

## МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ КОНТАКТНЫМ НАГРУЗКАМ

**Е.М. Третьяков**

ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва

e-mail: tretyakov\_m58@mail.ru

*Рассмотрены существующие методы расчета контактной прочности твердых тел и дана их сравнительная оценка. Подробно описана новая, рекомендуемая методика расчета контактной прочности твердых тел по предельным контактным нагрузкам. Помимо существенного упрощения и значительного повышения точности расчета, этот метод расчета впервые позволяет количественно определять влияние поверхностного упрочнения твердых тел на их контактную прочность. Приведены примеры типовых расчетов контактной прочности как для пластически однородных твердых тел, так и для неоднородных контактирующих тел с поверхностным упрочненным слоем.*

**Ключевые слова:** механика, твердое тело, упругость, пластичность, плоская деформация, поверхностный слой, упрочнение, предельные напряжения, контактная прочность.

## TECHNIQUE FOR CALCULATION OF A SOLID BODY FOR CONTACT STRENGTH USING ULTIMATE LOADS

**Ye.M. Tretyakov**

Blagonravov Institute for Machine Science, Russian Academy of Sciences, Moscow

e-mail: tretyakov\_m58@mail.ru

*The existing methods for calculation of contact strength of solid bodies are discussed, and their comparative estimation is given. A new recommended technique for contact strength calculation for solids using ultimate contact loads is described in detail. In addition to the substantial simplification and the significant improvement of calculation precision, this method for calculation makes it possible for the first time to quantitatively determine the influence of the surface reinforcement of solid bodies on their contact strength. Examples of typical calculations of contact strength are presented for both plastically homogeneous solids and inhomogeneous contacting bodies with the surface reinforced layer.*

**Keywords:** mechanics, solid body, elasticity, plasticity, planar strain, surface layer, reinforcement, ultimate stresses, contact strength.

Выполнение условий контактной прочности для нагруженных узлов и деталей безусловно необходимо для безопасной работы любой машины. В связи с этим для проектируемых и вновь создаваемых машин и машинных комплексов первоочередное значение имеет разработка и применение достаточно точных методов расчета контактной прочности их деталей и узлов. Отметим следующие три основных современных метода расчета контактной прочности машиностроительных деталей и узлов.

**1. Эмпирические методы расчета контактной прочности.** В эмпирических методах расчета контактной прочности твердых тел проч-

ностные свойства тел часто задаются значениями их пределов прочности  $\sigma_b$  [1]. В этом случае значения предельных контактных напряжений находят умножением значений  $\sigma_b$  на ряд эмпирически определенных коэффициентов, отражающих влияние формы контактирующих деталей и различные условия работы рассматриваемых машин. Эмпирические методы применяются иногда при расчете контактной прочности деталей машин [1]. Однако, как известно, значения пределов прочности  $\sigma_b$  определяются моментом потери устойчивости процесса одноосного растяжения образца и не связаны непосредственно с прочностью рассматриваемых сочленений. Вследствие этого эмпирические методы расчета контактной прочности не имеют достаточно надежного научного обоснования.

**2. Стандартный расчетный метод для упругих тел.** Вторым методом расчета контактной прочности твердых тел опирается на решения упругих задач, в частности контактных задач теории упругости [1–3]. Основная трудность в этом методе расчета связана с определением фактического значения предельной контактной нагрузки, которую приходится определять из чисто упругого решения для упругодеформируемого тела.

Из решений контактных задач теории упругости, в частности из теории контакта упругих тел Герца, известно, что наиболее опасная точка находится внутри упругодеформируемого тела на некотором удалении от контактной поверхности. Таким образом, эта наиболее опасная нагруженная точка находится внутри области упругодеформируемого материала, а деформации в ней и при  $\tau_{\max} = k$  остаются упругими, хотя и предельными по значению. Такие точки в рассматриваемом деформируемом теле называются предельными упругими точками. Контактующее тело при этом остается еще упругим, не изменяет своей геометрии и способно выдержать большую нагрузку. Таким образом, предельная контактная нагрузка во втором методе упругого расчета заведомо занижена по сравнению с ее фактическим значением.

Дальнейшее увеличение деформирующей контактной нагрузки вызовет сначала появление других упругих предельных точек, занимающих некоторую область внутри рассматриваемого деформируемого тела. Эта область находится внутри упругой обоймы, т.е. внутри области чисто упругодеформированных точек. При этом контактирующее тело еще не изменяет своей геометрии, продолжая находиться в упругом состоянии.

Дальнейшее увеличение деформирующей контактной нагрузки вызовет выход области предельных упругих точек на свободную поверхность тела и связанное с этим быстрое нарастание пластических деформаций и изменение геометрии контактирующего тела. Для рассма-

триваемого контакта твердых тел такая нагрузка называется предельной контактной нагрузкой.

В стандартном методе расчета контактной прочности твердых тел предельная контактная нагрузка определяется, как указывалось ранее, по моменту, когда интенсивность напряжений в одной, наиболее опасной, внутренней точке упругодеформируемого тела достигает значения предела текучести его материала на сдвиг  $k$ .

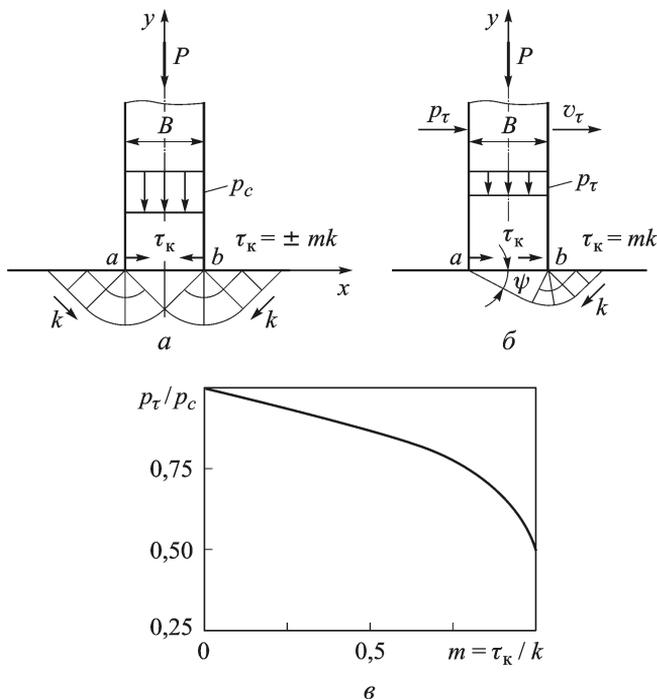
Напомним, что значение пластической постоянной  $k$  в условии пластичности Губера–Мизеса определяется как  $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ , а в условии пластичности Треска–Сен-Венана — как  $k = \sigma_s/2$ , где  $\sigma_s$  — предел текучести деформируемого тела.

Из изложенного следует, что опасная точка и прилегающая к ней область предельных упругих точек находятся внутри обоймы упругодеформируемого материала и деформации в них остаются пока еще упругими. Дальнейшее нарастание деформирующей нагрузки вызывает выход указанной области на свободную поверхность контактирующего тела, появление в нем существенных пластических деформаций, сопровождаемое изменением геометрических размеров контактирующего тела. Указанный момент выхода пластической области на свободную поверхность контактирующего тела определяет, как указывалось ранее, значение предельной контактной нагрузки в рассматриваемом случае.

Значение предельной нагрузки в стандартном упругом методе, определяемое по одной опасной упругой точке, всегда меньше ее действительного значения, отвечающего значению предельной контактной нагрузки, вызывающей начало необратимого изменения формы контактирующей детали.

**3. Предлагаемый метод расчета контактной прочности по предельным контактными нагрузкам.** В этом методе расчета контактной прочности проблема заключается в определении значения и формы контактной области (решение упругой задачи) и достаточно точном определении предельных контактных нагрузок для рассматриваемой задачи (решение пластической задачи) В предлагаемом, третьем методе расчета контактной прочности твердых тел используются решения теории пластичности, полученные для жесткой идеально пластичной модели деформируемого материала [4, 5]. Деформируемое тело рассматривается, как обычно, или как полуплоскость, или как полупространство.

*Контактирующие деформируемые тела являются пластически однородными. Предельные контактные напряжения для пластически однородных твердых тел с плоской площадкой контакта.* В случае пластической однородности контактирующих твердых тел основным



**Рис. 1.** Влияние контактного трения  $\tau_k$  на предельные нормальные напряжения:

*a* — поле линий скольжений классического решения Прандтля; *б* — поле линий скольжений при однонаправленных контактных касательных напряжениях  $\tau_k$ ; *в* — график зависимости предельных нормальных напряжений  $p_\tau/p_c$  от  $m = \tau_k/k$

(базовым) результатом для расчета их контактной прочности служит классическое решение Прандтля (рис. 1, *a*). Предельные контактные давления  $p_c^* = p_c$  в решении Прандтля определяются по формуле

$$p_c = 2k(1 + \pi/2) = 2,571 \cdot 2k. \quad (1)$$

Формула Прандтля (1) определяет значение предельного контактного давления  $p_c^* = p_c$  при вдавливании плоского пуансона в однородную идеально пластическую полуплоскость с  $\tau_{\max} = k = \text{const}$ . Решение Прандтля — это одно из наиболее востребованных решений теории пластичности, и оно многократно проверялось экспериментально.

В работе [5] рассмотрен вопрос об определении нормальных предельных контактных напряжений  $p_c^*$  для контактирующих твердых тел различной начальной формы. Показано, что при вдавливании в идеальное жесткопластическое полупространство цилиндрического пуансона с плоской подошвой и произвольной выпуклой односвязной формой контура в плане, предельные контактные напряжения  $p_c^*$  изменяются в интервале [4]:

$$0,866p_c < p_c^* \leq p_c, \quad (2)$$

где предельное напряжение  $p_c$  определяется по формуле Прандтля (1). Нижняя граница предельного контактного давления  $p_c^* = 0,866p_c$  отвечает осесимметричному вдавливанию круглого цилиндрического пуансона с плоским основанием в упругое полупространство [4].

С учетом формулы (1), диапазон изменения предельных контактных давлений  $p_c^*$  можно выразить через пластическую постоянную  $k$  деформируемого материала

$$2,226 \cdot 2k < p_c^* \leq 2,571 \cdot 2k, \quad (3)$$

или поскольку  $k = \sigma_s / \sqrt{3}$ , — через предел текучести  $\sigma_s$  контактирующего тела

$$2,571\sigma_s < p_c^* \leq 2,97\sigma_s. \quad (3a)$$

Таким образом, для деформируемого полупространства и плоских инденторов разной формы в плане значение предельного контактного давления  $p_c^*$  изменяется в узком диапазоне, отвечающем формулам (3), (3a), и составляющем всего 13,4% верхнего значения  $p_c^* = p_c$ . Следует отметить, что диапазон (3), (3a) может быть только шире действительного, поскольку верхняя граница этого диапазона, отвечающая решению Прандтля (1), является точной, тогда как нижняя граница, отвечающая осесимметричному вдавливанию круглого цилиндрического пуансона с плоским основанием, представляет собой лишь гарантированную нижнюю оценку ее фактического значения [4].

Формула (1) Прандтля отвечает началу пластического деформирования полуплоскости при плоской форме контакта. При значительном вдавливании пуансона в полуплоскость, геометрия контакта существенно искажается, и максимальное предельное контактное давление  $(p_c^*)_{\max}$  может достигнуть значения  $(p_c^*)_{\max} = 2k(1 + \pi) = 4,142 \times \times 2k = 4,784\sigma_s$ , отвечающего процессу обратного выдавливания [6].

*Условие контактной прочности твердых тел.* Условие контактной прочности твердых тел записывается в виде

$$p'_k < p_c^*, \quad (4)$$

т.е. действующие нормальные контактные напряжения  $p'_k$ , должны быть меньше предельных контактных напряжений  $p_c^*$ . При равенстве  $p'_c = p_c^*$  пластическая область выходит из зоны контакта рассматриваемых тел на свободную поверхность тела, что сопровождается быстрым нарастанием пластических деформаций и изменением геометрии контактирующих тел. Вследствие нарушения условий контактной прочности возникает аварийная ситуация.

Как следует из формулы (2), предельные контактные напряжения  $p_c^*$  зависят от формы контактной площадки. Нижняя граница  $p_{c \min}^* = 0,866p_c$  отвечает осесимметричному вдавливанию круглого

цилиндрического пуансона, т.е. границе контактной области в виде окружности. Верхняя граница  $p_{c\max}^* = p_c$  соответствует плоской деформации контактирующего тела, т.е. контактной области в виде достаточно узкой и длинной прямоугольной полоски. При выводе формулы (2) принималось, что границей контактной площадки служит выпуклая гладкая кривая [4].

*Влияние различных параметров процесса контактного деформирования твердых тел на величины предельных контактных напряжений  $p_c^*$  [4, 5, 7, 8].* Условие (5) показывает, что для расчета контактной прочности твердых тел первостепенное значение имеет достаточно точное определение значения  $p_c^*$ . При выводе базовых соотношений (2) для определения значений  $p_c^*$  рассматривался процесс вдавливания различной формы цилиндрических пуансонов с плоской подошвой в упругую полуплоскость или упругое полупространство.

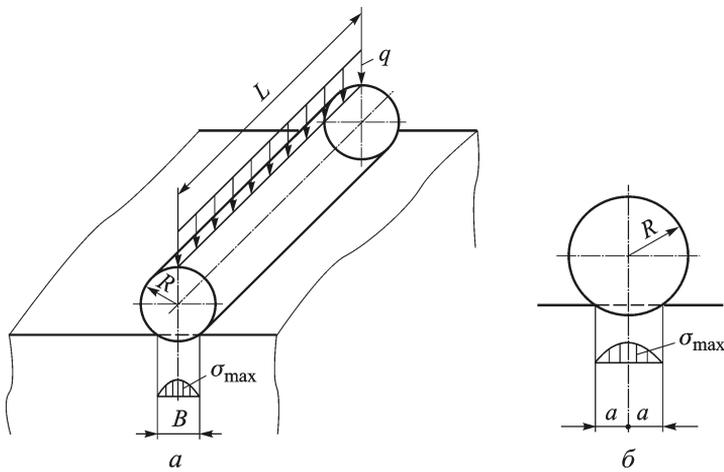
В работах [4, 5, 7, 8] исследовано влияние формы контактирующих твердых тел, относительных размеров контактных площадок (в сравнении с размерами самого контактирующего тела) и контактного трения  $\tau_k$  на предельные контактные напряжения  $p_c^*$ . Результаты работ [4, 5] доказали достаточно слабое влияние кривизны самой контактной поверхности на предельные напряжения  $p_c^*$ . Значительно большее влияние на величину  $p_c^*$  оказывает кривизна свободных поверхностей, прилегающих к контактной. Реализуется простое правило: значение  $p_c^*$  уменьшается с ростом выпуклости контактирующего тела и возрастает при увеличении его вогнутости. Это связано соответственно с уменьшением или увеличением угла поворота характеристик, выходящих на свободную поверхность тела [5].

В работах [4, 5] приведены формулы, позволяющие оценить влияние кривизны свободных поверхностей и формы контактирующих тел на предельные контактные напряжения  $p_c^*$ . Например, при вдавливании шарика имеет место осесимметричная деформация, при которой значения  $p_c^*$  отвечают нижней границе интервалов (2), (3). При определении значения  $p_c^*$  для шарика следует дополнительно учесть влияние выпуклости его поверхности на уменьшение для него предельных контактных напряжений. В итоге значение  $p_c^*$  для шарика вычисляется по формуле [4, 5]

$$p_c^* = \sigma_s(2,571 - B/R) = \sigma_s(2,571 - 2a/R), \quad (5)$$

где  $B = 2a$  — линейный размер контакта, а  $a$  — радиус контактной области [5] (рис. 2, б).

В работах [5, 7, 8] рассмотрены вопросы, связанные с влиянием формы контактирующих тел, относительного размера контакта и контактного трения на величины  $p_c^*$  однородных твердых тел. Результаты



**Рис. 2. Контакт упругих тел:**

*a* — вдавливание круглого упругого цилиндра в упругую полуплоскость (плоская деформация); *б* — вдавливание упругого шарика в упругое полупространство (осесимметричная деформация)

указанных работ позволяют внести желаемые коррективы в значения  $p_c^*$ , определяемые из неравенств (2), (3).

*Влияние контактных сил трения  $\tau_k$  на значения предельных контактных напряжений  $p_c^*$ .* В работе [8] рассмотрен вопрос о влиянии контактных сил трения  $\tau_k$  на значение  $p_c^*$ . Проведенное исследование привело к весьма важному в практическом отношении результату. Оказалось, что при деформации полупространства (или полуплоскости) наличие взаимоуравновешенных в пределах контактной области касательных контактных напряжений  $\tau_k$ , главный вектор которых равен нулю, не оказывает влияния на предельные контактные давления  $p_c^*$ . Это связано с наличием жесткой области в приконтактной зоне. Так, в частности, обстоит дело при определении твердости материалов по Виккерсу (HV) или Бринеллю (HB), когда, как известно, твердость практически не зависит от наличия смазочного материала на поверхности испытуемой детали или от шероховатости самого внедряемого индентора.

Наличие неуравновешенной эпюры  $\tau_k$  на контактной площадке, приводит к дополнительным сдвигам на контактных поверхностях, т.е. дополнительному вводу энергии формоизменения в контактирующее тело. В работе [2] рассматривается случай, когда контактные касательные напряжения, направленные в одну сторону, постоянны по значению и равны:  $\tau_k = mk = \mu \cdot 2k$ , где  $0 \leq m = 2\mu \leq 1$  (рис. 1, б). При наличии неуравновешенной эпюры  $\tau_k$  предельные контактные напряжения  $p_\tau$  вычисляются по формуле [8]

$$p_\tau = k[1 + \pi/2 + \arccos m + \sin(\arccos m)]. \quad (6)$$

При максимальных однонаправленных силах контактного трения  $\tau_k = k$ ,  $m = 1$  и из формулы (6) получаем  $p_\tau = k(1 + \pi/2) = (1/2)p_c$ , т.е. предельные контактные давления в 2 раза меньше, чем в решении Прандтля (1).

Из формул (1) и (6) определяем зависимость отношения  $p_\tau/p_c$  от контактных сил трения, определяемых значениями параметра  $m$ :

$$p_c/p_\tau = (1/2)[1 + \pi/2 + \arccos m + \sin(\arccos m)](1 + \pi/2)^{-1}. \quad (7)$$

На рис. 1, в показан график зависимости отношений  $p_\tau/p_c$  от параметра  $m$ , отвечающий формуле (7), численные значения которого приведены в табл. 1. Для пластически однородных твердых тел диапазон изменения отношения  $p_\tau/p_c$  в формуле (7) составляет  $1 \geq p_\tau/p_c \geq 0,5$  при  $0 \leq \tau_k \leq k$  соответственно.

Таблица 1

**Влияние однонаправленных контактных касательных сил трения  $\tau_k$  на нормальные предельные напряжения  $p_\tau$**

$m = \tau_k/k$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$p_\tau/p_c$	1,0	0,980	0,957	0,932	0,904	0,872	0,836
$m = \tau_k/k$	0,7	0,8	0,85	0,90	0,95	0,975	1,0
$p_\tau/p_c$	0,794	0,742	0,710	0,672	0,622	0,587	0,5

Основной результат проведенных исследований состоит в том, что для пластически однородных твердых тел различной начальной гладкой формы базовые значения предельных контактных давлений лежат внутри узкого диапазона, определяемого неравенствами (2), (3). Влияние кривизны свободной поверхности, примыкающей к контактной области, учитывается изменением границ интервалов (2), (3) [4, 5].

*Сравнение предельных значений  $p_c^*$ , определяемых по второму стандартному методу упругого расчета и по методу предельных контактных напряжений  $p_c^*$ .* Обратимся к рассмотрению принципиально важного вопроса о количественном соотношении значений предельных контактных напряжений  $p_c^*$ , определяемых во втором методе расчета контактной прочности, т.е. на основе чисто упругих решений, и в третьем, новом предлагаемом методе расчета по предельным контактным нагрузкам  $p_c^*$ .

При контакте двух упругих тел задача, аналогичная плоскому решению Прандтля, получается при вдавливании длинного кругового цилиндра в упругое полупространство (см. рис. 2, а). Рассмотрим силовой контакт указанных упругих тел. Первое тело — круговой цилиндр радиусом  $R$  и длиной  $L$  ( $L \geq R$ ), второе тело — упругое полупространство. При равенстве модулей упругости  $E_1 = E_2 = E$  у обоих

тел из теории Герца упругого контакта твердых тел получаем следующую формулу для определения ширины  $B$  прямоугольной площадки контакта длиной  $L$  [3]:

$$B = 2,15\sqrt{2qR/E};$$

здесь  $q = P/L$  — погонная нагрузка;  $P$  — сила вдавливания цилиндра. В рассматриваемой задаче реализуется, как и в решении Прандтля, случай плоской деформации.

В этой упругой задаче наибольшее контактное напряжение  $\sigma_{\max}$  действует в точках оси симметрии контактной площадки (см. рис. 2, а) и оно определяется по формуле  $\sigma_{\max} = 1,27q/B = 1,27p'_c$ , где  $p'_c = P/BL$  — среднее контактное давление в рассматриваемой задаче [3].

Как известно, предельная упругая точка (наиболее опасная точка при первом нагружении) находится на вертикальной оси на глубине, равной  $0,4B$ . Максимальное касательное напряжение в этой точке численно равно [3]  $\tau_{\max} = 0,3\sigma_{\max} = 0,381p'_c$ . Приравняв  $\tau_{\max} = k$ , что отвечает моменту появления в деформируемом теле предельной упругой точки, получаем в рассматриваемой задаче значение предельной контактной нагрузки  $p_{cu}$ , для второй теории контактной прочности  $p_{cu} = k/0,381 = 2,62k$ .

При расчете контактной прочности по предельным нагрузкам в аналогичном случае величина  $p_c^*$  равна  $p_c$ . Подставив значения предельных контактных нагрузок  $p_{cu} = 2,62k$  и  $p_c^* = 2,571 \cdot 2k$ , находим следующее значение их отношения:  $p_c^*/p_{cu} = 2,571 \cdot 2/2,62 = 1,963$  или  $p_{cu}^*/p_c^* = 0,509$ , т.е. предельное контактное напряжение в третьем методе расчета контактной прочности, оказывается, в рассматриваемом случае почти в 2 раза больше, чем во втором методе, опирающемся на чисто упругие решения. Это явилось следствием того, что во втором упругом методе расчета контактной прочности используются заведомо заниженные значения предельных нагрузок  $p_{cu}^*$ .

Помимо существенного повышения точности метод расчета контактной прочности по предельным нагрузкам позволяет, как увидим далее, количественно оценить влияние поверхностного упрочнения деталей и узлов машин на их контактную прочность, что принципиально невозможно сделать, оставаясь в рамках чисто упругих решений.

*Методы применения полученных результатов для расчета контактной прочности пластически однородных твердых тел.* Решения контактных задач теории упругости позволяют при заданной силе вдавливания определить размеры и форму контакта для упругих тел различной начальной формы. Требуется дать достаточно точный ответ на

основной вопрос: выдержат ли контактирующие тела заданную внешнюю нагрузку, оставаясь в упругом состоянии, или она вызовет хотя бы в одном из них пластическую деформацию, т.е. необратимые изменения размеров и формы. Другим практически важным вопросом является определение фактического коэффициента запаса прочности. Именно на эти вопросы, имеющие кардинальное значение для расчета контактной прочности твердых тел, позволяющие дать ответы значения предельных напряжений  $p_c^*$ . Для определения предельного контактного давления  $p_c^*$  требуется найти размеры и форму контактной площадки, что можно выполнить в предположении упругого контакта. Таким образом, при известном значении  $p_c^*$  сложный расчет на контактную прочность твердых тел сводится к относительно более простой чисто упругой контактной задаче.

Предельная сила деформирования  $P_p$  вычисляется по формуле:  $P_p = p_c^* F$ , где  $F$  — площадь контактной площадки. Полученное значение  $P_p$  надо сравнить с заданным значением внешней силы  $P$  деформирования тел, которому отвечает контактная площадка. Если заданная сила  $P < P_p$  для обоих контактирующих тел, то оба тела находятся в упругом состоянии. Если это неравенство нарушается хотя бы для одного из контактирующих тел, то это тело не может выдержать приложенную к нему нагрузку, находясь в упругом состоянии, и оно будет подвергаться пластической деформации. Отношение  $\zeta = P_p/P$  определяет коэффициент запаса контактной прочности  $\zeta$ .

Расчет контактной прочности и значений коэффициентов запаса прочности можно вести и с использованием величин только нормальных контактных напряжений. Для этого по значению приложенной нагрузки  $P$  и отвечающей ей площади упругого контакта  $F$  следует определить среднее контактное давление  $p'_c = P/F$ . Полученное значение  $p'_c$  следует сравнить с предельными значениями контактных давлений  $p_c^*$ . Если  $p'_c < p_c^*$  или выполняется неравенство  $p'_c < 2,226 \times \times 2k$ , то рассматриваемое тело находится в упругом состоянии. Если  $p'_c \geq 2,571 \cdot 2k$ , то тело подвергается пластическим деформациям. Если, наконец, найденное значение  $p'_c$  попадает внутрь интервала (3), т.е. если  $2,226 \cdot 2k < p'_c < 2,571 \cdot 2k$ , то контактирующее тело или находится в опасной близости к фактическому значению предельной контактной нагрузки, или достигает его, подвергаясь пластическим деформациям. В этом случае определение фактического положения дел требует проведения специального уточненного исследования. Для определения допустимых значений нормальных контактных напряжений можно использовать нижние границы интервалов (2), (3).

*Типовые примеры расчета пластически однородных твердых тел на контактную прочность.*

**Пример 1а.** В плоскую заготовку больших размеров из ненаклепанной (отожженной) стали 45 вдавливаются пуансон с плоским прямоугольным основанием размерами  $B = 2$  мм и  $L = 20$  мм. Сила вдавливания  $P = 3200$  кГ.

Требуется определить: останется ли при такой нагрузке заготовка упругой, или она подвергнется пластическим деформациям? Найти также значение коэффициента контактной прочности  $\zeta$  для деформируемой заготовки.

**Решение.** Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_s = 35$  кГ/мм<sup>2</sup> [8]. Контактная площадь в рассматриваемом случае  $F = BL = 40$  мм<sup>2</sup>. Поскольку  $L/B \gg 1$ , то реализуется случай плоской деформации, когда согласно формуле (4) предельное контактное напряжение  $p_c^* = 2,97\sigma_s = 2,97 \cdot 35 = 103,95$  кГ/мм<sup>2</sup>. Предельная сила деформирования  $P_p = p_c^*F = 103,95 \cdot 40 = 4158$  кГ. В итоге  $P = 3200$  кГ  $<$   $P_p = 4158$  кГ, т.е. приложенная сила вдавливания оказывается меньше ее предельного значения. Это означает, что в рассматриваемом случае деформируемая заготовка остается упругой.

Значение коэффициента контактной прочности  $\zeta = P_p/P = 4158/3200 = 1,3$ , т.е. до начала контактной пластической деформации имеется запас в 30 % приложенной внешней нагрузки.

**Пример 2а.** Для контактной деформации двух упругих тел, подвергаемых сдавливанию силой  $P = 500$  кГ, определены размер и форма контактной площадки. Плоская контактная площадка имеет форму эллипса: малая ось  $B = 1$  мм, большая —  $L = 10$  мм. Материал обоих тел: отожженная сталь 45. Определить: выдержат ли контактирующие тела приложенную к ним внешнюю нагрузку, оставаясь в упругом состоянии? Найти значение коэффициента контактной прочности  $\zeta$ .

**Решение.** Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_s = 35$  кГ/мм<sup>2</sup> [6]. Контактная площадь в рассматриваемом случае  $F = \pi BL/4 = \pi \cdot 1 \cdot 10/4 = 7,854$  мм<sup>2</sup>. Поскольку  $L/B = 10 \gg 1$ , то реализуется случай плоской деформации, когда согласно формуле (4) предельное контактное напряжение  $p_c^* = 2,97\sigma_s = 2,97 \times 35 = 103,95$  кГ/мм<sup>2</sup>. Значение действующих нормальных контактных напряжений в задаче составляет  $p'_c = P/F = 500/7,854 = 63,66$  кГ/мм<sup>2</sup>. В рассматриваемой задаче  $p'_c < p_c^*$ , т.е. действующие контактные напряжения меньше предельных  $p_c^*$ , поэтому оба контактирующие тела остаются упругими.

Значение коэффициента контактной прочности  $\zeta = p_c^*/p'_c = 103,95/63,66 = 1,633$ , т.е. до начала пластической деформации имеется запас порядка 63,3 % приложенной внешней нагрузки.

Отметим, что расчет контактной прочности в первом примере велся по силам деформирования, а во втором примере — по нормальным контактным напряжениям. Очевидно, что оба расчета приведут к одинаковым результатам, в частности к одинаковым значениям коэффициентов контактной прочности  $\zeta$ .

**Пример 3а.** Стальной упругий шарик из стали 40Х радиусом  $R = 5$  мм вдавливается в упругое полупространство из отожженной стали 45 силами: а)  $P = 3$  кГ и б)  $P = 18$  кГ.

Определить: останутся ли контактирующие тела при указанных внешних нагрузках в упругом состоянии? Вычислить значения коэффициентов контактной прочности  $\zeta$ .

**Решение.** Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_{s1} = 35$  кГ/мм<sup>2</sup> [6], а для стали 40Х  $\sigma_{s2} = 70$  кГ/мм<sup>2</sup> [1]. Модули упругости обоих тел совпадают:  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^4$  кГ/мм<sup>2</sup>. Радиусы кривизн шарика  $R_2 = 5$  мм, полупространства  $R_1 = \infty$ .

Имеем случай осесимметричной деформации, при которой предельные контактные напряжения  $p_c^*$  отвечают нижней границе интервалов (2), (3). Для полупространства получаем  $p_{c1}^* = 2,571 \times \sigma_{s1} = 2,571 \cdot 35 = 90$  кГ/мм<sup>2</sup>. При определении значения  $p_c^*$  для шарика следует учесть влияние кривизны его поверхности на уменьшение предельных контактных напряжений. Значение  $p_{c2}^*$  для шарика вычисляется по формуле (5):  $p_{c2}^* = (2,571 - 2a/R)\sigma_{s2}$ , где  $B = 2a$  — линейный размер контактной области, а  $a$  — радиус контакта [4, 5]. Радиус  $a$  круговой площадки контакта (рис. 2, б), образующейся при упругом вдавливании шарика в полупространство с силой  $P$ , определяется по формуле Герца [3]:  $a = 0,88 \sqrt[3]{2RP/E}$ .

*Случай а.* Определим радиус  $a$  круговой площадки упругого контакта, образующейся при вдавливании шарика в полупространство с силой  $P = 3$  кГ:

$$a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2RP/E} = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 3/2 \cdot 10^4} = 0,111 \text{ мм.}$$

Используя для шарика значение  $\sigma_{s2} = 70$  кГ/мм<sup>2</sup>, получаем для него по приведенной формуле значение предельных контактных напряжений:

$$\begin{aligned} p_{c2}^* &= 2,571\sigma_{s2} - 2\sigma_{s2} \cdot a/R = \\ &= 2,571 \cdot 70 - 2 \cdot 70 \cdot 0,111/5 = 180 - 3,11 = 176,89 \text{ кГ/мм}^2. \end{aligned}$$

Площадь контактной площадки  $F = \pi a^2 = \pi \cdot 0,111^2 = 0,0387$  мм<sup>2</sup>. Определим действующие нормальные напряжения  $p'_c = P/F = 3/0,0387 = 77,52$  кГ/мм<sup>2</sup>. В итоге получаем  $p'_c = 77,52$  кГ/мм<sup>2</sup> <  $p_{c1}^* = 90$  кГ/мм<sup>2</sup>, т.е. в рассматриваемом случае полупространство, в которое вдавливается шарик, остается упругим. Тем более остается

упругим вдавливаемый шарик, для которого предельные контактные напряжения  $p_{c2}^* = 176,89 \text{ кГ/мм}^2$ .

Вычислим значения коэффициентов запаса контактной прочности  $\zeta$ :

$$\zeta_2 = p_{c2}^*/p'_c = 176,89/77,52 = 2,282$$

— для шарика;

$$\zeta_1 = p_{c1}^*/p'_c = 90/77,52 = 1,161$$

— для полупространства.

*Случай b.* Определим радиус  $a$  круговой площадки упругого контакта, образующейся при вдавливании шарика в полупространство с силой  $P = 18 \text{ кГ}$ :

$$a = 0,88 \sqrt[3]{2RP/E} = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 18/2 \cdot 10^4} = 0,183 \text{ мм.}$$

Используя для шарика значение  $\sigma_{s2} = 70 \text{ кГ/мм}^2$ , получаем для него по приведенной формуле значение предельных контактных напряжений:

$$\begin{aligned} p_{c2}^* &= 2,571\sigma_{s2} - 2\sigma_{s2} \cdot a/R = \\ &= 2,571 \cdot 70 - 2 \cdot 70 \cdot 0,183/5 = 180 - 5,124 = 174,876 \text{ кГ/мм}^2. \end{aligned}$$

Площадь контактной площадки:  $F = \pi a^2 = \pi \cdot 0,183^2 = 0,1052 \text{ мм}^2$ . Определим действующие нормальные напряжения:  $p'_c = P/F = 18/0,1052 = 171,103 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге получим:  $p'_c = 171,103 \text{ кГ/мм}^2 > p_{c1}^* = 90 \text{ кГ/мм}^2$ , т.е. в рассматриваемом случае полупространство, в которое вдавливается шарик, подвергается пластическим деформациям. Для шарика  $p'_c = 171,103 \text{ кГ/мм}^2 < p_{c2}^* = 174,876 \text{ кГ/мм}^2$ , т.е. в рассматриваемом случае вдавливаемый шарик еще остается упругим.

Вычислим значения коэффициентов запаса контактной прочности  $\zeta$ :  $\zeta_2 = p_{c2}^*/p'_c = 174,876/171,103 = 1,022$  — для шарика;  $\zeta_1 = p_{c1}^*/p'_c = 90/171,103 = 0,526$  — для полупространства. Таким образом, при  $P = 18 \text{ кГ}$  шарик почти достиг предела контактной прочности, оставаясь еще в упругом состоянии, тогда как полупространство, в которое вдавливается шарик, подвергается пластическим деформациям.

Из значения коэффициента  $\zeta_1 = 0,526$  видно, что при силе вдавливания  $P = 18 \text{ кГ}$  предельная контактная нагрузка для полупространства превышена почти вдвое.

*Влияние относительного размера контактных площадок на предельные контактные напряжения.* В приведенных зависимостях ширина контактной площадки  $B$  считалась достаточно малой по сравнению с размерами контактирующего тела, что позволило принять

Значения предельных контактных давлений  $p_c^*/2k_1$  (для области  $C$ )

$k/k_1$	$H/B$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,0	0,300	0,641	1,029	1,478	2,0
0,05	0,128	0,416	0,740	1,107	1,526	2,007
0,1	0,257	0,537	0,847	1,192	1,580	2,015
0,2	0,514	0,769	1,046	1,349	1,680	2,044
0,3	0,771	1,0	1,245	1,507	1,788	2,092
0,4	1,028	1,228	1,438	1,661	1,897	2,147
0,5	1,285	1,455	1,632	1,816	2,009	2,211
0,6	1,542	1,679	1,820	1,966	2,116	2,272
0,7	1,800	1,903	2,009	2,117	2,228	2,342
0,8	2,057	2,125	2,195	2,266	2,339	2,412
0,9	2,314	2,349	2,384	2,420	2,456	2,493
1,0	2,571	2,571	2,571	2,571	2,571	2,571
$k/k_1$	$B/H = \infty$	10,0	5,0	3,33	2,5	2,0

обычные допущения теории контактных задач, в которых деформируемое тело рассматривается или как деформируемое полупространство (объемная задача), или как деформируемая полуплоскость (плоская задача). В работе [7] приведены результаты теоретического и экспериментального исследований указанного допущения на предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k$ . Доказано, что если в высокую полосу толщиной  $2h$  вдавливаются плоский пуансон шириной  $B$ , то при относительном размере контактной площадки  $B/h \leq 0,229$ , или  $2h/B \geq 8,734$ , где  $2h$  — толщина деформируемого тела, конечные размеры тела перестают влиять на предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k$ .

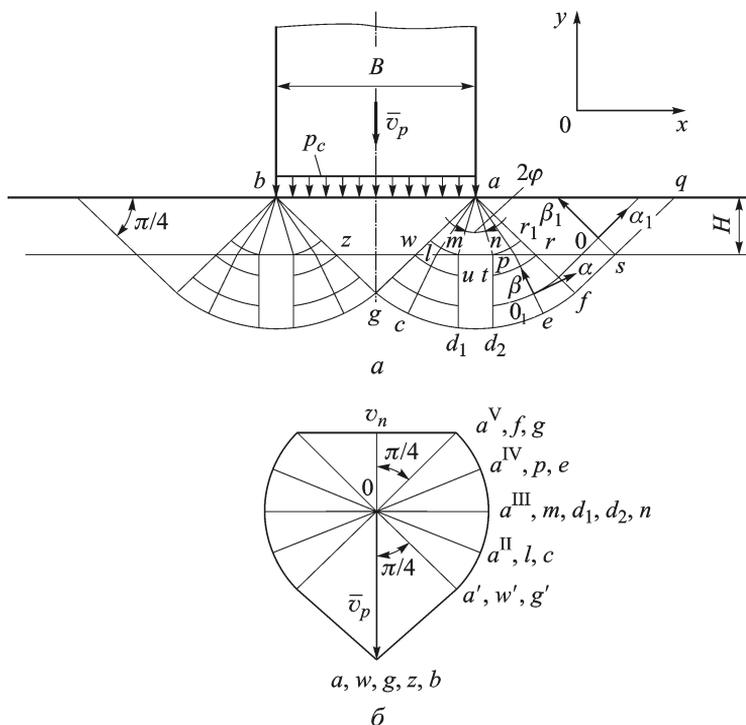
В этом случае деформируемое тело можно рассматривать как деформируемое полупространство или как деформируемую полуплоскость без какой-либо потери точности в определяемых значениях предельных напряжений  $p_c^*/2k$ . При меньших значениях отношений  $2h/B < 8,734$  конечные размеры контактирующего тела начинают влиять на предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k$ , уменьшая значения предельных величин  $p_c^*/2k$  [7]. Изложенное позволяет сделать следующий практически важный вывод: при относительном размере деформируемого тела  $2h/B \geq 8,734$  предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k$  не зависят от конечности его размеров, и при определении величин  $p_c^*/2k$  деформируемое тело можно рассматривать как деформируемое полупространство или деформируемую полуплоскость.

**Контакт твердых тел с поверхностным упрочненным слоем.**  
В целях повышения прочности и износостойкости машиностроитель-

ных деталей и узлов широко применяются различные методы их поверхностного упрочнения. Важно знать, какие контактные нагрузки могут выдержать детали после создания на их поверхностях упрочненных слоев. До последнего времени отсутствовали методы, позволяющие рассчитать влияние поверхностного упрочненного слоя на увеличение контактной прочности деформируемых деталей.

*Основные теоретические результаты для твердых тел с поверхностным упрочненным слоем.* В проведенном исследовании в качестве основной (базовой) задачи рассматривалось вдавливание плоского жесткого пуансона шириной  $B$  в полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем толщиной  $H$ . Предел текучести на сдвиг поверхностного упрочненного слоя равен  $k_1$ , и он отличен от значения  $k$  основного материала детали, причем  $k_1 \geq k$  (рис. 3). Рассматриваемый случай полностью определяется заданием четырех размерных параметров:  $k, k_1, H$  и  $B$  или всего двух безразмерных параметров:  $k/k_1$  и  $H/B$ , являющихся критериями подобия рассматриваемой задачи [9].

Для указанной проблемы основное значение имеет решение фундаментальной задачи теории пластичности о вдавливании плоского жесткого пуансона в полуплоскость с поверхностным упрочненным



**Рис. 3. Поле линий скольжения и годограф скоростей полного решения при вдавливании плоского пуансона в полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем ( $k_1 > k$ ):**

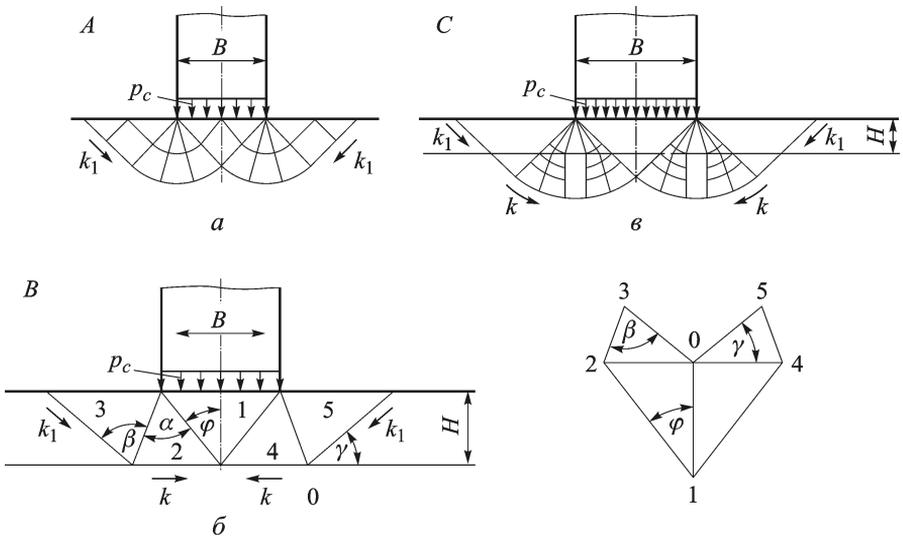
$a$  — поле линий скольжения ( $0 \leq H/B \leq 0,5$ );  $b$  — годограф скоростей

слоем. Полное решение этой задачи для  $H/B \leq 0,5$  приведено в работе [9]. Поле линий скольжения этого решения показано на рис. 3, *а*, а на рис. 3, *б* приведен годограф скоростей этой задачи. В работе [9] доказано, что поле линий скольжений (см. рис. 3) определяет точные значения предельных контактных нагрузок  $p_c^*$ , которые приведены в табл. 2.

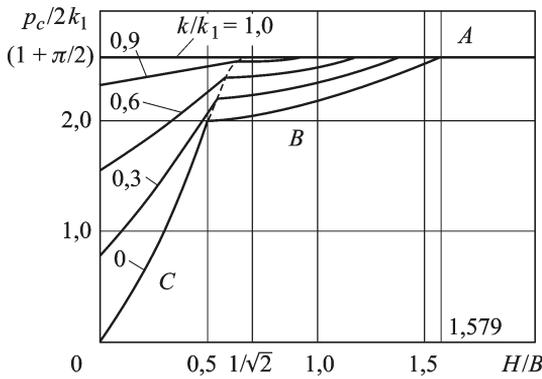
Описание примененной методики определения их численных значений содержится в работах [10, 11]. Отметим, что в случае  $k/k_1 = 1$  имеем однородную полуплоскость, отвечающую классическому решению Прандтля (1). Случай  $H/B = 0$  также отвечает решению Прандтля со значениями  $k$ , выраженными в долях от значения  $k_1$  поверхностного упрочненного слоя (см. табл. 2).

В зависимости от значений указанных параметров  $k/k_1$  и  $H/B$ , пластическая область может возникать либо в одном поверхностном упрочненном слое, либо одновременно в поверхностном слое и в более мягкой подложке [10–12], при этом на линии раздела указанных сред имеют место разрывы нормальных напряжений  $\sigma_x$  [9].

На рис. 4 области *A*, *B*, *C* отвечают трем возможным случаям расположения пластической области при вдавливании жесткого плоского пуансона в полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем [5, 12]. Области *A* и *A*<sub>1</sub> относятся к случаю относительно большой толщины  $H/B$  упрочненного слоя (рис. 5). Как следует из рисунка, это будет всегда при  $H/B \geq 1,579$ . В этом случае вся пластическая



**Рис. 4. Поля линий скольжений, используемые при решении задач о вдавливании плоских пуансонов в пластически неоднородную полуплоскость:** *a* — поле линий скольжений классического решения Прандтля (область *A*); *б* — кинематическое поле линий скольжений с годографом скоростей для  $H/B > 0,5$  (область *B*); *в* — поле линий скольжений при  $0 \leq H/B \leq 0,5$  (область *C*)



**Рис. 5.** Графики зависимостей предельных контактных давлений  $p_c/2k_1$  от отношения  $H/B$  для разных значений отношений пределов текучести на сдвиг подложки  $k$  и поверхностного упрочненного слоя  $k_1$

область располагается в поверхностном упрочненном слое и реализуется классическое решение Прандтля со значениями  $p_c^*/2k_1$ , определяемыми по формуле (1) при  $k = k_1$ .

Области  $B$  и  $B_1$  (рис. 4, б), относятся к меньшему значению отношения  $H/B$ , когда пластическая область в поверхностном упрочненном слое выходит на линию раздела сред. Этот случай может возникать только тогда, когда  $H/B < 1,579$ . Предельная нагрузка  $p_c^*/2k_1$  в этом случае была определена с использованием численных методов решения оптимизационных задач, опирающихся на экстремальные принципы теории пластичности [5]. Вычисленные значения  $p_c^*/2k_1$  для областей  $B$  и  $B_1$  приведены в табл. 3, а на рис. 5 показано изменение предельных нагрузок  $p_c^*$  в рассматриваемом случае [5, 10, 12].

Дальнейшее уменьшение отношения  $H/B$  приводит к тому, что пластическая область захватывает одновременно поверхностный упрочненный слой и более мягкую подложку. В этом случае реализуется точное решение, показанное на рис. 3, которому отвечают области  $C$  и  $C_1$  на рис. 6. Это решение справедливо для  $0 \leq H/B \leq 0,5$ , поэтому для  $H/B > 0,5$  зависимости  $p_c^*/2k_1$  от  $H/B$  (при  $k/k_1 = \text{const}$ ) были экстраполированы до области  $B$ . Вследствие практически линейного характера зависимостей  $p_c^*/2k_1 = \Phi(H/B)$  для  $H/B > 0,5$  указанная экстраполяция была выполнена линейным образом [5]. Вычисленные предельные значения  $p_c^*/2k_1$ , для последнего случая  $C$  приведены в табл. 2.

В декартовой координатной системе  $k/k_1$ ,  $H/B$  и  $p_c/2k_1$  предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k_1$  образуют поверхность предельных напряжений, показанную на рис. 4, а в прямоугольной изометрической проекции [10–12]. В области  $A$  деформируемое тело ведет себя как пластически однородная полуплоскость с  $\tau_{\max} = k_1$ . В области  $B$  при  $H/B \leq (H/B)_{k_1}$  пластическая область выходит на линию раздела

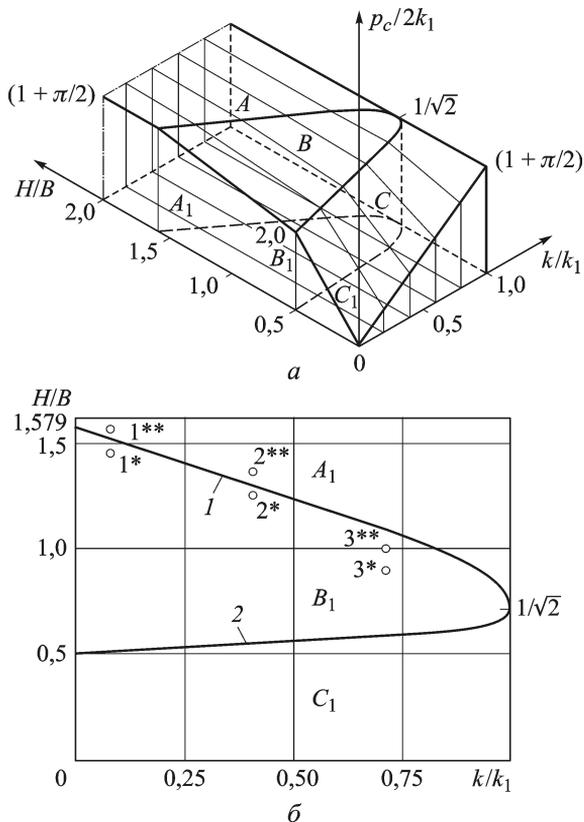
**Скорректированные значения предельных контактных давлений  $p_c^*/2k_1$  (для области  $B$ )**

$H/B$	$k/k_1$											
	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98
0,5	2,000	2,076	2,148	2,217	2,284	2,348	2,410	2,469	2,527	2,583	—	—
0,6	2,013	2,082	2,148	2,211	2,271	2,328	2,384	2,437	2,488	2,538	2,562	2,576
0,7	2,044	2,109	2,170	2,228	2,284	2,337	2,387	2,436	2,483	2,528	2,549	2,562
0,8	2,087	2,148	2,206	2,261	2,313	2,362	2,410	2,455	2,498	2,539	2,560	2,571
0,9	2,138	2,196	2,251	2,303	2,352	2,399	2,444	2,486	2,527	2,566	2,585	2,596
1,0	2,194	2,250	2,303	2,353	2,400	2,444	2,487	2,527	2,566	2,602	—	—
1,1	2,253	2,308	2,359	2,407	2,453	2,496	2,536	2,575	2,612	—	—	—
1,2	2,316	2,369	2,419	2,466	2,509	2,551	2,590	—	—	—	—	—
1,3	2,381	2,433	2,481	2,527	2,570	2,610	—	—	—	—	—	—
1,4	2,448	2,499	2,546	2,590	2,632	—	—	—	—	—	—	—
1,5	2,516	2,566	2,612	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,6	2,586	2,635	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

упрочненного слоя с более мягкой основой, что вызывает уменьшение предельных контактных напряжений  $p_c^*/2k_1$ . Более сильное падение значений  $p_c^*/2k_1$  наблюдается в области  $C$ , отвечающей малым значениям  $H/B \leq (H/B)_{к2}$ , при которых пластическая область захватывает одновременно поверхностный упрочненный слой и более мягкую основу, что отвечает точному решению (см. рис. 3).

В табл. 3 приведены значения предельных контактных напряжений  $p_c^*/2k_1$  для области  $B$ , составляющие часть указанной таблицы. Границами области  $B$  служат плоская кривая 1 и пространственная кривая 2 (см. рис. 6). В табл. 4 приведены ординаты проекций кривых 1 и 2 (кривых  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ ) на плоскость параметров процесса  $k/k_1$  и  $H/B$  и предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k_1$ , отвечающие второй кривой [5]. Пространственным линиям смены решений  $AB$  и  $BC$  (рис. 6, *a*), в плоскости параметров процесса  $k/k_1$  и  $H/B$ , отвечают их проекции  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ .

Предельные напряжения  $p_c^*/2k_1$  на кривой 1 — постоянны, так как отвечают решению Прандтля (1). В табл. 3 индекс “к1” относится к кривой 1, а индексы “к2” — к кривой 2 [5]. Ординаты кривой 1 лежат в интервале  $1/\sqrt{2} = 0,707 \leq H/B \leq 1,579$ , а ординаты кривой 2 — в интервале  $0,5 \leq H/B \leq 1/\sqrt{2} = 0,707$  (рис. 6, *б*). Результаты теоретического исследования подтверждаются экспериментальными данными, полученными в работе [13].



**Рис. 6. Функциональная зависимость предельных контактных давлений  $p_c/2k$  от параметров процесса вдавливания плоского пуансона  $H/B$  и  $k/k_1$ :**

*a* — поверхность предельных контактных напряжений  $p_c/2k_1$  в зависимости от параметров задачи  $H/B$  и  $k/k_1$ ; *б* — области  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  отвечают разному характеру деформации неоднородной полуплоскости при вдавливании в нее плоского жесткого пуансона (o — результаты экспериментов)

Таблица 4

**Значения координат  $H/B$  граничных кривых 1 и 2 области  $B_1$  и предельных контактных давлений  $(p_c^*/2k_1)_{к2}$  на кривой 2**

$k/k_1$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$(H/B)_{к1}$	1,579	1,507	1,438	1,369	1,302	1,234	1,165
$(H/B)_{к2}$	0,50	0,513	0,526	0,538	0,551	0,564	0,577
$(p_c/2k_1)_{к2}$	2,00	2,070	2,140	2,209	2,275	2,333	2,392
$k/k_1$	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	1,0
$(H/B)_{к1}$	1,092	1,012	0,915	0,851	0,797	0,773	0,707
$(H/B)_{к2}$	0,590	0,602	0,615	0,641	0,676	0,691	0,707
$(p_c/2k_1)_{к2}$	2,443	2,490	2,533	2,553	2,563	2,567	2,571

Отметим, что если точка с координатами  $k/k_1$ ,  $H/B$ ,  $p'_c/2k_1$  попадает внутрь поверхности предельных напряжений (см. рис. 6, а), то отвечающее этой точке нагруженное тело пребывает в упругом состоянии. Выход изображающей точки на предельную поверхность областей А, В и С отвечает началу интенсивной контактной пластической деформации. Напомним, что значения  $p_c^*/2k_1$  (см. табл. 1–4) отвечают плоской деформации, т.е. верхней границе их возможных значений. Для определения нижней границы значения  $p_c^*/2k_1$  из этих таблиц следует умножить на коэффициент  $\gamma = 0,866$ , как это следует из формул (2), (3).

*Типовые примеры расчета контактной прочности твердых тел с поверхностным упрочненным слоем.*

**Пример 16.** В толстый прямоугольный брусок вдавливаются плоские пуансоны с прямоугольными основаниями длиной  $L = 20$  мм и шириной а)  $B = 0,5$  мм, б)  $B = 1$  мм, в)  $B = 2$  мм. Материал бруска: несклепанная (отожженная) сталь 45, на поверхности бруска имеется закаленный слой металла толщиной  $H = 1$  мм с пределом текучести  $70$  кГ/мм<sup>2</sup>. Во всех случаях сила вдавливания  $P = 3200$  кГ.

Требуется определить: останется ли в случаях а), б) и в) при такой нагрузке брусок упругим, или он подвергнется пластическим деформациям? Требуется найти значения коэффициентов контактной прочности  $\zeta$  для всех указанных случаев.

**Решение.** Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_s = 35$  кГ/мм<sup>2</sup> [6], предел текучести поверхностного упрочненного слоя  $\sigma_{s1} = 70$  кГ/мм<sup>2</sup>. В итоге для всех рассматриваемых случаев имеем:  $k/k_1 = \sigma_s/\sigma_{s1} = 35/70 = 0,5$ . Поскольку  $L/B \gg 1$ , то во всех случаях реализуется плоская деформация, для которой значения предельных контактных давлений  $p_c^*/2k_1$  приведены в табл. 2–4.

*Случай а.* Имеем толщину поверхностного упрочненного слоя  $H = 1$  мм, ширину контактной области  $B = 0,5$  мм, в итоге отношение  $H/B = 1/0,5 = 2$ , а отношение  $k/k_1 = 0,5$ . Эти значения  $k/k_1$  и  $H/B$  принадлежат области  $A_1$  (см. рис. 6, б), для которой предельные контактные давления  $p_c^*/2k_1$  определяются по формуле Прандтля (1) при  $k = k_1$ , т.е.  $p_c^* = 2,97\sigma_{s1} = 2,97 \cdot 70 = 207,9$  кГ/мм<sup>2</sup>.

В рассматриваемом случае контактная площадь  $F = BL = 0,5 \times 20 = 10$  мм<sup>2</sup>. Действующие средние контактные напряжения в задаче равны  $p'_c = P/F = 3200/10 = 320$  кГ/мм<sup>2</sup>. Поскольку  $p'_c > p_c^* = 207,9$  кГ/мм<sup>2</sup>, то при внешней силе  $P = 3200$  кГ брусок будет подвергаться пластической деформации.

Значение коэффициента контактной прочности в данном случае составляет  $\zeta = p_c^*/p'_c = 207,9/320 = 0,65$ , т.е. приложенная нагрузка на 35 % превышает предельную (а еще больше допустимую).

Для того чтобы брусок оставался упругим, требуется:  $p'_c < p_c^*$ , или  $p'_c < 207,9 \text{ кГ/мм}^2$ . Это позволит определить максимально возможную силу деформирования для рассматриваемого случая ( $P_{\max} = p'_{c \max} \times \times F = 207,9 \cdot 10 = 2079 \text{ кГ}$ ), до которой деформируемый брусок остается еще упругим. Эта максимально допустимая нагрузка от приложенной составляет  $P_{\max}/P = 2079/3200 = 0,65 = \zeta$ .

*Случай б.* Толщина поверхностного упрочненного слоя  $H = 1 \text{ мм}$ , ширина контактной области  $B = 1 \text{ мм}$ , в итоге отношение  $H/B = 1$ , а отношение  $k/k_1 = 0,5$ . Эти значения  $k/k_1$  и  $H/B$  принадлежат области  $B_1$  (см. рис. 6, б), для которой предельные контактные давления  $p_c^*/2k_1$  определяются по табл. 3, из которой находим  $p_c^*/2k_1 = 2,444$  или  $p_c^* = 4,888k_1 = 2,822\sigma_{s1} = 2,822 \cdot 70 = 197,54 \text{ кГ/мм}^2$ .

Контактная площадь  $F = BL = 1 \cdot 20 = 20 \text{ мм}^2$ , т.е. в 2 раза больше, чем в случае *а*. Следовательно, средние действующие напряжения будут в 2 раза меньше:  $p'_c = P/F = 3200/20 = 160 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге получаем, что в рассматриваемой задаче  $p'_c = 160 \text{ кГ/мм}^2 < p_c^* = 197,54 \text{ кГ/мм}^2$ . В рассматриваемом случае  $p'_c < p_c^*$ , поэтому деформируемый брусок останется упругим. Значение коэффициента контактной прочности в данном случае  $\zeta = p_c^*/p'_c = 197,54/160 = 1,235$ , т.е. до начала контактной пластической деформации имеется запас порядка 23,5 % приложенной внешней нагрузки.

*Случай в.* Толщина поверхностного упрочненного слоя  $H = 1 \text{ мм}$ , ширина контактной области  $B = 2 \text{ мм}$ , в итоге отношение  $H/B = 0,5$ , а отношение  $k/k_1 = 0,5$ . Эти значения отношений  $k/k_1$  и  $H/B$  принадлежат области  $C_1$  (см. рис. 6, в), для которой предельные контактные давления  $p_c^*/2k_1$  определяются по табл. 2, из которой следует  $p_c^*/2k_1 = 2,211$  или  $p_c^* = 4,422k_1 = 2,553\sigma_{s1} = 2,553 \times \times 70 = 178,71 \text{ кГ/мм}^2$ . Рассматриваемый случай отвечает полю линий скольжения, приведенному на рис. 3.

Контактная площадь  $F = BL = 2 \cdot 20 = 40 \text{ мм}^2$ , т.е. в 2 раза больше, чем в случае *б*. Соответственно, действующие нормальные контактные напряжения будут в 2 раза меньше:  $p'_c = P/F = 3200/40 = 80 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге получаем  $p'_c = 80 \text{ кГ/мм}^2 < p_c^* = 178,71 \text{ кГ/мм}^2$ . Таким образом, в рассматриваемом случае  $p'_c < p_c^*$ , поэтому брусок при данной нагрузке останется упругим.

Значение коэффициента контактной прочности в данном случае  $\zeta = p_c^*/p'_c = 178,71/80 = 2,234$ , т.е. до начала контактной пластической деформации имеется более, чем двукратный запас от приложенной внешней нагрузки. Сравнив случай *с* с примером 1а, со сходными начальными условиями, получим, что применение поверхностной закалки позволило увеличить значение коэффициента контактной прочности со значения  $\zeta = 1,3$  (в примере 1а) до значения  $\zeta = 2,234$  (в примере 1б).

**Пример 2б.** Два упругих тела с гладкими контактными поверхностями сдавливаются силой  $P = 500$  кГ. Плоская контактная площадка имеет форму эллипса с осями: малая ось  $B = 1$  мм, большая ось  $L = 10$  мм. Материал обоих тел — отожженная сталь 45, оба тела имеют поверхностно закаленный слой толщиной  $H = 1$  мм, с пределом текучести  $70$  кГ/мм<sup>2</sup>.

Определить: выдержат ли контактирующие тела приложенную к ним внешнюю нагрузку, оставаясь в упругом состоянии? Требуется также найти значение коэффициента контактной прочности  $\zeta$ .

**Решение.** Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_s = 35$  кГ/мм<sup>2</sup> [6], предел текучести поверхностного упрочненного слоя  $\sigma_{s1} = 70$  кГ/мм<sup>2</sup>. В итоге имеем  $k/k_1 = \sigma_s/\sigma_{s1} = 35/70 = 0,5$ . Контактная площадь в рассматриваемом случае  $F = \pi B \cdot L/4 = \pi \cdot 1 \cdot 10/4 = 7,854$  мм<sup>2</sup>. Действующие средние нормальные контактные напряжения  $p'_c = P/F = 500/7,854 = 63,66$  кГ/мм<sup>2</sup>.

Заменяем эллипс равновеликим прямоугольником со сторонами  $B'$  и  $L$ , причем сторона  $L = 10$  мм, т.е. равна большой оси эллипса. В этом случае у равновеликого прямоугольника: сторона  $B' = F/L = 7,854/10 = 0,7854$  мм. Поскольку  $L/B' \gg 1$ , то в рассматриваемом случае реализуется плоская деформация, для которой значения предельных контактных давлений  $p_c^*/2k_1$  приведены в табл. 2, 3.

Толщина поверхностного упрочненного слоя  $H = 1$  мм, средняя ширина контактной области  $B' = 0,7854$  мм, в итоге  $H/B' = 1,273$ , а  $k/k_1 = 0,5$ . Эти отношения  $k/k_1$  и  $H/B'$  принадлежат области  $A_1$  (см. рис. 6, б), для которой предельные контактные давления  $p_c^*/2k_1$  определяются по формуле Прандтля (1). В этом нас убеждают и данные табл. 4, так как ордината 1,273 изображающей точки оказывается больше ординаты верхней граничной кривой 1 при  $k/k_1 = 0,5$ :  $(H/B)_{k1} = 1,234 < 1,273$ . В итоге в рассматриваемом случае предельные контактные напряжения  $p_c^*/2k_1 = 2,571$ , или  $p_c^* = 5,142k_1 = 2,97\sigma_{s1} = 2,97 \cdot 70 = 207,9$  кГ/мм<sup>2</sup>. Таким образом,  $p'_c = 63,66 < p_c^* = 207,9$ , поэтому оба контактирующих тела в рассматриваемом случае останутся упругими.

Значение коэффициента контактной прочности  $\zeta = p'_c/p_c^* = 207,9/63,66 = 3,266$ , т.е. до начала контактной пластической деформации имеется более чем трехкратный запас от приложенной внешней нагрузки. Сравнивая этот случай с примером 2а, видим, что создание на контактирующих телах поверхностного упрочненного слоя толщиной  $H = 1$  мм позволило вдвое увеличить значение коэффициента контактной прочности  $\zeta$ .

**Пример 3б.** Стальной закаленный шарик с пределом текучести  $90 \text{ кГ/мм}^2$  радиусом  $R = 5 \text{ мм}$  вдавливается в упругое полупространство из отожженной стали 45 с поверхностным упрочненным слоем, толщиной  $H = 1 \text{ мм}$  и  $\sigma_{s1} = 70 \text{ кГ/мм}^2$ . Сила вдавливания а)  $P = 3 \text{ кГ}$  и б)  $P = 18 \text{ кГ}$ . Определить: выдержат ли контактирующие тела указанные внешние нагрузки, оставаясь в упругом состоянии? Найти значения коэффициентов контактной прочности  $\zeta$  для обоих контактирующих тел.

**Решение.** При вдавливании шарика реализуется осесимметричная деформация. В этом случае значения предельных контактных давлений  $p_c^*/2k_1$ , приведенные в табл. 2–4, следует, как указывалось ранее, умножить на коэффициент  $\gamma = 0,866$ .

Для отожженной стали 45 предел текучести  $\sigma_s = 35 \text{ кГ/мм}^2$  [6], предел текучести поверхностного упрочненного слоя  $\sigma_{s1} = 70 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге имеем  $k/k_1 = \sigma_s/\sigma_{s1} = 35/70 = 0,5$ . Предел текучести шарика  $\sigma_{s2} = 90 \text{ кГ/мм}^2$ . Принимаем, что модули упругости обоих контактирующих тел совпадают, т.е.  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^4 \text{ кГ/мм}^2$ .

При определении значения  $p_c^*$  для однородного шарика следует учесть влияние кривизны его поверхности на уменьшение предельных контактных напряжений. Поэтому значение  $p_{c2}^*$  для шарика вычисляется по формуле (5):  $p_{c2}^* = 2,571\sigma_{s2} - 2\sigma_{s2} \cdot a/R$ , где  $a$  — радиус контакта [4, 5].

Радиусы кривизн: шарика  $R_2 = 5 \text{ мм}$ , полупространства  $R_1 = \infty$ . Радиус  $a$  круговой площадки контакта (см. рис. 1, б), образующейся при вдавливании шарика в полупространство с силой  $P$ , определяется по формуле Герца [3]:  $a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2RP/E}$ .

*Случай а.* Определим радиус  $a$  круговой площадки контакта, образующейся при вдавливании шарика в полупространство с силой  $P = 3 \text{ кГ}$ :

$$a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2RP/E} = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 3/2 \cdot 10^4} = 0,111 \text{ мм}.$$

Используя значение  $\sigma_{s2} = 90 \text{ кГ/мм}^2$ , по приведенной формуле получаем для шарика следующее значение предельных контактных напряжений  $p_{c2}^*$ :

$$\begin{aligned} p_{c2}^* &= 2,571\sigma_{s2} - 2\sigma_{s2} \cdot a/R = \\ &= 2,571 \cdot 90 - 2 \cdot 90 \cdot 0,111/5 = 231,39 - 4 = 227,39 \text{ кГ/мм}^2. \end{aligned}$$

Ширина площадки контакта  $B = 2a = 0,222 \text{ мм}$ , отношение  $H/B = 1/0,222 = 4,5$ . В итоге имеем  $k/k_1 = 0,5$ ,  $H/B = 4,5$ . Этой паре значений параметров отвечает область  $A_1$  (см. рис. 6, б), т.е. область с предельными контактными напряжениями  $p_c^*$ , соответствующими

формуле Прандтля (1). Учитывая осесимметричный характер деформации и отвечающее ему снижение предельных контактных нагрузок, для полупространства получаем  $p_{c1}^* = \gamma \cdot p_c = 2,571\sigma_{s1} = 2,571 \times \times 70 = 180 \text{ кГ/мм}^2$ .

Площадь контактной площадки  $F = \pi a^2 = \pi \cdot 0,111^2 = 0,0387 \text{ мм}^2$ . На контакте действуют нормальные напряжения  $p'_c = P/F = = 3/0,0387 = 77,52 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге получаем  $p'_c = 77,52 \text{ кГ/мм}^2 < p_{c1}^* = = 180 \text{ кГ/мм}^2$ , т.е. полупространство, в которое вдавливаются шарик, остается упругим. Тем более остается упругим вдавливаемый шарик, для которого  $p_{c2}^* = 227,39 \text{ кГ/мм}^2$ .

Вычислим значения коэффициентов запаса контактной прочности  $\zeta$ :  $\zeta_2 = p_{c2}^*/p'_c = 227,39/77,52 = 2,933$  — для шарика;  $\zeta_1 = p_{c1}^*/p'_c = = 180/77,52 = 2,332$  — для полупространства. Сравнение с примером 3а показывает, что создание на поверхности полупространства упрочненного слоя увеличило значение коэффициента  $\zeta_1$  вдвое.

**Случай б.** Определим радиус  $a$  круговой площадки контакта, образующейся при вдавливании шарика в полупространство с силой  $P = 18 \text{ кГ}$ :  $a = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2RP/E} = 0,88 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 18/2 \cdot 10^4} = 0,183 \text{ мм}$ . Используя значение  $\sigma_{s2} = 90 \text{ кГ/мм}^2$ , получаем для шарика следующие предельные контактные напряжения:

$$p_{c2}^* = 2,571\sigma_{s2} - 2\sigma_{s2} \cdot a/R = \\ = 2,571 \cdot 90 - 2 \cdot 90 \cdot 0,183/5 = 231,39 - 6,59 = 224,8 \text{ кГ/мм}^2.$$

Ширина площадки контакта  $B = 2a = 0,366 \text{ мм}$ , отношение  $H/B = 1/0,366 = 2,732$ , а  $k/k_1 = 0,5$ . Этой паре значений параметров отвечает область  $A_1$  (см. рис. 6, б), т.е. область с предельными контактными напряжениями  $p_c^*$ , соответствующими формуле Прандтля (1). Учитывая осесимметричный характер деформации, получаем для полупространства  $p_{c1}^* = \gamma \cdot p_c = 2,571\sigma_{s1} = 2,571 \cdot 70 = 180 \text{ кГ/мм}^2$ .

Площадь контактной площадки  $F = \pi a^2 = \pi \cdot 0,183^2 = 0,1052 \text{ мм}^2$ , действующие на контакте нормальные напряжения  $p'_c = P/F = = 18/0,1052 = 171,103 \text{ кГ/мм}^2$ . В итоге имеем  $p'_c = 171,103 \text{ кГ/мм}^2 < < p_{c1}^* = 180 \text{ кГ/мм}^2$ , т.е. полупространство, в которое вдавливаются шарик, остается упругим. Для вдавливаемого шарика  $p'_c = 171,103 \text{ кГ/мм}^2 < < p_{c2}^* = 224,8 \text{ кГ/мм}^2$ , т.е. и вдавливаемый шарик остается упругим.

Вычислим значения коэффициентов запаса контактной прочности  $\zeta$ :  $\zeta_2 = p_{c2}^*/p'_c = 224,8/171,103 = 1,314$  — для шарика;  $\zeta_1 = p_{c1}^*/p'_c = 180/171,103 = 1,052$  — для полупространства. Сравнение с примером 3а показывает, что вследствие создания поверхностного упрочненного слоя на полупространстве вдвое увеличилось

значение коэффициента  $\zeta_1$  (с  $\zeta_1 = 0,526$  до  $\zeta_1 = 1,052$ ) и пространство осталось упругим даже при шестикратном увеличении внешней нагрузки.

*Теоретические результаты о характере распределения нормальных контактных напряжений по плоской подошве вдавливаемого пуансона.* В заключение коснемся интересного и важного вопроса о распределении нормальных контактных напряжений  $\sigma_n$  по контактной поверхности плоского жесткого пуансона, вдавливаемого в полуплоскость.

В классическом решении Прандтля (см. рис. 1, а), как и в общем точном решении для неоднородной среды (см. рис. 3), с плоским основанием пуансона контактируют жесткие области, для которых распределения контактных касательных  $\tau_k$  и нормальных  $\sigma_n$  напряжений, строго говоря, теоретически не определены. Для этой области справедливы, как указывалось ранее, лишь интегральные характеристики, относящиеся к определяемым силе деформирования  $P$  и главному вектору  $T$  сил трения.

Имеется точное решение упругой задачи о распределении нормальных контактных давлений  $\sigma_n$  по плоской подошве жесткого пуансона, вдавливаемого в упругую полуплоскость [14, 15]. В указанном случае распределение напряжений  $\sigma_n(x)$  подчиняется следующему закону:  $\sigma_n = q/(\pi \cdot \sqrt{0,25B^2 - x^2})$ , где расположение абсциссы  $x$  показано на рис. 2, а,  $B$  — ширина контактной площадки,  $q$  — сила вдавливания, приходящаяся на единицу длины контактной площадки. В полученном решении при  $x = \pm B/2$ , т.е. у углов пуансона,  $\sigma_n \rightarrow \infty$ , хотя фактически этого наблюдаться не будет, так как при некотором конечном значении  $\sigma_n$  материал полуплоскости у углов пуансона перейдет из упругого в пластическое состояние.

Распределение нормальных контактных напряжений  $\sigma_n$  по подошве плоского жесткого пуансона, вдавливаемого в полуплоскость, изучалось И.Я. Штаерманом. Показано, что даже небольшое скругление теоретически прямых углов пуансона существенно выравнивает распределение контактных напряжений  $\sigma_n$  в упругой задаче [15].

В работе [15] получено упругое решение, основанное на предположении, что распределение  $\sigma_n$  зависит не только от деформации всего упругого тела, но и от шероховатости и упругих свойств самих поверхностей. Принимается, что локальные контактные перемещения  $w$  в рассматриваемой точке связаны с местным давлением  $\sigma_n$  в этой же точке линейной зависимостью  $w = K \cdot \sigma_n$  [15]; здесь  $K$  — коэффициент упругой постели, зависящий от поверхностной структуры контактирующего тела.

Проведенное исследование привело к интересным и практически важным выводам. В книге [15] приведены графики распределений нормальных контактных давлений  $\sigma_n$  под плоским пуансоном для разных значений параметра  $c = B(1 - \nu^2)/KE$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона. В указанной книге построены графики распределений контактных  $\sigma_n$  для  $c = 0; 0,1; 1; 10$  и  $c = \infty$ . Случай  $c = \infty$  возникает, очевидно, при  $K = 0$ , что отвечает классической теории упругости [15]. Только в этом случае при  $x = \pm B/2$ , т.е. в углах пуансона, контактное давление  $\sigma_n$  обращается в бесконечность.

При конечных значениях параметра  $c$  контактное давление  $\sigma_n$  остается ограниченным, причем оно выравнивается с уменьшением значений параметра  $c$ , т.е. с ростом значений упругой константы  $KE$ . В предельном случае при  $KE = \infty$  и  $c = 0$  получаем требуемый случай вдавливания плоского жесткого пуансона в идеальную жесткопластическую полуплоскость. При этом в рассматриваемом решении распределение нормальных контактных напряжений  $\sigma_n$  под плоским пуансоном оказывается равномерным [15]. Это отвечает используемым в настоящей работе точным решениям теории пластичности, включая классические решения Прандтля и решение, представленное на рис. 3.

Отметим, что в работах [10–12] подробно изложены основные теоретические результаты, лежащие в основе приведенного метода расчета контактной прочности, и полученные новые основополагающие результаты по теории расчета контактной прочности твердых тел.

В работе [11] описан метод учета влияния толщины переходной области  $h_p$  от поверхностного упрочненного слоя к более мягкой подложке на предельные контактные напряжения  $p_c^*$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детали машин: Справочник / Под ред. Н.С. Ачеркана. Кн. 1. – М.: Машгиз, 1953. – 654 с.
2. Детали машин: Справочник / Под ред. Н.С. Ачеркана. Кн. 2. – М.: Машгиз, 1953. – 560 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев. Наук. думка, 1975. – 704 с.
4. Третьяков Е. М. Предельные напряжения и контактная прочность пластически однородных твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 6. – С. 34–41.
5. Третьяков Е. М. Исследование влияния формы твердых тел на величины предельных контактных напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 4. – С. 45–54.
6. Третьяков А. В., Зюзин В. И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. – М.: Металлургия, 1973. – 224 с.
7. Третьяков Е. М. Влияние относительного размера контактных площадок на величины предельных напряжений и контактную прочность твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 6. – С. 51–61.

8. Т р е т ь я к о в Е. М. Влияние контактного трения на предельные напряжения и контактную прочность твердых тел // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2004. – № 1. – С. 44–50.
9. Т р е т ь я к о в Е. М. Полное решение задачи о вдавливании плоского жесткого пуансона в пластичную полуплоскость при наличии на ее поверхности относительно тонкого упрочненного слоя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2001. – № 4. – С. 52–61.
10. Т р е т ь я к о в Е. М. Предельные контактные нагрузки при вдавливании плоского жесткого пуансона в пластичную полуплоскость с поверхностным упрочненным слоем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – № 1. – С. 54–63.
11. Т р е т ь я к о в Е. М. Предельные напряжения и контактная прочность твердых тел с поверхностным упрочненным слоем // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2003. – № 2. – С. 54–62.
12. Т р е т ь я к о в Е. М. Механика пластического деформирования и предельные контактные напряжения для твердых тел с поверхностным упрочненным слоем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – № 3 (84). – С. 88–109.
13. Т р е т ь я к о в Е. М., С о р о к к о А. А. Экспериментальное исследование несущей способности поверхностного упрочненного слоя // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 5. – С. 134–140.
14. Р а б о т н о в Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
15. Ш т а е р м а н И. Я. Контактная задача теории упругости. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.

Статья поступила в редакцию 26.03.2012