УДК 621.039.514

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ НОРДГЕЙМА–ФУКСА

Е.Б. Копосов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: evgkoposov@gmail.com

Рассмотрена модель динамики ядерного реактора, описывающая его поведение при подаче положительного возмущения по реактивности, переводящего реактор в надкритическое состояние по мгновенным нейтронам, и представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений — модель Нордгейма-Фукса. Получено аналитическое решение модели, позволяющее определить во времени основные параметры реактора, такие как плотность нейтронов, реактивность, температура. Получено аналитическое выражение для определения времени достижения максимального значения плотности нейтронов. Приведено также приближенное, полученное из физических соображений, соотношение для определения этого параметра. Показано, что погрешность приближенного соотношения для времени достижения максимального значения плотности нейтронов относительно результатов, полученных аналитическим путем, не превышает нескольких процентов. Выполнено сравнение аналитического и приближенного соотношений с результатами, полученными с использованием шестигрупповой модели кинетики ядерного реактора, и показано их хорошее соответствие.

Ключевые слова: ядерный реактор, реактивность, динамика, процесс, расчет, модель.

ANALYTICAL SOLUTION TO THE NORDHEIM–FUCHS MODEL

E.B. Koposov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: evgkoposov@gmail.com

A model of nuclear reactor dynamics is considered which describes its behavior when the positive perturbation in reactivity is produced to transfer the reactor to the prompt supercritical state. The model presents a system of two differential equations, i.e., the Nordheim–Fuchs model. The analytical solution to the model is derived which enables the basic parameters such that neutron density, reactivity, and temperature to be changed with time. The analytical expression is deduced for determination of the time it takes the neutron density to reach its maximal value. An approximate relationship obtained from physical considerations is given for finding this parameter. It is shown that the error of this approximate relationship used to determine the time of achieving the maximal neutron density with respect to results obtained analytically does not exceed several percent. The results from calculations using both analytical and approximate relations are compared with the results obtained by means of six-group model of nuclear reactor kinetics and their good agreement is shown.

Keywords: nuclear reactor, reactivity, dynamics, process, calculation, model.

Известна модель динамики реактора, описывающая поведение реактора при подаче в него положительных возмущений по реактивности, превышающих долю запаздывающих нейтронов и переводящих реактор в надкритическое состояние по мгновенным нейтронам[1] — это так называемая адиабатическая модель, или модель Нордгейма–Фукса.

Модель выводится из общей системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{\rho-\beta}{\ell}n + \sum_i \lambda_i c_i + q; \\ \frac{dc_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{\ell}n - \lambda_i c_i \quad i = 1\ldots 6. \end{aligned} \tag{1}$$

В модели принимается во внимание только генерация мгновенных нейтронов, вклад других источников нейтронов (запаздывающих и источниковых) считается пренебрежимо малым. Другим, упрощающим, положением модели Нордгейма–Фукса является адиабатичность процесса, т.е. пренебрежение потерями теплоты, отводимыми от активной зоны за время, описываемое моделью.

С указанными упрощениями система уравнений, описывающих поведение реактора, согласно модели Нордгейма–Фукса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{\rho-\beta}{\ell}n; \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\alpha K n. \end{aligned} \tag{2}$$

При рассмотрении модели Нордгейма–Фукса для определения постоянной интегрирования из начальных условий принимают, что плотность нейтронов в начальный момент времени пренебрежимо мала[1], т.е. $n_0 = 0$, что не приводит к заметным погрешностям даже при возмущениях, не слишком превышающих β. Тогда уравнение фазовой траектории принимает вид

$$n = \frac{1}{2\alpha K\ell}\left[(\rho_0-\beta)^2 - (\rho-\beta)^2\right], \tag{3}$$

позволяющий, в частности, определить максимальное значение плотности нейтронов в импульсе:

$$n_{\max} = \frac{(\rho_0-\beta)^2}{2\alpha K\ell}. \tag{4}$$

Эта формула дает результаты, мало отличающиеся от результатов расчета по шестигрупповой модели кинетики (1) с учетом уравнения, описывающего адиабатическую обратную связь (второе уравнение системы (2)). Относительная погрешность расчета $n_{\max}$ снижается с увеличением возмущения ρ_0 (рис. 1), рассчитанного для $\ell = 10^{-4}$ с и $\alpha K = 0{,}0025$. При этом числовые значения погрешности при варьировании указанных параметров даже на порядки значений изменяются очень незначительно.

---

[1] *Хетрик* Д. Динамика ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.

