

Условия возникновения конвекции жидкости в круглоцилиндрических полостях конечной высоты

А.М. Пылаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: pam@bmstu.ru

Выполненные исследования обусловлены потребностями в расчете тепловых режимов приборных отсеков космических аппаратов в условиях слабой гравитации. Обсуждены методы анализа возникающих внутренних конвективных движений вязкой теплопроводной жидкости или газа. Используются уравнения конвекции в приближении Буссинеска с применением линейной теории устойчивости. Приведены результаты для пространственных движений вокруг вертикальной оси с возможностью периодичности. Предусмотрены как постоянство, так и периодическая модуляция ускорения поля массовых сил. Решения задачи относительно искомым функций получены в форме двойных или тройных рядов типа Фурье, с бесконечными редуцируемыми системами уравнений для определения коэффициентов. Выявлено хорошее согласование результатов с известными данными. В вариантах с отношением высоты цилиндра к его радиусу не более 0,5 устойчивость равновесия наименьшая в части антисимметричных движений (при волновом числе $n = 1$) с границей раздела по вертикальной плоскости через ось цилиндра. Приведены примеры полей изолиний температур и вертикальных скоростей.

Ключевые слова: ряды Фурье, бесконечные алгебраические системы, линейные пространственные возмущения, изолинии.

Terms of Fluid Convection in Circular Cylindrical Cavities of the Finite Height

A.M. Pylaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pam@bmstu.ru

The research conducted is caused by the need to calculate thermal modes of spacecraft equipment modules in low gravity. In this work we examine the analysis methods of emerging internal convective motions in viscous fluid or gas. Within the research we use convection equations in Boussinesq approximation with linear stability theory. Thus, we obtain the results for spatial movement with the possibility of periodicity around the vertical axis. The constancy and periodical modulation of mass forces field acceleration are provided. Moreover, we solve the problem of the unknown functions in the form of double or triple Fourier series, with reducible infinite systems of equations for the coefficients. We find good agreement between the results and the known data. In variants with relation between the cylinder height and its radius $Z > 0,5$, stability of equilibrium is the least in respect of antisymmetric movements (with wave number $n = 1$) with the boundary section in the vertical plane through the cylinder axis. We illustrate the findings of the research with examples of temperature and vertical velocity isoline fields.

Keywords: *Fourier series, infinite algebraic systems, linear spatial disturbances, iso-line.*

Информация о критических движениях в замкнутых полостях необходима, в частности, в связи с потребностями расчета теплового режима приборных отсеков космических аппаратов в условиях слабой гравитации. При этом требования специалистов часто противоречивы. Если для роста кристаллов и исследования физических свойств материалов необходимо предельное ослабление конвекции, то для технических систем, например баков длительного хранения низкотемпературных компонентов топлива, желательно перемешивание компонентов [1]. В силу многообразия геометрии каналов (прослоек) в элементах конструкций, а также вариантов теплообмена на границе полостей (при наличии тепловых источников) представлялись реализуемыми и варианты с выполнением обязательного условия механического равновесия нагретой жидкости. В связи с этим разработан метод анализа линейных возмущений равновесия в полостях с несложным аналитическим описанием границы в сечении r, z , представляющих собой тела вращения относительно оси z . Предусмотрена компланарность ортов осей r и z с вектором g ускорения поля массовых сил. Учтена возможность линейных гармонических колебаний полости вместе с жидкостью.

Имелись в виду и другие приложения получаемых результатов, например, использование критических движений в роли естественного полного базиса для разложения конвективных движений в полости [2]. Обсуждаются возможности применения информации о критических движениях и для оценки микрогравитационных ускорений [1].

Интересующая проблема — это специфический случай явления конвективной устойчивости. Большинство возникающих при этом задач решается численными методами, например [3–5]. Однако такой подход требует повышенного внимания к получаемым результатам. Есть публикации с предложением использования в роли $Ra_{кр. \min}$ (минимумов критических чисел Рэлея ($Ra_{кр}$)) значений $Ra_{кр}$, соответствующих второй моде движений; первая же мода была не замечена и пропущена авторами, по-видимому, из-за малой интенсивности конвективного теплообмена [6]. Известно, что применение численных методов установления стационарного режима затруднительно (время установления по мере приближения к порогу устойчивости увеличивается). В связи с этим более перспективны варианты метода коллокаций [7, 8], использующего аналитическое представление результатов на дискретном множестве точек и особенно удобного в применении к областям с прямолинейными границами.

Повышен интерес и к чисто аналитическим возможностям получения и обработки интересующей информации, в отличие от численных методов установления, не требующих учета конкретных начальных условий, приводящих к возникновению конвекции.

Используются как точные [9, 10], так и приближенные [1, 12] методы расчета. Для цилиндров же конечной высоты со значительным повышением устойчивости вследствие действия сил вязкости вблизи дна и крышки строгих аналитических решений автором не найдено. Доступны публикации результатов, полученных либо существенно упрощенными методами, либо только для частных вариантов области решения [1, 6].

Постановка и метод решения задачи. Для системы уравнений естественной конвекции решается задача о собственных функциях и собственных числах $\{Ra_{кр}\}$, значениях критических чисел Рэлея, обеспечивающих ее нетривиальное решение при однородных условиях однозначности. Практическое использование приведенных результатов сводится к сопоставлению численных оценок критериев Рэлея $\{Ra\}$ для конкретных условий с соответствующими приводимыми в работе критическими значениями $\{Ra_{кр}\}$. Значения чисел $\{Ra\}$, деленные на теплопроводность жидкости, — это характеристики отношений подъемных сил вследствие температурной неоднородности плотности к силам вязкого трения; при этом $\{Ra_{кр}\}$ — это их максимально возможные значения при равновесии. Конвекция имеет место при $\{Ra > Ra_{кр}\}$.

Рассматриваются варианты возникновения конвекции, т. е. нарушения устойчивости равновесия (но не движения) жидкости. Анализируются поля локальных (неосредненных) скоростей и температурных возмущений равновесия при возможных неоднородных стационарных условиях. Для возмущений же применяются соответствующие однородные стационарные условия; вследствие малости этих возмущений задачи линейны. Используется идея Буссинеска только о линейной зависимости плотности от температуры. Здесь представляет интерес в основном сам факт возникновения движения, а не его интенсивность и дальнейшее развитие.

Для задач рассматриваемого типа применялся подход с реализацией метода Бубнова — Галёркина; решения для скорости или функции тока были только оптимальными (в смысле приближения к точным), без возможности оценки погрешности в определении $\{Ra_{кр}\}$. Автором предпринята модернизация названного подхода — построение решений в форме рядов типа Фурье с бесконечной, но редуцируемой алгебраической системой уравнений для коэффициентов в разложениях и с оценкой числа базисных функций, обеспечивающих требуемую точность расчета.

Применены линеаризованные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска, приведенные к безразмерному виду с масштабами L , θ_0 , LZ , a/L , $L^2/(va)^{0,5}$, $\nu\alpha a/L^2$ для расстояния, температуры, скорости, времени и давления последовательно. Здесь L и LZ — радиус и высота цилиндра; ρ , ν , a , θ_0 — среднее значение плотности, кинематическая вязкость и теплопроводность, константа равновесного градиента температуры соответственно. Преду-

смотрена периодическая модуляция последнего или ускорения поля массовых сил:

$$g = g_0(1 + \chi \sin(\Omega\tau)); \theta = \theta_0(1 + \Gamma\tau \sin(\Omega\tau)), \quad (1)$$

где Γ , Ω и χ — относительная амплитуда, безразмерные частота и параметр модуляции соответственно.

Применительно к трехмерным течениям из уравнений исключены возмущение давления p_1 и горизонтальные компоненты скорости; для этого к векторному уравнению движения применены операция rot rot и проектирование на ось z . Для вертикальной компоненты скорости V_z и возмущения температуры T_1 применена подстановка (n — волновое число возмущений):

$$T_1/t = V_z/v = \cos(n\Phi), \quad v = v(r, z, \tau), \quad t = t(r, z, \tau). \quad (2)$$

В итоге получены следующие два уравнения для амплитуд v и t :

$$\Delta\Delta v + \text{Ra} \Delta_1 \Delta t (1 + \chi \sin \Omega\tau) = \frac{\partial(\Delta v)}{\partial \tau} \text{Pr}^{-0.5}; \quad (3)$$

$$\Delta t + (1 + \Gamma \sin \Omega\tau) v = \frac{\partial t}{\partial \tau} \text{Pr}^{0.5}; \quad \Delta_1 \varphi = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - n^2 \varphi r^{-2}; \quad (4)$$

$$\Delta \varphi = \Delta_1 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad r \in (0; L), z \in (0; LZ),$$

где φ и ϑ — общее обозначение величин или их комплексов; Pr — число Прандтля.

Уравнения (3) и (4) использовались в цилиндрических координатах с полярным углом Φ в плоскости, нормальной оси z . При постоянных g и θ правые части в (3), (4) равны нулю. Используются следующие условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad v = \frac{\partial v}{\partial N} = \left(\frac{\partial t}{\partial N} \right)^{\gamma-1} t^{2-\gamma} = 0 \quad (5)$$

на осях вращения ($r = 0$, $\varphi \in \{v, t\}$) или на всех внешних границах полостей. В (5) γ — род условий для температуры ($\gamma \in \{1; 2\}$ при $r = L$; $\gamma = 1$ при $z \in \{0; LZ\}$); N — геометрическая нормаль к граничной поверхности (соответствующее условие получено с использованием уравнения неразрывности). Основная цель анализа — найти действительные значения $\text{Ra} > 0$ (собственных чисел), обеспечивающих нетривиальное решение — $\{v, t\}$ для системы (3)–(5). С их существованием и связывают неустойчивость равновесия жидкости. Собственные функции $\{v, t\}$ целесообразно искать в виде линейных суперпозиций s

базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям. При удачном выборе базиса хорошие результаты получаются уже при сравнительно небольшом числе s . Но в общем случае с конечным s применение метода приводит лишь к принципиально приближенному решению. Здесь использованы следующие разложения:

$$\begin{aligned} t &= \sum_w \sum_l \sum_s (B_{\varphi w} + D_{\varphi w}) f_2 \Psi; \\ v &= \sum_w \sum_l \sum_s (A_{\varphi w} + C_{\varphi w}) f_4 \Psi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varphi = wls$, $(w, l, s) \leq (W, L, S) \rightarrow \infty$; $\Psi = \text{HП}_\varphi$;

$$\begin{aligned} H &= \sin(\pi lr/L) \sin(\pi sz/(LZ)), \quad f_\varphi = 1/(l^\varphi + s^\varphi); \\ \eta_w &= \cos(w\Omega\tau), \quad \zeta_w = \sin(w\Omega\tau); \quad \varphi = \{v, t\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь П_φ , П_ϑ — функциональные коэффициенты, вводимые для выполнения граничных условий; зависят от координат и в общем случае от $\{l, s\}$.

Подстановка (6) в уравнения (3) и (4), дифференцирование и переразложение выражений в левых частях уравнений приводило к рядам использованного типа, но с гораздо более сложной структурой коэффициентов. Наконец, после приравнивания таких коэффициентов их значениям в правых частях (нулевым) относительно $\{A_\varphi, C_\varphi\}$, $\{B_\varphi, D_\varphi\}$ получались бесконечные системы уравнений, для которых была доказана возможность редукции [12, 13]. Так, решение поставленной задачи было сведено к анализу определителей $\Theta(\text{Ra})$ конечного, хотя и достаточно большого порядка. Значения таких определителей, в силу нетривиальности решения обращаемых в нуль при искомым значениям Ra , вычислялись с привлечением внешней памяти ПК — с последовательным исключением групп переменных, с применением обращения матриц; $\Theta(\text{Ra})$ — сложная функция, часто с большим диапазоном абсолютных значений в пределах даже весьма узкого интервала изменения ее знака. Функции v и t также чувствительны к изменению Ra , но в меньшей степени.

В целях компактности пояснений для $\{\text{Ra}_{\text{кр}}\}$, критических чисел Рэлея использованы обозначения с четырьмя аргументами — индексами типа $R_{psn\gamma}$ или $R_{psn\gamma}$. Индекс p — геометрическая характеристика полости, убывающая с ростом Z ; значения $p = 1, \dots, 5$ последовательно соответствуют величинам $Z \in \{4; 2; 1; 0,5; 0,25\}$. Индекс $\gamma \in \{1, 2\}$ отмечает род боковых граничных условий для T ; $s \in \{1, \dots, s_{\text{max}} = 5\}$ — порядковый (по возрастанию) номер $\text{Ra}_{\text{кр}}$ при выбранных p и γ ; надежнее и практически более интересны значения $\text{Ra}_{\text{кр}}$ при $s < 4$. Наконец,

n — волновое число; расчеты проводились при $n \in \{0; 1; 2\}$, поэтому любому конкретному набору $\{p, r, \gamma\}$ соответствуют три значения $\{Ra_{кр}\}$; индексы $\underline{n} \in \{1, 2, 3\}$ с чертой снизу, в отличие от значений $\{n\}$, в записанном порядке относятся к меньшему, промежуточному и большему из этих значений. В последнем случае используется обозначение типа $n_{psn\gamma}$ для волнового числа, при котором получено конкретное $Ra_{psn\gamma}$. Цифры или буквы в индексах могут разделяться запятыми. В обозначениях величин может сохраняться только один различающийся индекс — в случае совпадения трех остальных; например, $DRa_\varphi = Ra_{\varphi+1} - Ra_\varphi$ — для разностей $Ra_{кр}$, относящихся к большему и меньшему из соседних по возрастанию значений φ .

Основные результаты и их обсуждение. Результаты расчетов при условиях постоянства равновесного градиента температуры и ускорения поля массовых сил представлены на рис. 1–7 и в табл. 1–3. На рис. 1 и 2 последовательно приведены значения десятичных логарифмов $\{L_{кр}\}$, затем — функций от характерных разностей $\{DRa_{кр}\}$, соответствующих

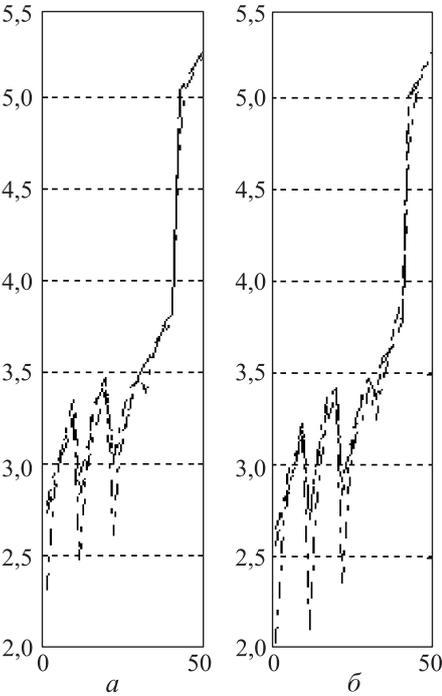


Рис. 1. Зависимость десятичных логарифмов $\{L_{кр}\}$ от чисел Рэлея $\{Ra_{кр}\}$ при $\gamma = 1$ (условия 1-го рода на боковых поверхностях) (а) и $\gamma = 2$ (б)

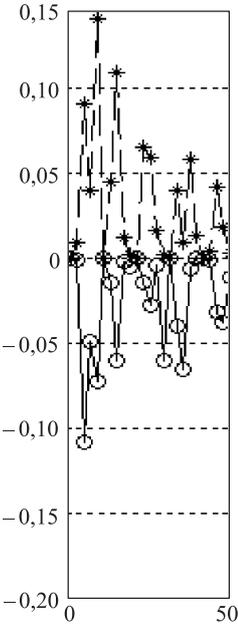


Рис. 2. Минимальные (по волновым числам n) разности $\{DR_s\}$ соседних по возрастанию значений $Ra_{кр}$, $s = 1, \dots, 4$ во всех рассмотренных вариантах:

○ — $\gamma = 1$; * — $\gamma = 2$

числам Рэля $\{Ra_{ps\gamma}\}$ ($s = 1, \dots, 5; p = 1, \dots, 5; s = 5(p-1) + s \in \{1, \dots, 25\}$) при сквозной нумерации. На всех кривых расстояние по горизонтали между соседними значениями равно двум единицам осевого отрезка. На рис. 1 приведены кривые ($n \in \{1; 2; 3\}$), соответствующие значениям $\gamma = 1$ (рис. 1, а) или $\gamma = 2$ (рис. 1, б) для боковых поверхностей. Отметим, что значения $\{Ra_{кр}\}$ на каждой кривой (см. рис. 1, а) не меньше соответствующих значений на кривых, показанных на рис. 1, б.

На рис. 2 приведены кривые для разностей $\{\{\min\}_{\{n\}} DRa_s = (Ra_{p(s+1)\gamma} - Ra_{ps\gamma}), s = 1, \dots, 4, p = 1, \dots, 5\}$ между значениями для минимального $Ra_{кр}$ при $(s+1)$ и для соответствующего максимального при s . Получено, что все разности неотрицательны; значит, при любых вариантах n во всех случаях $Ra_{s+1} \geq Ra_s$. При этом обозначения * или o использованы для результатов при $\gamma = 2$ (с изменением знака) или $\gamma = 1$.

На рис. 3 приведены отношения $\{F_s = DRa_\gamma / (DRa_s), n = 1, \dots, 3\}$ разностей значений $\{Ra_{кр}\}$, s -х по возрастанию при $\gamma = 1$ и $\gamma = 2$, к разностям $\{Ra_{кр}\}$ $(s+1)$ -го и s -го при $\gamma = 2$. Видно, что всегда $F_s \in [0; 1]$. Получается, что при совпадении $\{n\}$ каждое s -е ($s = 1, \dots, 4$) значение $Ra_{кр}$ при $\gamma = 1$ строго попадает в интервал $[Ra_s; Ra_{s+1}]$ с $\gamma = 2; n \in \{0; 1; 2\}$.

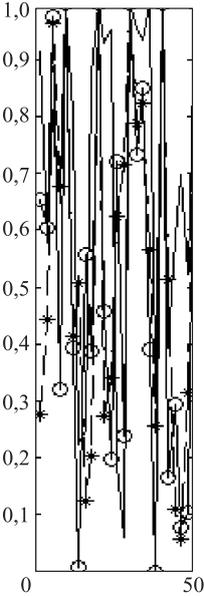


Рис. 3. Отношения разностей значений $\{Ra_{кр}\}$ s -х по возрастанию при $\gamma = 1$ и $\eta = 2$ к разностям $\{Ra_{кр}\}$ $(s+1)$ -го и s -го при $\gamma = 2, s = 1, \dots, 4$:

o — $n = 0$; * — $n = 1$; --- $n = 2n = 1$

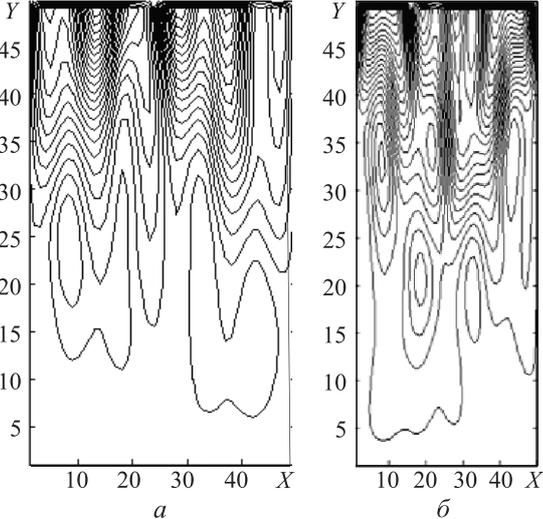


Рис. 4. Поля изотерм в возмущениях с волновым числом $n = 0$ при $s = 1$ (а) и $s = 2$ (б) по возрастанию значений $Ra_{кр}$ в случае боковых граничных условий 1-го рода для T ($\gamma = 1$); отношение высоты цилиндра к его радиусу $Z = 2$

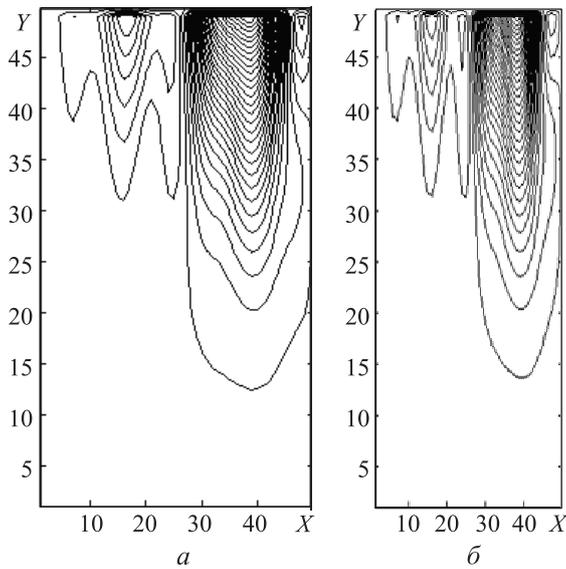


Рис. 5. Поля изолиний вертикальных скоростей при $n = 0, s = 1$ (а) и $s = 2$ (б), $\gamma = 1, Z = 2$

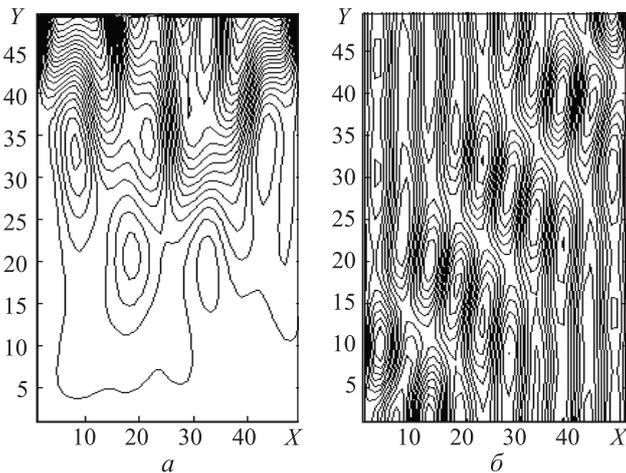


Рис. 6. Изотермы при $Z = 2, s = 1, \gamma = n = 1$ (а); $\gamma = 2$ и $n = 0$ (б) (см. пояснения к рис. 4)

На рис. 4, 6, 8 приведены примеры полей изотерм; на рис. 5, 7, 9 — полей изолиний вертикальных скоростей.

Анализ этой информации подтверждает отдельную (при постоянстве других характеристик) зависимость картины изолиний от рода граничных условий (γ) на боковых поверхностях (рис. 4, а; 5, а и б, б; 7, б), от Z (отношения высоты цилиндра к его радиусу, см. рис. 8, 9 и 6, б; 7, б), от волнового числа n движений (см. рис. 4, а; 5, а и б, а; 7, а), а также (см. рис. 4, 5) от порядкового номера s выбранного числа в возрастающей последовательности $\{Ra_{кр}\}$.

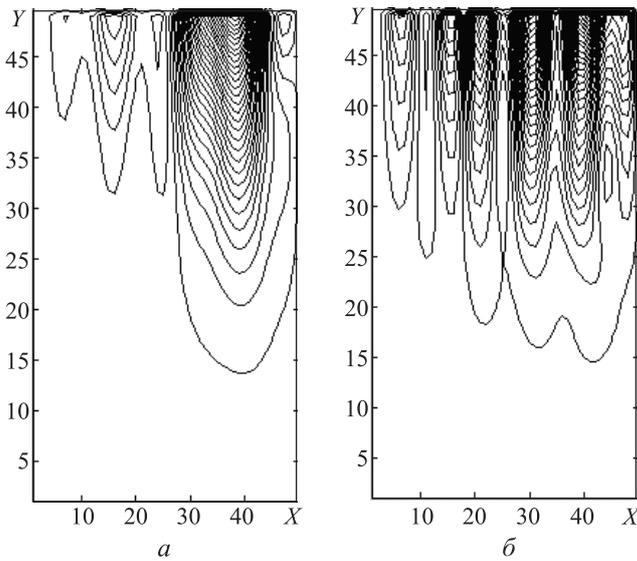


Рис. 7. Изолинии вертикальных скоростей при $Z = 2$, $s = 1$, $\gamma = n = 1$ (а); $\gamma = 2$ и $n = 0$ (б)

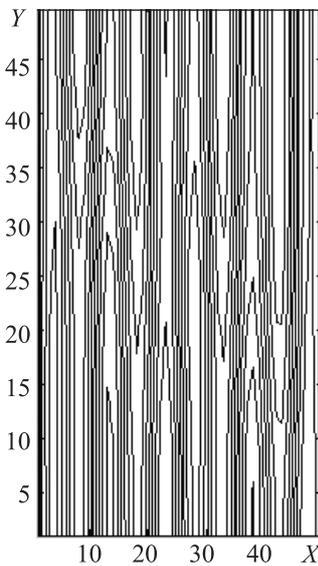


Рис. 8. Изотермы при $s = 1$, $\gamma = 2$, $Z = 0,5$, $n = 0$ (см. пояснения к рис. 4)

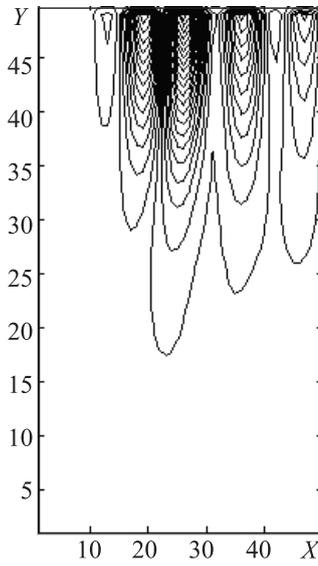


Рис. 9. Изолинии вертикальных скоростей при $s = 1$, $\gamma = 2$, $Z = 0,5$, $n = 0$

Видно, что влияние $\{\gamma\}$ на боковой границе особенно существенно на картине изотерм и что неравномерность вертикальных скоростей наблюдается преимущественно в верхней части цилиндров.

В табл. 1 ($s \in \{1, \dots, 15\}$) и табл. 2 ($s \in \{16, \dots, 30\}$) приведены значения $\{n_{psny}\}$, соответствующие размещению результатов на рис. 1, а (первые три строки) и б (остальные строки).

Волновые числа n для результатов, показанных на рис. 1

Граничные условия	Число s линейных суперпозиций														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\gamma = 1$	<u>1</u> 0 2 <u>1</u>	1 02 20	1 0 22	0 12 2	0 21 2	<u>1</u> 20 <u>12</u>	2 1 02	2 01 10	2 0 11	2 01 10	<u>1</u> 02 <u>12</u>	1 0 21	1 20 01	2 1 00	2 10 1
$\gamma = 2$	0 2	1	1 0	01	1 0	0	10	2	02	2	0	02	2	1 2	02

Таблица 2

Волновые числа n для результатов, показанных на рис. 1

Граничные условия	Число s линейных суперпозиций														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\gamma = 1$	<u>02</u> 1 <u>2</u>	0 2 1	0 2 1	0 2 1	2 0 1	<u>0</u> 2 1	0 1 2	0 1 2	0 2 1	0 2 1	<u>1</u> 0 2	1 0 2	1 0 2	1 0 2	1 0 2
$\gamma = 2$	0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	2 0 1	<u>0</u> 2 1	0 2 1	0 2 1	0 2 1	0 2 1	<u>1</u> 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0	1 2 0

Пары столбцов в табл. 3 последовательно содержат значения $\{Ra_{кр}\}$ для случаев с $Z \in \{4; 2; 1; 0,5; 0,25\}$. В нечетных столбцах — числа $\{Ra_{кр}\}$, полученные при $\gamma = 1$; в четных — при $\gamma = 2$. В строках 1–6 (после пояснений) — минимальные $\{Ra_{кр}\}$ при $n \in \{0; 1; 2\}$ последовательно; в трех первых строках — результаты, полученные автором, в остальных — приведенные в [1]. В рассмотренных вариантах наибольшие значения $\{Ra_{кр,б}\}$ для каждой группы $\{Z; n \in \{0; 1; 2\}\}$ подчеркнуты снизу; наименьшие же значения $\{Ra_{кр,м}\}$ имеют место при $\{Z \geq 0,5; n = 1\}$ и при $\{Z = 0,25; n = 0\}$. Отметим пересечение интервалов $[Ra_{кр,м}; Ra_{кр,б}]$ для различающихся $\{Z\}$. В последней строке табл. 3 приведены вторые по возрастанию значению ($s = 2$) $\{Ra_{кр}\}$, полученные при $n = 0$ для вариантов $\{Z; \gamma\}$.

В [1] для рассматриваемой задачи строго решено только уравнение энергии и только при несложной аппроксимации скорости, хотя и логически обоснованной, но без проверки удовлетворения уравнениям движения. При анализе добавляются и погрешности вследствие использования графической информации. Это и объясняет рассогласование результатов в табл. 3 заметное, хотя и не очень существенное.

Рассматривалась информация, приведенная в работе [2], в связи с наземным испытанием модели датчика «Дакон-М» (цилиндр с размерами 100 мм ($Z = 2$), заполняемый CO_2 под давлением примерно 2,5 атм).

Критические числа Рэлея $\{10^{-2} \cdot Ra_{кр.мин}$ при выборе $(Z, \gamma, n)\}$

Значения $Ra_{кр}$	Z/γ									
	4/1	4/2	2/1	2/2	1/1	1/2	0,5/1	0,5/2	0,25/1	0,25/2
полученные автором настоящей статьи	5,44	<u>4,5</u>	6,61	<u>4,93</u>	9,92	<u>7,82</u>	24,44	17,36	611,9	530,3
	2,05	1,07	3,01	1,26	4,07	2,16	<u>36,2</u>	18,77	<u>1114</u>	<u>1053</u>
	<u>5,97</u>	3,63	<u>8,72</u>	4,85	<u>10,5</u>	6,81	34	<u>20,79</u>	1019	1006
приведен- ные в лите- ратуре [1] при $s = 2$, $n = 0$	4,87	<u>4,47</u>	6,91	<u>4,87</u>	8,67	<u>7,5</u>	24,5	21,5	600	560
	2,51	0,75	2,73	1	4,87	2,37	<u>36,1</u>	21,5	> <u>1000</u>	> <u>1000</u>
	<u>7,5</u>	3,65	<u>8,66</u>	4,22	<u>10</u>	6,49	36,1	<u>21,5</u>	1000	1000
	6,93	5,94	9,24	5,47	13,3	9,1	38,78	26,91	945,5	1028

В [2] пояснена приближенная применимость результатов при $\gamma = 1$ и приведены значения $Ra_{кр.расч} = 11000$ и $Ra_{кр.эксп} = 10\ 700$ (2009 г.), а также $Ra_{кр.расч} = 9000$ (2008 г.); отмечено, что при $Ra_{кр.эксп} = 8500$ равновесие еще не нарушалось. В роли линейного масштаба L использовали диаметр, а при переходе к радиусу получилась бы последовательность чисел $\{687; 669; 563; 531\}$. Два последних значения близки к $Ra_{кр} = 493$ ($\gamma = 2$), а два первых — практически совпадают со значениями при $\gamma = 1$.

В [6] при $Z = 2$ и, по-видимому, при $n = 0$ приведены результаты — $Ra_{кр} = 1001$ ($\gamma = 1$) и $Ra_{кр} = 472$ ($\gamma = 2$), первый близок ко второму по возрастанию значению $Ra_{кр} = 924$ (см. табл. 3, последняя строка). Автором же получено более жесткое условие устойчивости ($Ra_{кр} = 661$), близкое к приведенным в работах [1, 2] и подтверждаемое изолиниями на рис. 4, а и 5, а. Видно, что неравномерность температур и скоростей имеет место и при значении $Ra = 661$. Правда, только по характеру изолиний нельзя определить степень интенсивности конвекции. Возможно, из-за ее относительной малости авторы работы [6] и не отметили это значение.

Проанализированы и результаты, приведенные в [14] для прямоугольных параллелепипедов (единичной высоты со стороной h горизонтального основания) при идеальной теплопроводности всей границы ($\gamma = 1$) и, по-видимому, при нулевом значении волнового числа n . При условии независимости температурного градиента от h (в роли масштаба размеров) получено, что $Ra_{кр} \in \{1250; 3000; 16\ 800\}$ для случаев $h \in \{0,5; 1; 2\}$. Это сопоставимо с результатами, приведенными в табл. 3 при $Z \in \{2; 1; 0,5\}$ соответственно. Однако, если приведенные в [14] значения действительно минимальны, очевидна относительно меньшая устойчивость равновесия в цилиндрических полостях.

Заключение. При решении задачи об устойчивости равновесия жидкости эффективный подход, близок к строго аналитическому — с использованием линейной редуцируемой системы уравнений, алгебраической относительно числа Рэлея Ra .

Получены значения чисел Рэлея $Ra_{кр}$ и картины критических течений для круглоцилиндрических полостей с отношениями высоты к радиусу $Z \in \{4; 2; 1; 0,5; 0,25\}$. Анализ результатов подтверждает даже раздельную (при постоянстве других характеристик) зависимость картины изолиний от Z , рода граничных условий γ на боковых поверхностях, от волнового числа n движений, а также от порядкового номера s выбранного числа в возрастающей последовательности $\{Ra_{кр}\}$.

В рассмотренных вариантах при $Z > 0,5$ устойчивость равновесия минимальна в отношении антисимметричных движений (при $n = 1$) с границей раздела по вертикальной плоскости через ось цилиндра; если же $Z \leq 0,5$, то устойчивость равновесия минимальна при $n = 0$. Устойчивость относительно больше при боковой теплопроводности границ ($\gamma = 1$) и возрастает вместе с Z .

Имеет место пересечение интервалов $[Ra_{кр,м}; Ra_{кр,б}]$ между наименьшим и наибольшим значениями $\{Ra_{кр}\}$ для каждой группы $\{Z; n \in \{0; 1; 2\}\}$. Выявлено, что разности минимальных (по n) значений $Ra_{кр}$, $(s + 1)$ -х по возрастанию и соответствующих максимальных значений при s , всегда неотрицательны, а при совпадении $\{n\}$ каждое s -е значение $Ra_{кр}$ при $\gamma = 1$ строго попадает в интервал $[Ra_s; Ra_{s+1}]$ при $\gamma = 2; n \in \{0; 1; 2\}$.

Полученные результаты согласуются с известными литературными данными. Сделан вывод о надежности и эффективности использованных программ для ПК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Полежаев В.И., Сазонов В.В. Механика невесомости и гравитационно-чувствительные системы // Аннотации докл. науч.-иссл. семинара. Препринт № 898. М.: ИПМ РАН, 2009. 36 с.
3. Дёмин В.А. Конвективная устойчивость и теплоперенос в жидкости при воздействии высокочастотных пульсаций // Труды Третьей Рос. нац. конф. по теплообмену. Свободная конвекция. М.: МЭИ, 2002. Т. 3. С. 64–67.
4. Полежаев В.И., Соболева Е.Б. Конвекция Рэлея — Бенара в околокритической жидкости вблизи порога устойчивости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 48–61.
5. Калинин Е.И., Мазо А.Б. Теплообмен при свободной конвекции в канале с нагревателями различной формы // Труды Пятой Рос. нац. конф. по теплообмену. Свободная конвекция. М.: МЭИ, 2010. Т. 3. С. 82–85.
6. Crespodel A., Bontoux P., Sani R.L., Hardin G., Extremet' G.P. Steady and oscillatory convection in vertical cylinders heated from below. Numerical simulation of asymmetric flow regimes // Adv. Space Res. 1988. Vol. 8. No. 12. P. 281–292.

7. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье — Стокса // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 4. С. 442–445.
8. *Пивоваров Д.Е., Полежаев В.И.* Структуры течения и особенности теплообмена в наклонных слоях // Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях. 2009. Т. 2. С. 113–116.
9. *Слюсарёв М.И., Рязских В.И., Богер А.А., Поздняков М.В.* Анализ термоконвекции ньютоновской среды в прямоугольной каверне с вертикальными изотермическими стенками // Труды Пятой Рос. нац. конф. по теплообмену. Молодежная секция. М.: МЭИ, 2010. Т. 8. С. 130–133.
10. *Антимиров М.Я., Володко И.М.* Аналитическое решение задачи о поле температур при обтекании однородным потоком криволинейного источника тепла произвольной формы. Теплообмен // Тезисы докл. Минск, 2004. Т. 1. С. 24–27.
11. *Селезнёв В.Д., Косов В.Н., Поярко И.В., Федоренко О.В.* Влияние начальной концентрации компонентов на характер массопереноса в трехкомпонентных газовых смесях // Труды Пятой Рос. нац. конф. по теплообмену. Свободная конвекция. М.: МЭИ, 2010. Т. 3. С. 130–133.
12. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматлит, 1962. 709 с.
13. *Пылаев А.М.* Задача о критических конвективных движениях в горизонтально цилиндрических полостях // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 14–24.
14. *David B.* The plan forms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 191. No. 3. P. 247–288.

