

## АНАЛИЗ ДЕЙСТВУЮЩИХ ОШИБОК ДВУХПРОФИЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Г.А. Тимофеев  
Н.Н. Барбашов

timga@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Волновые зубчатые передачи нашли широкое применение как в машиностроении, так и в приборостроении. Их производство налажено во многих странах мира и в первую очередь в США, Японии и ФРГ. В настоящее время идет их освоение и в РФ. Решающее значение для применения волновых зубчатых передач в несиловых (кинематических) приводах имеет оценка их погрешностей, вызываемых эксцентриситетами зубчатых колес и мертвого хода, возникающего из-за наличия зазоров между контактирующими профилями зубьев гибкого и жесткого колес. Рассмотрено влияние погрешностей изготовления таких колес на их тангенциальные и радиальные перемещения при двухпрофильном волновом зацеплении. Показано, что двухпрофильное волновое зацепление обеспечивает более высокие показатели кинематической точности по сравнению с однопрофильным волновым зацеплением

### Ключевые слова

*Волновые зубчатые передачи, кинематическая погрешность, мертвый ход, двухпрофильное волновое зацепление, гибкое и жесткое колеса*

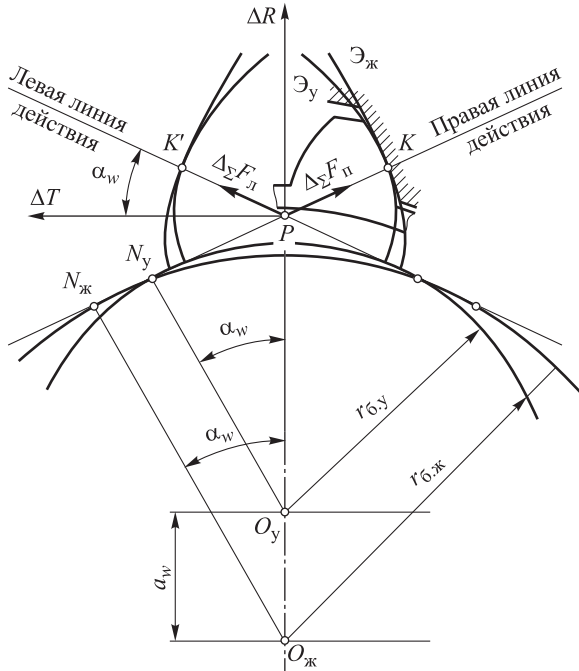
Поступила в редакцию 26.04.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

В цилиндрических эвольвентных зубчатых передачах двухпрофильное зацепление можно получить с помощью люфтовывбирающих устройств различных конструкций [1, 2], но это значительно увеличивает статический момент трогания и удорожает передачу.

В кинематических волновых зубчатых передачах (ВЗП) благодаря упругой связи зубьев гибких и жестких колес существует возможность обеспечения двухпрофильного волнового зацепления без значительного увеличения момента трогания. Двухпрофильным считается такое зацепление, которое характеризуется одновременным контактом по правым и левым профилям зубьев. Геометрические параметры для двухпрофильного волнового зацепления, показанного на рисунке, наиболее удобно определять по методикам [3, 4]. Гибкое колесо ВЗП с дисковым генератором волн облегает каждый диск в зоне зацепления так, что срединная линия гибкого колеса в торцовом сечении имеет постоянный радиус кривизны в пределах угла облегания. Если зубья гибкого колеса ВЗП нарезаются в деформированном состоянии, то зубчатое зацепление в волновой передаче можно представить как внутреннее эвольвентное зацепление жесткого колеса с числом зубьев  $z_{ж}$  с некоторым условным колесом с числом зубьев  $z_{у}$ .

Зацепление зубьев гибкого и жесткого колес в зонах зацепления волновой передачи рассматривается в обращенном движении как внутреннее эвольвентное зацепление колес  $z_{ж}$  и  $z_y$  с малой разностью чисел зубьев. Профиль зубьев гибкого колеса в зоне зацепления соответствует профилю зубьев условного (расчетного) колеса, ось вращения которого совпадает с осью вращения деформирующих дисков генератора волн (рисунок).



Геометрические параметры двухпрофильного волнового зацепления

При работе волновых передач с двухпрофильным зацеплением погрешности изготовления деталей так же, как и при однопрофильном зацеплении, создают избыточные перемещения сопряженных профилей зубьев ведомого колеса. Эти перемещения отсчитываются по линиям действия сопряженных профилей и поэтому называются действующими ошибками. Поскольку боковые поверхности зубьев гибкого и жесткого колес представляют собой эвольвенты, то линиями действия являются общие касательные к основным окружностям условного и жесткого колес, радиусы которых обозначены соответственно через  $r_{б.y}$  и  $r_{б.ж}$ .

Общая нормаль соприкасающихся в точке  $K$  правых эвольвент  $\mathcal{E}_{y.п}$  и  $\mathcal{E}_{ж.п}$  называется правой линией действия, а нормаль соприкасающихся в точке  $K'$  левых эвольвент  $\mathcal{E}_{y.л}$  и  $\mathcal{E}_{ж.л}$  соответственно — левой линией действия.

Причиной образования действующих ошибок в зацеплении (как по правой, так и по левой линиям действия) является наличие в процессе обработки и сборки зубчатых колес геометрического и кинематического эксцентриситетов. Эти эксцентриситеты гибкого и жесткого колес при двухволновом зацеплении

в каждой зоне деформации гибкого колеса создают суммарное избыточное перемещение одновременно по левой  $\Delta F_{\text{л}}$  и правой  $\Delta F_{\text{п}}$  линиям действия, вызывая тем самым дополнительные радиальные  $\Delta R$  и тангенциальные  $\Delta T$  перемещения колес волновой передачи.

На основании зависимостей, приведенных в работе [5], можно определить значения радиальных и тангенциальных перемещений колес при двухпрофильном волновом зацеплении:

$$\Delta R = \frac{\Delta_{\Sigma} F_{\text{л}} + \Delta_{\Sigma} F_{\text{п}}}{2 \sin \alpha_w}; \quad (1)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta_{\Sigma} F_{\text{л}} - \Delta_{\Sigma} F_{\text{п}}}{2 \sin \alpha_w}, \quad (2)$$

где  $\alpha_w$  — угол зацепления, а

$$\Delta_{\Sigma} F_{\text{л}} = \Delta_y F_{\text{л}} + \Delta_{\text{ж}} F_{\text{л}}; \quad (3)$$

$$\Delta_{\Sigma} F_{\text{п}} = \Delta_y F_{\text{п}} + \Delta_{\text{ж}} F_{\text{п}}. \quad (4)$$

Здесь  $\Delta_y F_{\text{л}}$  и  $\Delta_{\text{ж}} F_{\text{л}}$  — действующие ошибки гибкого и жесткого колес, проявляющиеся по левой линии действия;  $\Delta_y F_{\text{п}}$  и  $\Delta_{\text{ж}} F_{\text{п}}$  — те же ошибки гибкого и жесткого колес по правой линии действия.

Значение действующей ошибки по левой или правой линиям действия для каждого колеса определяется в результате их однопрофильного контроля при соответствующем направлении вращения.

Для анализа выражений (1) и (2) необходимо отдельно рассмотреть влияние геометрического и кинематического эксцентриситетов зубчатых колес в волновой передаче. Часть действующей ошибки  $\Delta_r F$ , образованная геометрическим эксцентриситетом  $e_r$  зубчатого колеса, представляется зависимостью

$$\Delta_r F = \pm e_r \sin(\varphi + \alpha), \quad (5)$$

где  $\varphi$  — угол поворота колеса;  $\alpha$  — угол профиля зуба на делительной окружности.

Нижние индексы в этой и последующих формулах относятся к действующим ошибкам по правой, а верхние — по левой линиям действия.

Другая часть ошибки  $\Delta_k F$ , вызванная кинематическим эксцентриситетом  $e_k$ , определяется по формуле

$$\Delta_k F = \pm e_k \sin(\varphi + \psi), \quad (6)$$

где  $\psi$  — фазовый угол, учитывающий расположение кинематического и геометрического эксцентриситетов колеса.

Допуская, что функции действующих ошибок как гибкого, так и жесткого колес являются синусоидальными, выражения (3) и (4) будут соответственно равны:

$$\Delta_{\Sigma} F_{\text{л}} = \left[ e_{y,\Gamma} \sin(\varphi + \alpha) + e_{y,K} \sin(\varphi + \psi_y) \right] + \left[ -e_{ж,\Gamma} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi - \alpha\right) - e_{ж,K} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \psi_{ж}\right) \right] \quad (7)$$

— по левой линии действия, где  $e_{y,\Gamma}$  и  $e_{y,K}$  — геометрический и кинематический эксцентриситеты гибкого колеса;  $e_{ж,\Gamma}$  и  $e_{ж,K}$  — те же эксцентриситеты жесткого колеса волновой передачи;

$$\Delta_{\Sigma} F_{\text{п}} = \left[ -e_{y,\Gamma} \sin(\varphi + \alpha) - e_{y,K} \sin(\varphi - \psi_y) \right] + \left[ -e_{ж,\Gamma} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi - \alpha\right) - e_{ж,K} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \psi_{ж}\right) \right] \quad (8)$$

— по правой линии действия.

Подставив выражения (7) и (8) в формулу (1) и проведя соответствующие преобразования, получим

$$\Delta R = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_w} \left( e_{y,\Gamma} \cos \varphi + e_{ж,\Gamma} \cos \frac{z_{ж}}{z_y} \varphi \right), \quad (9)$$

где  $z_{\Gamma}$  и  $z_{ж}$  — числа зубьев гибкого и жесткого колес.

Таким образом, на радиальное перемещение колес при двухпрофильном волновом зацеплении кинематические эксцентриситеты зубчатых колес не влияют. Следовательно, для уменьшения радиального перемещения колес в волновых передачах необходимо строго ограничивать погрешности базирования при обработке и сборке, которые создают геометрические эксцентриситеты зубчатых венцов гибкого и жесткого колес.

Значения тангенциальных избыточных перемещений колес волновой передачи с двухпрофильным зацеплением определяются при подстановке в формулу (2) выражений (7) и (8) и соответствующих преобразований:

$$\Delta T = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} \left( e_{y,\Gamma} \sin \varphi + e_{ж,\Gamma} \sin \frac{z_{ж}}{z_y} \varphi \right) + \frac{1}{\cos \alpha_w} \left[ e_{y,K} \sin(\varphi + \psi_y) + e_{ж,K} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \psi_{ж}\right) \right]. \quad (10)$$

Тангенциальные избыточные перемещения колес в этом случае зависят от двух видов эксцентриситетов — геометрического и кинематического.

Для случая однопрофильного волнового зацепления в одной зоне деформации гибкого колеса избыточные перемещения наблюдаются лишь по одной линии действия. Радиальные и тангенциальные перемещения колес при этом определяются по следующим зависимостям:

$$\Delta R = \frac{\Delta_{\Sigma} F}{\sin \alpha_w}; \quad (11)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta_{\Sigma} F}{\cos \alpha_w}. \quad (12)$$

При зацеплении зубьев левыми профилями с учетом выражения (7) эти перемещения запишутся так:

$$\Delta R = \frac{1}{\sin \alpha_w} \left[ e_{y,\Gamma} \sin(\varphi + \alpha) + e_{y,K} \sin(\varphi + \psi_y) + e_{ж,\Gamma} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \alpha\right) + e_{ж,K} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \psi_{ж}\right) \right] \quad (13)$$

— в радиальном направлении;

$$\Delta T = \frac{1}{\cos \alpha_w} \left[ \cos \alpha \left( e_{y,\Gamma} \sin \varphi + e_{ж,\Gamma} \sin \frac{z_{ж}}{z_y} \varphi \right) + e_{y,K} \sin(\varphi + \psi_y) + \sin \alpha \left( e_{y,\Gamma} \cos \varphi + e_{ж,\Gamma} \cos \frac{z_{ж}}{z_y} \varphi \right) + e_{ж,K} \sin\left(\frac{z_{ж}}{z_y} \varphi + \psi_{ж}\right) \right] \quad (14)$$

— в тангенциальном направлении.

