к формулам (24), (10) и (9), находим

$$\bar{K}(\mu_n, \xi) = \cos(\mu_n \xi);$$

$$N = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \cos \mu_n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_n^2 + \text{Bi}^2 + \text{Bi}}{\mu_n^2 + \text{Bi}^2} \right); \quad (51)$$

$$\bar{K}(\mu_n, \xi) = \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\sqrt{N}}.$$

9. Из формул (11) и (12) находим  $\bar{f}$  и  $\bar{F}$ , а из соотношений (13) и (15) — выражения для  $P_1$  и  $P_2$ :

$$\bar{f} = \theta_0 \frac{\sin \mu_n}{\mu_n \sqrt{N}};$$

$$\bar{F} = \left[ \frac{e^{-\text{Bu}}}{\text{Bu}^2 + \mu_n^2} (\mu_n \sin \mu_n - \text{Bu} \cos \mu_n) + \frac{\text{Bu}}{\text{Bu}^2 + \mu_n^2} \right] \frac{\text{Bu} \text{Ki}_l}{\sqrt{N}};$$

$$P_1 = -\frac{\text{Ki}_r}{\sqrt{N}}, \quad P_2 = \text{Bi} \theta_{\text{ж}} \cos \mu_n \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

10. Используя формулу (40) совместно с результатами пп. 5–9, получаем решение задачи, сформулированной в п. 1:

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \text{Fo}) = & \theta_{\text{ж}} + \left( 1 + \frac{1}{\text{Bi}} \right) \left[ \text{Ki}_r + \text{Ki}_l (1 - e^{-\text{Bu}}) \right] - \left[ \text{Ki}_r + \text{Ki}_l (1 - e^{-\text{Bu}\xi}) \right] \xi + \\ & + \left[ (1 + \text{Bu}) e^{-\text{Bu}} - (1 + \text{Bu}\xi) e^{-\text{Bu}\xi} \right] \frac{\text{Ki}_l}{\text{Bu}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{e^{-\text{Bu}}}{\text{Bu}^2 + \mu_n^2} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. (\mu_n \sin \mu_n - \text{Bu} \cos \mu_n) + \frac{\text{Bu}}{\text{Bu}^2 + \mu_n^2} \right] \text{Bu} \text{Ki}_l + (\text{Bi} \theta_{\text{ж}} \cos \mu_n + \text{Ki}_r) - \theta_0 \mu_n \sin \mu_n \right\} \times \\ & \times e^{-\mu_n^2 \text{Fo}} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 N}. \quad (52) \end{aligned}$$

Для преобразования формулы (52) к размерному виду обе ее части следует умножить на  $T_m$ . Таким образом можно найти выражения для  $T(x, \tau)$ , температур на нагреваемой стороне пластины  $T_1(0, \tau)$  и на охлаждаемой поверхности  $T_2(h, \tau)$  в нестационарном и установившемся ( $\text{Fo} \rightarrow \infty$ ) режимах теплообмена  $T(x)$ ,  $T_1(0)$  и  $T_2(h)$ .

В частном случае, если материал пластины имеет малую поглощательную способность по отношению к падающему на нее излучению ( $\text{Bu} \rightarrow 0$ ), формула (52) принимает вид

$$\theta(\xi, Fo) = \theta_{ж} + Ki_T \left( \frac{1}{Bi} + 1 - \xi \right) - \sum_{n=1}^{\infty} (Bi\theta_{ж} \cos \mu_n - \theta_0 \mu_n \sin \mu_n + Ki_T) \times e^{-\mu_n^2 Fo} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 N}.$$

Использование этого выражения, например, для расчета температурного поля водоохлаждаемой оболочки газоразрядного источника излучения [14] дает результат, хорошо совпадающий с точным решением (52).

Уравнение (52) можно также рассматривать как решение краевой задачи, которая, в частности, достаточно близко описывает модель расчета температурного поля смотровых окон в высокотемпературных вакуумных устройствах и сосудов из кварцевого стекла, предназначенных для инфракрасного нагрева жидких сред в технологии производства электронных компонентов [15]. Применимость уравнения (52) для расчета температурного поля в этих примерах обеспечивается при условии, если значение критерия  $Ki_T$  в нем принять равным нулю.