REFERENCES

- [1] Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M. Konvektivnaya ustoychivost' neszhimaemoy zhidkosti [Convective Stability of Incompressible Fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p.
- [2] Polezhaev V.I., Sazonov V.V. Mekhanika nevesomosti i gravitatsionno-chuvstvitel'nye sistemy [Mechanics of Weightlessness and Gravity Sensitive Systems]. Annotatsii dokl. nauch.-issled. seminarov [Abstracts of scientific research workshop]. Preprint no. 898. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha Publ, 2009. 36 p.
- [3] Demin V.A. Convective Stability and Heat Transfer in the Fluid under the Influence of High-Frequency Fluctuations. *Tr. Tret'ey Ross. nats. konf. po teploobmenu. Svobodnaya konveksiya* [Proc. of the Third Russian National Conference on Heat Transfer. Natural Convection]. Moscow, MEI Publ., 2002, vol. 3, pp. 64–67 (in Russ.).
- [4] Polezhaev V.I., Soboleva E.B. Konveksiya Rayleigh-Benard Convection in a Near-Critical Fluid in the Neighborhood of the Stability Threshold. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40, iss. 2, pp. 209–220.
- [5] Kalinin E.I., Mazo A.B. Heat Transfer at Natural Convection in a Channel with Heaters of Various Shapes. *Tr. Pyatoy Ross. nats. konf. po teploobmenu. Svobodnaya konveksiya* [Proc. of the Fifth Russian National Conference on Heat Transfer. Natural Convection]. Moscow, MEI Publ., 2010, vol. 3, pp. 82–85 (in Russ.).
- [6] Crespodel Areo E., Bontoux P., Sani R.L., Hardin G., Extremet' G.P. Steady and oscillatory convection in vertical cylinders heated from below. Numerical simulation of asymmetric flow regimes. *Adv. Space Res.*, 1988, vol. 8, no. 12, pp. 281–292.
- [7] Isaev V.I., Shapeev V.P. High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier — Stokes equations. *Doklady Mathematics* [Proc. of the Russian Academy of Sciences], 2012, vol. 85, no. 1, pp. 71–74.
- [8] Pivovarov D.E., Polezhaev V.I. The Structure of Flow and Heat Transfer Characteristics in Inclined Layers. *Tr. XVII Shkoly-seminara molodykh uchenykh pod*

rukovodstvom akademika RAN A.I. Leont'eva "Problemy gazodinamiki i teplo-massoobmena v aerokosmicheskikh tekhnologiyakh" [Proc. of the XVII School-Seminar of young scientists under the leadership of RAS Academician A.I. Leontiev "Problems of Gas Dynamics and Heat and Mass Transfer in Aerospace Technology"]. Moscow, MEI Publ., 2009, vol. 2, pp. 113–116 (in Russ.).

- [9] Slyusarev M.I., Ryazhskikh V.I., Boger A.A., Pozdnyakov M.V. Analysis of Newtonian Medium Thermal Convection in a Rectangular Cavity with Vertical Isothermal Walls. *Tr. Pyatoy Ross. nats. konf. po teploobmenu. Molodezhnaya sektiya* [Proc. of the Fifth Russian National Conf. on Heat Transfer. Youth Workshop]. Moscow, MEI Publ., 2010, vol. 8, pp. 130–133 (in Russ.).
- [10] Antimirov M.Ya., Volodko I.M. Analytical Solution of the Problem of the Temperature Field in the Uniform Flow about the Curved Heat Source of Arbitrary Shape. Heat-and-Mass Transfer. *Tezisy dokl.* [Abstracts]. Minsk, 2004, vol. 1, pp. 24–27 (in Russ.).
- [11] Seleznev V.D., Kosov V.N., Poyarkov I.V., Fedorenko O.V. Effect of the Component Initial Concentration on the Nature of Mass Transfer in Three-Component Gas Mixtures. *Tr. Pyatoy Ross. nats. konf. po teploobmenu. Svobodnaya konveksiya* [Proc. of the Fifth Russian National Conference on Heat Transfer. Natural Convection]. Moscow, MEI Publ., 2010, vol. 3, pp. 130–133 (in Russ.).
- [12] Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhenny metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 709 p.
- [13] Pylaev A.M. Problem of Critical Convective Flows in Horizontal-Cylindrical Cavities. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40, iss. 3, pp. 349–358.
- [14] David B. The plan forms and onset of convection with a temperature-dependent viscosity. *J. Fluid Mech.*, 1988, vol. 191, no. 3, pp. 247–288.

Статья поступила в редакцию 07.05.2015

Пылаев Анатолий Михайлович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплофизика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Pylaev A.M. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Thermophysics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Пылаев А.М. Условия возникновения конвекции жидкости в круглоцилиндрических полостях конечной высоты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 3. С. 23–36.

DOI: 10.18698/0236-3941-2016-3-23-36

Please cite this article in English as:

Pylaev A.M. Terms of Fluid Convection in Circular Cylindrical Cavities of the Finite Height. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2016, no. 3, pp. 23–36.

DOI: 10.18698/0236-3941-2016-3-23-36