Из сопоставления выражений радиальных (9), (13) и тангенциальных (10), (14) перемещений колес при двух- и однопрофильном зацеплениях кинематических волновых передач следует, что в первом случае численные значения указанных перемещений будут меньше, чем во втором. Эти положения подтверждены сравнительными экспериментальными исследованиями точности ВЗП [3, 6, 7]. Меньшую кинематическую погрешность и отсутствие мертвого хода при реверсе ведомого вала показали кинематические волновые передачи двухпрофильного зацепления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Слюдиков М.Н. Надежность и точность механизмов приводов систем управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1984. 351 с.
2. Крайнев А.Ф. Механика машин. Фундаментальный словарь. М.: Машиностроение, 2000. 904 с.
3. Тимофеев Г.А. Проектирование приводов с волновыми зубчатыми передачами для следящих систем // Вестник машиностроения. 2015. № 12. С. 34–39.
4. Тимофеев Г.А. Разработка методов расчета и проектирования волновых зубчатых передач для приводов следящих систем. Дис. ... д-ра техн. наук. М.: ИМАШ РАН, 1997. 352 с.
5. Тайц Б.А. Точность и контроль зубчатых колес. М.: Машиностроение, 1972. 365 с.

6. Костилов Ю.В., Тимофеев Г.А., Фурсяк Ф.И. Кинематическая погрешность и мертвый ход волновых зубчатых передач внешнего деформирования // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 9. С. 52–56.

DOI: 10.18698/0536-1044-2013-8-30-34

7. Тимофеев Г.А. Получение беззазорного волнового зацепления в процессе доработки и селективной сборки // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 6. С. 5–8. DOI: 10.18698/0536-1044-2014-6-5-8

**Тимофеев Геннадий Алексеевич** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Барбашов Николай Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

#### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Тимофеев Г.А., Барбашов Н.Н. Анализ действующих ошибок двухпрофильного волнового зацепления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 1. С. 41–47. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-41-47

## **ANALYSIS OF EXISTING ERRORS IN DOUBLE-FLANK WAVE ENGAGEMENT**

G.A. Timofeev

timga@bmstu.ru

N.N. Barbashov

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

### **Abstract**

The wave gears are widely used both in mechanical engineering, and in instrument making. Their production is established in many countries and especially in the USA, Japan and Germany. Now they are being developed in the Russian Federation as well. Of vital importance for wave gear application in non-power (kinematic) drive is estimating the errors caused by eccentricities of gear and backlash arising due to the presence of gaps between the contacting tooth profiles of flexible and rigid gears. We examine the effect the errors in flexible and rigid gear manufacture have on their tangential and radial displacement in the double-flank wave engagement. Findings of the research show that the double-flank wave engagement provides higher parameters of kinematic accuracy as compared to a single-tooth wave contact

### **Keywords**

*Wave gears, kinematic error, backlash, double-flank wave engagement, flexible and rigid gears*

## REFERENCES

- [1] Slyudikov M.N. Nadezhnost' i tochnost' mekhanizmov privodov sistem upravleniya letatel'nymi apparatami [Reliability and accuracy of aircraft control system drive mechanism]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 351 p.
- [2] Kraynev A.F. Mekhanika mashin [Machinery mechanics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2000. 904 p.
- [3] Timofeev G.A. Design of drives with harmonic gears for servo-systems. *Vestnik mashinostroeniya*, 2015, no. 12, pp. 34–39 (in Russ.).
- [4] Timofeev G.A. Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya volnovykh zubchatykh peredach dlya privodov sledyashchikh sistem. Diss. dokt. tekhn. nauk [Wave gears calculation method and design development for follow system drive. Dr. tech. sci. diss.]. Moscow, IMASH RAN Publ., 1997. 352 p.
- [5] Tayts B.A. Tochnost' i kontrol' zubchatykh koles [Accuracy and control of tooth-wheels]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972. 365 p.
- [6] Kostikov Yu.V., Timofeev G.A., Fursyak F.I. Kinematic error and backlash in wave gears with external deformation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mashinostr.* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 9, pp. 52–56 (in Russ.).  
DOI: 10.18698/0536-1044-2013-8-30-34
- [7] Timofeev G.A. Backlash-free teeth engagement in the development and selective assembly of wave gears. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mashinostr.* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2014, no. 6, pp. 5–8 (in Russ.).  
DOI: 10.18698/0536-1044-2014-6-5-8

**Timofeev G.A.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of Theory of Mechanisms and Machines Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Barbashov N.N.** — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Theory of Mechanisms and Machines Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

### Please cite this article in English as:

Timofeev G.A., Barbashov N.N. Analysis of Existing Errors in Double-Flank Wave Engagement. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 1, pp. 41–47.  
DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-41-47