Еще один частный случай решения (52) связан с детально изученным в литературе примером анализа температурного поля непрозрачной пластины, одна сторона которой теплоизолирована, а другая — нагревается конвективным потоком горячего газа [16, 17]. В рассматриваемом случае в формулировке краевой задачи (45)–(48) в правой части уравнения (45) свободный член должен быть равен нулю ( $Ki_n = Bi = 0$ ), а в граничном условии (46)  $Ki_T = 0$  — условие изоляции на поверхности  $\xi = \xi_1 = 0$ . Граничное условие на поверхности  $\xi = \xi_2 = 1$  остается неизменным, но безразмерную температуру среды  $\theta_{ж}$  целесообразно обозначить  $\theta_c = T_r / T_m$ , где  $T_r$  — температура горячего газа.

С учетом сделанных замечаний формула (52) приобретает вид

$$\theta(\xi, Fo) = \theta_c - \sum_{n=1}^{\infty} (Bi\theta_c \cos \mu_n - \theta_0 \mu_n \sin \mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo} \frac{\cos(\mu_n \xi)}{\mu_n^2 N}. \quad (53)$$

Рассматривая (53) совместно с (50) и (51), находим

$$\frac{\theta_c - \theta(\xi, Fo)}{\theta_c - \theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n}{\mu_n N} \cos(\mu_n \xi) e^{-\mu_n^2 Fo} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \xi) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (54)$$

где

$$A_n = \frac{\sin \mu_n}{\mu_n N} = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Умножив числитель и знаменатель левой части (54) на  $T_m$ , запишем ее в виде формулы, приведенной в [7]:

$$\frac{T_r - T(x, \tau)}{T_r - T_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{h}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (55)$$

Решения приведенных и подобных им простых задач удобно использовать для тестирования сложных программ расчета температурного состояния теплонагруженных элементов конструкций, анализа их теплового режима на начальной стадии проектирования и обоснования выбираемых допущений. Например, на основе формулы (55) удастся показать, что при малом термическом сопротивлении нагреваемой пластины по сравнению с термическим сопротивлением контактирующего с ней слоя газа

$$\frac{h}{\lambda} \ll \frac{1}{\alpha} \quad (Bi \rightarrow 0)$$

— температура практически постоянна по толщине пластины и зависит только от времени [16]. Аналогичный результат для тел произвольной формы приведен в [18].

В другом варианте нагрева пластины с большим термическим сопротивлением (изоляция)

$$\frac{h}{\lambda} \gg \frac{1}{\alpha} \quad (Bi \rightarrow \infty)$$

— на ее поверхности сразу устанавливается температура, равная температуре горячего газа. Последнее дает возможность вместо граничного условия третьего рода на нагреваемой поверхности пластины использовать граничное условие первого рода. Обоснованное применение подобных допущений часто позволяет упростить расчеты температурного поля.

**Заключение.** Предложен единый алгоритм решения одномерных нестационарных задач теплопроводности в телах простой геометрической формы с внутренними источниками теплоты различной природы. Рассматриваемые тела могут иметь форму пластины, стержня, сплошного или полого цилиндра и шара.

Решение поставленной задачи, основанное на использовании метода конечных интегральных преобразований, представлено в виде ряда с улучшенной сходимостью.

Приведен пример решения краевой задачи и его частные случаи для пластины с неравномерно распределенными внутренними источниками теплоты и условиями теплообмена на граничных поверхностях разного рода.

Отмечены основные направления, в которых могут найти применение решения задач с использованием предложенного алгоритма.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Хорошев А.Н.* Введение в управление проектированием механических систем. Белгород, 1999. 372 с.
2. *Аэродинамика ракет.* В 2 т. Т. 2. Методы аэродинамического расчета / под ред. М. Хемша и Дж. Нильсена. М.: Мир, 1989. 512 с.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2009. 480 с.