Характерно, что значение максимальной плотности нейтронов не зависит от начального уровня плотности нейтронов n_0, что неудивительно, поскольку при выводе формулы (4) принималось $n_0 = 0$. Это же упрощение принципиально не позволяет оценить время достижения максимального значения плотности нейтронов после подачи реактивностного возмущения, которое (время) заметно изменяется в зависимости от начальной плотности нейтронов n_0. Представленные на рис. 2 графики $n(t)$ для $\rho = 2\beta$ при разных значениях n_0 для модели Нордгейма–Фукса и шестигрупповой модели кинетики с обратной связью показывают наличие этой зависимости, причем время максимума у обеих моделей с одинаковым значением начальной плотности нейтронов n_0 отличаются незначительно.

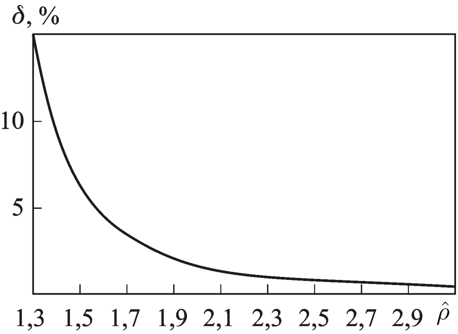


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности расчета максимальной плотности нейтронов от возмущения $\hat{\rho} = \rho_0/\beta$

Простое выражение, хотя и приближенное, для времени, при котором реализуется максимум плотности нейтронного потока, можно получить из физических соображений, разделяя процесс нарастания n на две составляющие.

Первая часть процесса — это рост плотности нейтронов, когда она еще мала, влияние обратной связи по температуре незначительно и им можно пренебречь. Для этого участка справедливо соотношение

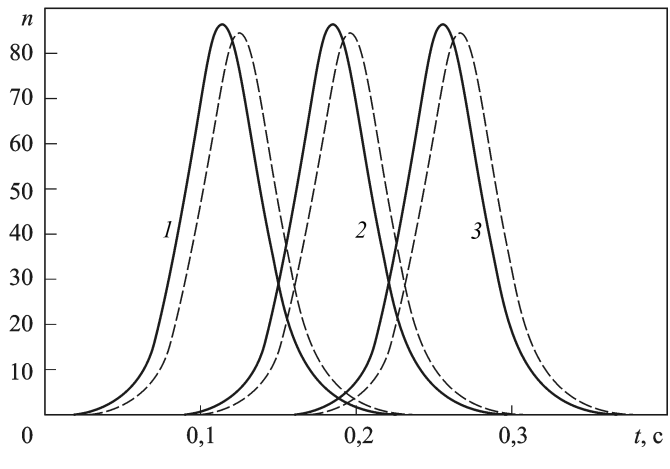


Рис. 2. Изменение плотности нейтронов при различных значениях начального уровня n_0:

1 — $n_0 = 0{,}1$; *2* — $n_0 = 0{,}001$; *3* — $n_0 = 0{,}00001$. Сплошные линии — шестигрупповые модели, штриховые — модели Нордгейма–Фукса элементарного уравнения кинетики

$$\frac{n}{n_0} = \exp(\omega t),$$

где $\omega = \dfrac{\rho_0 - \beta}{\ell}$ — обратный начальный период.

Если в качестве конечного значения плотности нейтронов принять $n_{\max} = \dfrac{\ell\omega^2}{2\alpha K}$, то длительность первого участка может быть оценена как

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \ln \frac{\ell\omega^2}{2\alpha K n_0}.$$

Длительность второго участка, где действие обратной связи существенно, оценивается как половина ширины быстрого импульса[1], которая для модели Нордгейма–Фукса будет равна

$$t_2 = \frac{3{,}5}{2\omega}.$$

Таким образом, время достижения максимума плотности нейтронного потока n может быть оценено как сумма длительности этих участков:

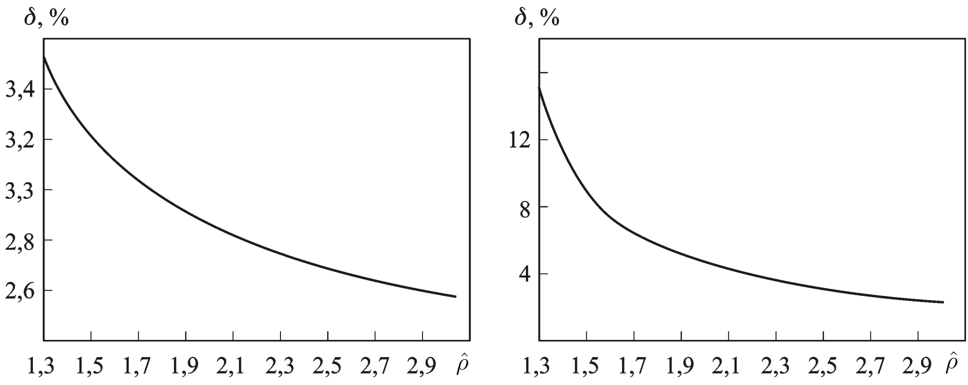
$$t_m = t_1 + t_2 = \frac{1}{\omega}\left(1{,}75 + \ln \frac{\ell\omega^2}{2\alpha K n_0}\right). \tag{5}$$

Несмотря на упрощенное представление (в первую очередь заведомое завышение оценки длительности первого участка), относительная погрешность полученного упрощенного выражения не превышает нескольких процентов в сравнении с точным значением в широком диапазоне изменения параметров.

Относительная погрешность определения времени достижения максимума плотности нейтронного потока по формуле (5) относительно времени максимума для модели Нордгейма–Фукса (2) в зависимости от относительного возмущения по реактивности представлена на рис. 3, *а*. Видно, что она невелика даже для малых значений возмущений.

Эта оценка действительно дает завышенные значения по сравнению с результатами модели Нордгейма–Фукса, в то время как сама эта модель также несколько завышает значения времени максимума сравнительно с решением по шестигрупповой модели. График (аналогичный предыдущему) относительной погрешности определения времени максимума по модели Нордгейма–Фукса относительно времени максимума по шестигрупповой модели приведен на рис. 3, *б*.

Более корректное значение времени достижения максимума плотности нейтронного потока может быть найдено из теоретического решения уравнения модели Нордгейма–Фукса. Аналитическое решение,



а *б*

Рис. 3. Относительная погрешность определения времени достижения максимума плотности нейтронов t_m по формуле (5) в сравнении с моделью Нордгейма–Фукса (*а*) и n по модели Нордгейма–Фукса в сравнении с шестигрупповой моделью

приведенное в работе[1], избыточно упрощено и не позволяет это реализовать.

Интегрируя уравнение, полученное из модели (2) путем исключения времени t,

$$\frac{dn}{d\rho} = -\frac{\rho - \beta}{\alpha K \ell},$$

определяем

$$n = A - \frac{(\rho - \beta)^2}{2\alpha K \ell}.$$

Вычислив постоянную интегрирования A из начальных условий ($t = 0$; $\rho = \rho_0$; $n = n_0$), запишем выражение для $n(\rho)$:

$$n = \frac{1}{2\alpha K \ell}\left[2\alpha K \ell n_0 + (\rho_0 - \beta)^2 - (\rho - \beta)^2\right].$$

Из первого уравнения модели Нордгейма–Фукса (2) выделим выражение для реактивности

$$\rho = \beta + \frac{\ell}{n}\frac{dn}{dt}$$

и подставим его в выражение для плотности нейтронного потока:

$$n = \frac{1}{2\alpha K \ell}\left[2\alpha K \ell n_0 + (\rho_0 - \beta)^2 - \frac{\ell^2}{n^2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right]. \qquad (6)$$

Обозначив $2\alpha K \ell = a$;

$$2\alpha K \ell n_0 + (\rho_0 - \beta)^2 = b;$$

$$\ell^2 = c; \quad \sqrt{\frac{b}{c}} = \gamma, \qquad (7)$$

запишем (6) в виде уравнения

$$an = b - \frac{c}{n^2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2,$$

решением которого будет

$$n = -\frac{4b}{a}\frac{\exp(\gamma t)\cdot Y}{\left(1-\exp(\gamma t)\cdot Y\right)^2}, \tag{8}$$

где константа интегрирования

$$Y = 1 - \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b-an_0}+\sqrt{b}}. \tag{9}$$

Максимум функции $n(t)$ наблюдается при $dn/dt = 0$. Из этого условия находят время t_m, при котором реализуется максимальное значение плотности нейтронного потока $n_{\max}$:

$$t_m = -\frac{1}{\gamma}\ln(-Y). \tag{10}$$

Подставив значения параметров γ (7) и Y (9), получим

$$t_m = -\frac{\ell}{\sqrt{2\alpha K\ell n_0 + (\rho_0-\beta)^2}}\times$$
$$\times\ln\left(\frac{2\sqrt{2\alpha K\ell n_0+(\rho_0-\beta)^2}}{\rho_0-\beta+\sqrt{2\alpha K\ell n_0+(\rho_0-\beta)^2}}-1\right). \tag{11}$$

Поскольку систему дифференциальных уравнений решали без каких бы то ни было дополнительных упрощающих положений, то зависимость $n(t)$, рассчитанная по формуле (8), и значение времени максимума плотности нейтронного потока, рассчитанное по формуле (10) (или (11)), полностью совпадает с результатами численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих модель Нордгейма–Фукса (2), для которой значение n_0 как начального условия необходимо. Естественно и абсолютное соответствие значений максимума плотности нейтронного потока.

Полученное аналитическое решение $n(t)$ (8) позволяет найти и аналитические зависимости изменения и отклонения температуры от начального значения T и реактивности ρ.

Действительно, при адиабатической модели $\dfrac{dT}{dt} = Kn$, откуда $T = K\displaystyle\int ndt.$

Вводя обозначение $q = -\dfrac{4b}{a}Y$, получаем выражение для интеграла $\displaystyle\int ndt$ в виде

$$\int ndt = \frac{q}{\gamma Y}\frac{1}{1-\exp(\gamma t)\cdot Y} + C_1.$$

Тогда

$$T = \frac{Kq}{\gamma Y}\frac{1}{1-\exp(\gamma t)\cdot Y} + C_2.$$

При $t = 0$ и $T = 0$ $\quad C_2 = -\dfrac{Kq}{\gamma Y}\dfrac{1}{1-Y}$ и значение изменения температуры T будет

$$T = \frac{Kq}{\gamma Y}\left[\frac{1}{1-\exp(\gamma t)\cdot Y} - \frac{1}{1-Y}\right]. \qquad (12)$$

Текущее значение реактивности определяется как

$$\rho = \rho_0 - \alpha T$$

и тогда

$$\rho = \rho_0 - \frac{\alpha Kq}{\gamma Y}\left[\frac{1}{1-\exp(\gamma t)\cdot Y} - \frac{1}{1-Y}\right]. \qquad (13)$$

На рис. 4 приведены рассчитанные по формулам (12) и (13) зависимости. Следует еще раз подчеркнуть их полную идентичность численным решениям модели Нордгейма–Фукса (2). При этом значения T и ρ по окончании быстрого импульса полностью соответствуют значениям, получаемым из модели Нордгейма-Фукса:

$$T = 2\frac{\rho_0 - \beta}{\alpha} \;\text{ и }\; \rho = 2\beta - \rho_0.$$

Естественно, что полученные аналитические решения справедливы только во время быстрого импульса и неприменимы, как и сама

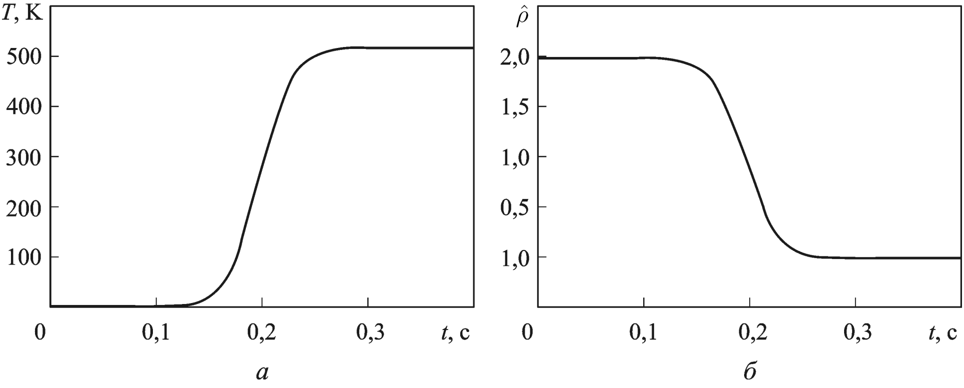


Рис. 4. Изменение отклонения температуры (*а*) и реактивности (*б*) в быстром импульсе при $\hat{\rho}_0 = 2\beta$

модель Нордгейма–Фукса, после его окончания, когда процесс определяется уже запаздывающими нейтронами.

Статья поступила в редакцию 02.07.2012

Евгений Борисович Копосов — канд. техн. наук, доцент кафедры “Ядерные реакторы и установки” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 55 научных работ в области гидродинамики, теплофизических процессов, моделирования и управления ядерных энергетических установок.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

E.B. Koposov — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Nuclear Reactors and Plants” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 55 publications in the field of hydrodynamics, thermophysical processes, simulation and control of nuclear power plants.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.