4. *Грушин А.И.* Верификация в вычислительной технике // Потенциал. 2007. № 4. URL: <http://www.ipmce.ru/img/press/potential4-2007.pdf>
5. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
6. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
7. *Михайлов М.Д.* Нестационарные температурные поля в оболочках. М.: Энергия, 1967. 120 с.
8. *Кудинов В.А., Аверин Б.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Аналитические методы теплопроводности. Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. 209 с.
9. *Кудинов В., Стефанюк Е., Кудинов И.* Аналитические методы теплопроводности. Саарбрюккен (Германия): LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 340 с.
10. *Елисеев В.Н., Боровкова Т.В.* Обобщенный аналитический метод расчета стационарного температурного поля в телах простой геометрической формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 1. С. 40–57.
11. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1979. 710 с.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
13. *Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.* М.: Энергия, 1979. 832 с.
14. *Елисеев В.Н., Товстоног В.А., Боровкова Т.В., Павлова Я.М.* Термостойкость оболочек газоразрядных трубчатых водоохлаждаемых источников излучения при нестационарном режиме работы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 2. С. 45–59. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-45-59
15. *Баранов В.В., Шлыкович А.А.* Ванна для инфракрасного нагрева жидких технологических сред в технологии микроэлектроники // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2013. № 4. URL: <http://www.jurnal.org/articles/2013/electron1.html>
16. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1982. 328 с.
17. *Зарубин В.С.* Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1966. 216 с.
18. *Крейт Ф., Блэк У.* Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983. 512 с.

**Елисеев Виктор Николаевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Товстоног Валерий Алексеевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Боровкова Татьяна Владимировна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Елисеев В.Н., Товстоног В.А., Боровкова Т.В. Алгоритм решения обобщенной задачи нестационарной теплопроводности в телах простой геометрической формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 1. С. 112–128.

DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-112-128

**SOLUTION ALGORITHM OF GENERALIZED NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM IN THE BODIES OF SIMPLE GEOMETRIC SHAPES**

V.N. Eliseev

V.A. Tovstonog

T.V. Borovkova

v.n.eliseev@gmail.com

tovstonv@mail.ru

tatjana-@mail.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

The study proposes a single algorithm for solving the one-dimensional non-stationary heat conduction problems in the bodies of simple geometric shapes with internal energy sources of different nature. The bodies under consideration may have the shape of a plate, a rod (rib), a solid or hollow cylinder and a sphere. The basis of the problem solution is a generalized formulation of the heterogeneous differential equation of non-stationary heat conduction in partial derivatives for the bodies of the specified form and the method of integral transformations in finite bounds. The procedure for solving a specific boundary-value problem involves the presence of a mathematical model, but does not require integration of the differential equation of heat conduction. We give an example of determining the temperature field in a plate with unevenly distributed heat sources and different conditions of heat transfer at the boundary surfaces. It is relevant to use the solutions of this type, particularly, for testing the complex programs calculating the temperature field of thermal-loaded design elements, as well as for the analysis of the thermal regime in the early stages of design and substantiation of the eligible assumptions

**Keywords**

*Temperature field, generalized heat conduction problem, bodies of a simple shape, solution algorithm*

**REFERENCES**

- [1] Khoroshev A.N. Vvedenie v upravlenie proektirovaniem mekhanicheskikh system [Introduction to mechanical systems engineering control]. Belgorod, 1999. 372 p.
- [2] Hensch M.J., Nielsen J.N., ed. Tactical missile aerodynamics. New York, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1986. 858 p. (Russ. ed.: Aerodinamika raket. V 2 t. T. 2. Metody aerodinamicheskogo rascheta. Moscow, Mir Publ., 1989. 512 p.).

- [3] Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki [Numerical technique for solving inverse problem of mathematical physics]. Moscow, LKI Publ., 2009. 480 p.
- [4] Grushin A.I. Verification in computer engineering. *Potentsial*, 2007, no. 4 (in Russ.). Available at: <http://www.ipmce.ru/eng/img/press/potential4-2007.pdf>
- [5] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in solid body thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p.
- [6] Carslaw H., Jaeger J. Conduction of heat in solids. Oxford University Press, 1959. 517 p. (Russ. ed.: *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
- [7] Mikhaylov M.D. Nestatsionarnyye temperaturnyye polya v obolochkakh [Nonstationary thermal field in shells]. Moscow, Energiya Publ., 1967. 120 p. (in Russ.).
- [8] Kudinov V.A., Averin B.A., Stefanyuk E.V., Nazarenko S.A. Analiticheskie metody teploprovodnosti [Analytical methods of thermal conductivity]. Samara, SamGTU Publ., 2004. 209 p.
- [9] Kudinov V., Stefanyuk E., Kudinov I. Analiticheskie metody teploprovodnosti [Analytical methods of thermal conductivity]. Saarbrücken (Germany), LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 340 p. (in Russ.).
- [10] Eliseev V.N., Borovkova T.V. The generalized analytical approach to calculating a stationary temperature field in objects of simple geometrical shapes. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 1, pp. 40–57 (in Russ.).
- [11] Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 710 p.
- [12] Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen; Gewöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig, Becker, 1943. (Russ. ed.: *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 576 p.).
- [13] Abramovits M., Stigan I. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam [Special Function Handbook]. Moscow, Energiya Publ., 1979. 832 p.
- [14] Eliseev V.N., Tovstonog V.A., Borovkova T.V., Pavlova Ya.M. Thermostability of casings of gas-discharge tubular water-cooled radiation sources in nonstationary state. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2016, no. 2, pp. 45–59 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-45-59
- [15] Baranov V.V., Shlykovich A.A. Bath for infrared heating of liquid processing medium in microelectronics technology. *Zhurnal nauchnykh publikatsiy aspirantov i doktorantov*, 2013, no. 4 (in Russ.). Available at: <http://www.jurnal.org/articles/2013/electron1.html>
- [16] Belyaev N.M., Ryadno A.A. Metody teorii teploprovodnosti. T. 1 [Thermal conductivity methods theory. Vol. 1]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982. 328 p.
- [17] Zarubin V.S. Temperaturnyye polya v konstruksii letatel'nykh apparatov [Thermal fields in aircraft construction]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1966. 216 p.
- [18] Kreyt F., Blek U. Osnovy teploperedachi [Fundamentals of heat flow]. Moscow, Mir Publ., 1983. 512 p.



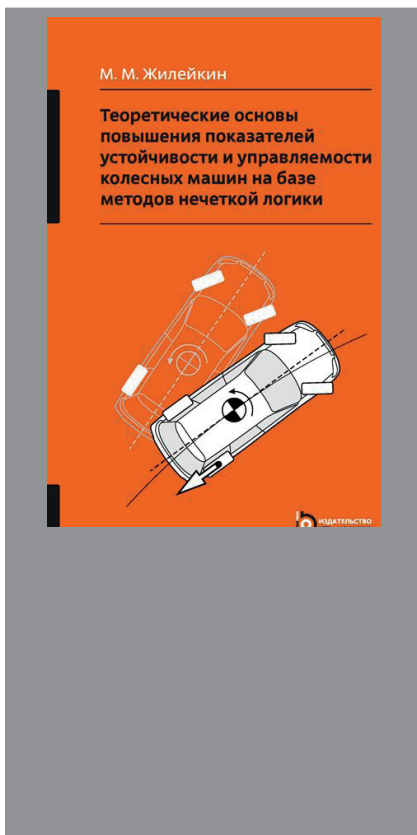
**Eliseev V.N.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Spacecrafts and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Tovstonog V.A.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Spacecrafts and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Borovkova T.V.** — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Spacecrafts and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Eliseev V.N., Tovstonog V.A., Borovkova T.V. Solution Algorithm of Generalized Non-Stationary Heat Conduction Problem in the Bodies of Simple Geometric Shapes. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 1, pp. 112–128. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-112-128



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет монография автора

**М.М. Жилейкина**

**«Теоретические основы повышения показателей устойчивости и управляемости колесных машин на базе методов нечеткой логики»**

Изложены принципы повышения показателей устойчивости и управляемости как двухосных, так и многоосных колесных машин, оснащенных трансмиссиями различных типов. Обоснованы принципиальные решения по способам управления движением машин, обеспечивающие повышение их курсовой и траекторной устойчивости. Предложены критерии оценки эффективности работы комплексной системы динамической стабилизации движения колесных машин. Разработаны алгоритмы работы системы динамической стабилизации с применением методов нечеткой логики для двухосных и многоосных колесных машин.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
+7 (499) 263-60-45  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru