

ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ДВУХОСНОЙ ТЕЛЕЖКИ С УПРУГИМ ТЕЛОМ ПО ДВУХРЕЛЬСОВОМУ КРИВОЛИНЕЙНОМУ ПОЛОТНУ

В.А. Гнездилов, С.В. Русских

МАИ (НИУ), Москва, Российская Федерация

e-mail: gnezdilov_07@mail.ru; sergey.russkikh@rambler.ru

Рассмотрено нестационарное движение упругого тела, расположенного на абсолютно жесткой тележке, скользящей на упругих роликах по произвольному криволинейному полотну с двумя эквидистантными направляющими рельсами. Полотно задано уравнениями пространственного изгиба и кручения его средней линии. Контакт тележки с рельсами осуществляется через нелинейно-упругие ролики задней ведущей оси, жестко связанной с тележкой, и передней оси, соединенной с ней сферическим шарниром. Разработана новая нелинейная математическая модель для расчета переносного и относительного движений тележки с упругим телом по полотну с определением контактных реакций и перегрузок. Проведено геометрическое моделирование кинематики движения двухосной тележки, в котором считается расстояние между осями, малыми по сравнению с радиусом кривизны средней линии полотна. Получены соотношения, позволяющие дополнительно учесть кривизну средней линии между осями тележки. Динамика относительного движения упругого тела на тележке описана конечными деформациями в квадратичном приближении. Уравнения движения системы составлены с учетом нелинейной упругости и демпфирования роликов, на которых тележка безотрывно скользит по полотну с заданной скоростью или под действием заданной тяги.

Ключевые слова: упругое тело, тележка, движение по криволинейной направляющей, нелинейно-упругий ролик, математическая модель, реакция, перегрузка.

THE MOTION OF AN ABSOLUTELY RIGID BIAXIAL TROLLEY WITH AN ELASTIC BODY ALONG A DOUBLE RAIL CURVILINEAR TRACK

V.A. Gnezdilov, S.V. Russkikh

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

e-mail: gnezdilov_07@mail.ru; sergey.russkikh@rambler.ru

The research deals with the unsteady motion of an elastic body located on an absolutely rigid trolley moving on the elastic rollers along an arbitrary curvilinear track with two equidistant guide rails. The track is defined by the equations of bending and torsion of its midline. The contact between the trolley and the rails is carried out through the nonlinear elastic rollers of rear drive axle, rigidly connected with the trolley, and those of the front axle, coupled with it in the middle by the spherical hinge. We developed a new nonlinear mathematical model for calculating the relative and portable motions of a trolley with an elastic body along the surface and defined contact reactions and overloads. Initially, we conducted a geometric modeling of kinematic motion of a biaxial trolley, where the distance between the axes is considered to be small in comparison with the curvature radius of the trolley centerline. Next, we obtained the relations allowing us to further consider the curvature of the midline between the axes of the trolley. Then, we described

dynamics of the relative motion of an elastic body on the trolley by finite deformations in the quadratic approximation. Finally, we worked out equations of system motion taking into account the nonlinear elasticity and damping of the rollers, on which the trolley slides along the surface at a predetermined speed or under a given traction.

Keywords: elastic body, trolley, motion along a curvilinear track, nonlinear elastic rollers, a mathematical model, reaction, overloads.

Во многих областях техники и жизнедеятельности человека таких, как транспортные средства, перевозящие деформируемые (упругие, жидкие, сыпучие) материалы и людей, управляемые летательные и космические аппараты, движущиеся по заданной программной траектории, быстродействующие роботы-манипуляторы, возникают задачи механики, связанные с движением (скольжением или качением) твердых и деформируемых тел по криволинейным поверхностям и направляющим. К таким задачам относятся: пуск беспилотных самолетов и реактивных снарядов по направляющей балке; движение автомобилей и мотоциклов по неровной дороге; движение железнодорожного транспорта по длиннопролетным мостам, совершающим колебания при сильных порывах ветра и землетрясении; взлет самолета с палубы авианосца с трамплином; взлет и посадка самолета на тонком льду; сложное пространственное движение тележек с пассажирами по изогнутым и закрученным рельсовым направляющим, расположенным на эстакадах (“катальные горы”), динамика некоторых спортивных дисциплин и цирковых аттракционов и пр. [1–5].

Контактное взаимодействие между движущимся телом и поверхностью в общем случае осуществляется в нескольких точках посредством податливых колесных шин или роликов с амортизацией и описывается нелинейными упруговязкими двухсторонними, одно-сторонними или устранимыми связями. При решении таких задач ставятся различные требования, основными из которых являются функциональная безопасность, прочностная надежность, физиологическая переносимость перегрузок и вибраций, комфорт экипажа и пассажиров. Некоторые из этих задач могут быть сформулированы и решены в линейной постановке, а некоторые — в геометрически и/или физически нелинейной постановке. При этом в некоторых случаях для упрощения задачи тело, скользящее или катящееся по поверхности, может считаться абсолютно твердым или заменяться сосредоточенной массой, а поверхность, по которой движется тело, считается недеформируемой и слабоискривленной.

Некоторые задачи в настоящее время решены в той или иной постановке. Тем не менее, имеются нерешенные задачи и задачи, требующие решения в уточненной нелинейной постановке, в частности, при движении абсолютно твердых и упругих тел с большими углами поворота по сильно искривленным поверхностям (направляющим кривым). Цель настоящей работы — разработка общей математической

модели с обоснованиями для расчета движения упругого тела на абсолютно жесткой тележке, скользящей без отрыва на упруговязких роликах по произвольному двухрельсовому изогнутому и закрученному пространственному полотну. Настоящая статья является продолжением исследований плоского движения твердого тела на упругих колесах (роликах) по криволинейной направляющей [6].

Постановка задачи. Кинематические соотношения. Рассмотрим пространственную изогнутую и закрученную полосу с прямолинейными поперечными сечениями, с двумя направляющими линиями (рельсами) и постоянным расстоянием между ними. Геометрия этой полосы характеризуется параметрами изогнутой в двух плоскостях и нерастяжимой средней линии $\mathbf{R}_0(s) = [X_{01}(s) X_{02}(s) X_{03}(s)]^T$ и углом закручивания $\theta_1(s)$ поперечного сечения относительно касательной к этой линии, где s — длина дуги, отсчитываемая вдоль этой линии; X_{01} , X_{02} , X_{03} — координаты точки s_0 средней линии в неподвижной системе $O_*X_1X_2X_3$, ось X_2 которой направлена вверх противоположно вектору ускорения свободного падения g_0 (рис. 1).

По полотну на упругих роликах, размеры которых малы, безотрывно движется абсолютно жесткая двухосная тележка с расположенным на ней деформируемым телом. Связи между полотном и тележкой считаются двухсторонними, безотрывное качение роликов осуществляется двумя роликами, расположенными в вертикальной плоскости по разную сторону от рельса, однако в рассматриваемой модели движения два ролика заменяются одним с единственной точкой контакта. Трение между полотном и роликами отсутствует, т.е. в рассматриваемой модели полотно считается абсолютно гладкой поверхностью.

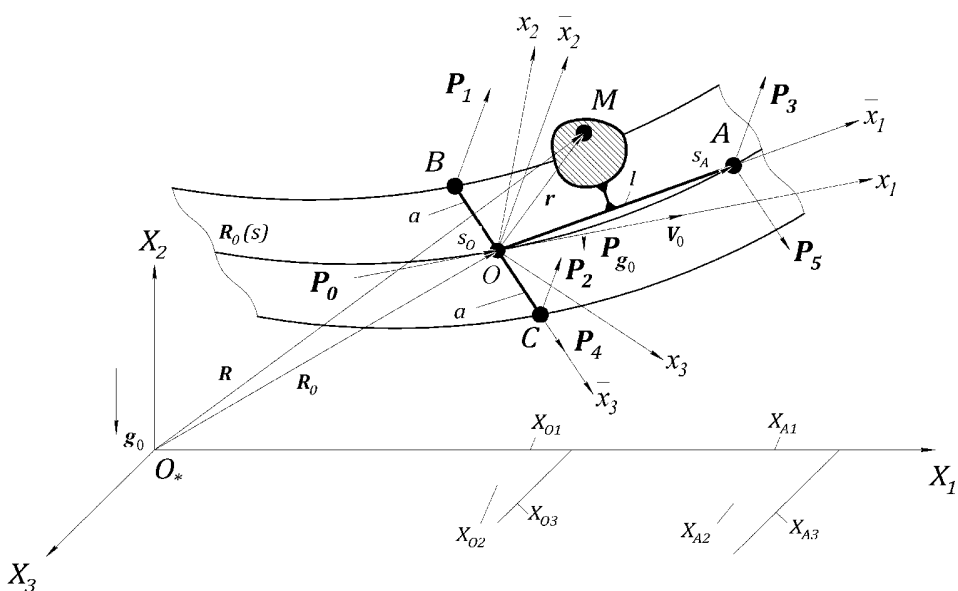


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи

Задняя ось жестко связана с тележкой, а передняя ось в середине связана с ней сферическим шарниром. При этом в расчетной модели два одинаковых ролика передней оси заменяются одним роликом, эквивалентным им по податливостям и движущимся по средней линии. Таким образом, по существу рассматривается трехроликовая тележка.

Подвижная система координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ с началом O на средней линии связана с тележкой: ее плоскость $O\bar{x}_1\bar{x}_3$ проходит через контактные точки недеформированных роликов передней оси (точка A) и задней оси (точки B и C); ось $O\bar{x}_1$ проходит через точку A ($OA = l$), а ось $O\bar{x}_3$ — через точки B и C ($OB = OC = a$) (см. рис. 1). Точки B и C движутся по кривым, являющимся эквидистантами к $\mathbf{R}_0(s)$. Сначала для упрощения задачи рассмотрим случай, когда кривизной $\mathbf{R}_0(s)$ в пределах расстояния между осями можно пренебречь. Тогда подвижную систему координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ можно заменить на систему $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 1), в которой Ox_1 является касательной, Ox_2 — нормалью к кривой $\mathbf{R}_0(s)$ в точке $s = s_O$, а ось Ox_3 дополняет их до правой системы координат. При этом можно считать $s_A - s_O \approx l$. Далее для учета кривизны $\mathbf{R}_0(s)$ на длине $s_A - s_O$ систему $Ox_1x_2x_3$ довернем на малые углы для совмещения ее с системой $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Скорость тележки $\mathbf{V}_0(t)$ в точке O при условии, что она создается вращающимися роликами ведущей задней оси, направлена по касательной в точке O к кривой $\mathbf{R}_0(s)$; при этом $|\mathbf{V}_0(t)| = V_0(t) = ds/dt$. Считается, что задана скорость $V_0(t)$ или приложенная в точке O по касательной к кривой $\mathbf{R}_0(s)$ сила тяги $P_0(t)$. На движущуюся тележку со стороны полотна действуют реакции (см. рис. 1): P_1 и P_2 — реакции на заднюю ось, параллельные оси Ox_2 , приложенные соответственно в точках B и C ; реакция P_3 , приложенная в точке A на переднюю ось параллельно Ox_2 ; P_4 — реакция на заднюю ось вдоль Ox_3 и приложенная в точке O ; реакция P_5 на переднюю ось вдоль Ox_3 и приложенная в точке A .

Ролики из физически нелинейного вязкоупругого материала за счет контактного смятия допускают малые перемещения в направлении нормалей к плоскостям Ox_1x_2 и Ox_1x_3 , за счет этого тележка как твердое тело перемещается в направлении осей Ox_3 и Ox_2 и поворачивается относительно Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 .

Установленное на тележке деформируемое тело считается упругим. Точка M с координатами x_1, x_2, x_3 совершает относительные перемещения в направлениях этих координат $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$, $k = 1, 2, 3$, в состав которых входят перемещения тележки как твердого тела за счет деформаций роликов и перемещения, обусловленные деформациями тела. Конечные деформации (относительные удлинения $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ и углы сдвига $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$) определяются через проекции перемещения

на оси подвижной системы координат $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_3(x_1, x_2, x_3, t)$ через квадратично нелинейные соотношения [7, 8]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]; \dots;$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}; \dots,$$

которые справедливы при $\partial u_1 / \partial x_1 \ll 1$, $(\partial u_1 / \partial x_2)^2 \ll 1$, \dots ; $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$.

Введем векторные обозначения: $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{r}$, где $\mathbf{\Lambda}$ — матрица перехода от системы $O_* X_1 X_2 X_3$ к системе $O x_1 x_2 x_3$ ($\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^T$). Вращение системы $O x_1 x_2 x_3$ относительно $O_* X_1 X_2 X_3$ будем характеризовать заданными самолетными углами θ_1 , θ_2 и θ_3 , представляющими собой соответственно углы крена, рыскания и тангажа, с последовательностью поворотов $\theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_1$. Вектор углов поворота будем обозначать через $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$. Матрица $\mathbf{\Lambda}$ записывается в виде [1, 7, 8]

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & -s_2 c_3 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 & s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3 \\ c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3 & -s_1 c_3 & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix},$$

где $s_k \equiv \sin \theta_k$, $c_k \equiv \cos \theta_k$ ($k = 1, 2, 3$). Поскольку ось Ox_1 подвижной системы координат в рассматриваемом приближении является касательной к $\mathbf{R}_0(s)$ в точке s_0 , углы поворота θ_2 и θ_3 выражаются через проекции вектора $\mathbf{R}_0(s)$ с помощью дифференциальных соотношений [9–11]:

$$\frac{dX_{01}}{ds} = c_2 c_3; \quad \frac{dX_{02}}{ds} = s_3; \quad \frac{dX_{03}}{ds} = -s_2 c_3,$$

а угол $\theta_1(s)$ задается независимо.

Вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ подвижной системы координат $O x_1 x_2 x_3$ выражается через вектор углов поворота $\boldsymbol{\theta}$ как [1, 7, 8]:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\theta}}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1 c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix}.$$

При решении геометрически нелинейных задач по методу Ритца или по методу конечных элементов перемещение упругого тела в общем случае может быть представлено в виде [7, 8] $\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\psi}_{ij}$, где $q_i(t)$ — обобщенные координаты; $i, j = 1, 2, \dots, n$;

$\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$, $\psi_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ — заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и др.) с учетом определенных допущений. Функции ψ_{ij} выражаются через φ_i и φ_j и являются симметричными, т.е. $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. Обобщенные координаты $q_i(t)$ при $i = 1, 2, \dots, n$ — упругие деформации тела.

Скорость и ускорение произвольной точки M упругого тела, связанного с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}; & \mathbf{a}_0 &= \dot{\mathbf{V}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0; \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

где \mathbf{a}_0 — вектор ускорения точки O . Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и его производная по времени $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ находятся из следующих соотношений:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} |\mathbf{V}_0|; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} + \mathbf{A} \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{ds^2} \right) \mathbf{V}_0^2 + \mathbf{A} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \left| \dot{\mathbf{V}}_0 \right|.$$

Для удобства записи векторное произведение заменяется матричным:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}; \quad \overset{\vee}{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если движущееся по направляющему полотну тело, связанное с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, является абсолютно жестким, а ролики — недеформируемыми, то задача в заданный момент времени t является задачей кинематики. Тогда после определения ускорения $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t)$ из уравнений динамического равновесия твердого тела с учетом силы тяжести находят главные вектор \mathbf{P} и момент \mathbf{M} реакций и затем — сами реакции. После этого можно выполнить расчеты на прочность конструкции тележки и всего сооружения вместе с полотном и опорными устройствами.

Если учитывается относительное движение, представленное вектором перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, обусловленное упругостью роликов и амортизации, а также упругим деформированием присоединенных к тележке масс, то задача существенно усложняется. При заданных векторных функциях $\mathbf{R}_0(s)$, $\boldsymbol{\theta}(s)$, скорости $\mathbf{V}_0(t)$ и найденной векторной функции $\boldsymbol{\omega}(t)$ задача сводится к задаче динамики относительного движения для обобщенных координат, характеризующих неизвестную векторную функцию $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$.

Нелинейные уравнения относительного движения. Разрешающие уравнения динамики тела, движущегося по произвольной поверхности, можно получить по аналогии с уравнениями возмущенного движения упругих летательных аппаратов по заданной программной траектории [1, 7, 8, 12].

Получим нелинейные уравнения динамики рассматриваемой системы для наиболее общего случая, учитывая относительное движение, обусловленное упруговязким деформированием роликов и конечными деформациями присоединенного упругого тела.

Уравнения движения системы для заданных векторов \mathbf{V}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ и обобщенных координат q_i составляются на основе принципа Даламбера–Лагранжа как для свободной системы с освобожденными связями, включая неизвестные реакции в число внешних сил:

$$\delta\Pi = \delta A_P + \delta A_{\text{ин}}, \quad (1)$$

где $\Pi[\mathbf{u}]$ — потенциальная энергия деформации системы; δA_P — вариация работы гравитационных сил, силы тяги P_0 и реакций $P_1 \dots P_5$ со стороны полотна, приложенных в точках с координатами $x_{1\nu}$, $x_{2\nu}$, $x_{3\nu}$; $\delta A_{\text{ин}}$ — вариация работы инерционных сил. Выражения для δA_P и $\delta A_{\text{ин}}$ имеют следующий вид:

$$\delta A_P = \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{g} dm + \sum_{\nu=0}^5 \delta \mathbf{u}_*^T(x_{1\nu}, x_{2\nu}, x_{3\nu}) P_\nu; \quad (2)$$

$$\delta A_{\text{ин}} = - \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{a} dm, \quad (3)$$

где $\delta \mathbf{u}_*$ — вариация перемещения любой точки тела с учетом вариаций смещения $\delta \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\Lambda} \delta \mathbf{R}_0$ и малого поворота $\delta \boldsymbol{\theta}$ подвижной системы координат

$$\delta \mathbf{u}_* = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \boldsymbol{\theta} \times \tilde{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{u}; \quad (4)$$

\mathbf{g} — вектор массовых сил тяготения (будет определен позднее); $dm = \rho dV$ — масса элемента тела, сохраняющая свою величину в процессе его деформирования; $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность тела; dV — элемент объема тела. Из выражения для вектора \mathbf{u} с учетом $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ получим

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \sum_i \delta q_i \tilde{\varphi}_i; & \dot{\mathbf{u}} &= \sum_i \dot{q}_i \tilde{\varphi}_i; \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \sum_i \ddot{q}_i \tilde{\varphi}_i + \sum_i \sum_j \dot{q}_i \dot{q}_j \psi_{ij}; & \tilde{\varphi}_i &= \varphi_i + \sum_j q_j \psi_{ij}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку вариации $\delta \mathbf{u}_0$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ и δq_i произвольны и независимы, из принципа Даламбера–Лагранжа (1) с учетом (2)–(5) следуют уравнения движения:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{a} dm &= \mathbf{P}; & \int_V \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{a} dm &= \mathbf{M}; \\ \int_V \tilde{\varphi}_i^T \mathbf{a} dm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, & i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_R$; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_R$; \mathbf{P}_R и \mathbf{M}_R — векторы равнодействующих сил и моментов от реакций; $Q_i = Q_{g,i}$. Векторы \mathbf{P}_g ($\mathbf{P}_g = -\mathbf{P}_{g_0}$), \mathbf{M}_g и $Q_{g,i}$ вычисляются как

$$\mathbf{P}_g = \int_V \mathbf{g} dm; \quad \mathbf{M}_g = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{g} dm; \quad Q_{g,i} = \int_V \tilde{\varphi}_i^T \mathbf{g} dm. \quad (7)$$

После преобразований система уравнений (6) с добавлением сил вязкого демпфирования по обобщенным координатам q_i записывается в виде ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} & m \mathbf{a}_0 - \tilde{\mathbf{L}}_0 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \ddot{q}_j - \\ & - (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{L}}_0 + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{L}}_j \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \mathbf{L}_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \mathbf{P}; \\ & - \tilde{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{I}}_{00} \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{0j} \ddot{q}_j + \\ & + (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{I}}_{00} + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{I}}_{0j} \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \mathbf{M}; \\ & \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \\ & + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j d_{ij} \dot{q}_j + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} m &= \int_V dm; \quad \tilde{\mathbf{L}}_0 = \int_V \tilde{\mathbf{r}} dm; \quad \tilde{\mathbf{L}}_i = \int_V \tilde{\varphi}_i dm; \\ \mathbf{L}_{ij} &= \int_V \boldsymbol{\psi}_{ij} dm; \quad \tilde{\mathbf{I}}_{00} = - \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}} dm; \\ \tilde{\mathbf{I}}_{0i} &= - \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\varphi}_i dm; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{0i} = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\varphi}_i dm; \\ \tilde{\mathbf{S}}_{0,ij} &= \int_V \tilde{\mathbf{r}} \boldsymbol{\psi}_{ij} dm; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{ij} = \int_V \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j dm; \\ \tilde{m}_{ij} &= \int_V \tilde{\varphi}_i^T \tilde{\varphi}_j dm; \quad \tilde{m}_{i,jk} = \int_V \tilde{\varphi}_i^T \boldsymbol{\psi}_{jk} dm; \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (9)$$

$d_{ij} = d_{ji}$ — коэффициенты вязкого демпфирования, которые обычно определяются на основании экспериментальных данных. Первые два уравнения (8) используются для определения реакций $P_1 \dots P_5$ и силы тяги P_0 , а третье уравнение представляет собой уравнение относительного движения. В выражениях (9) инерционные характеристики,

отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ и $\tilde{\varphi}_i$.

Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде [13]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31}]^T$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}]^T$ — векторы, составленные из компонент деформаций и напряжений; вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ представляет начальные нестесненные температурные или технологические деформации; \mathbf{C} — симметричная матрица коэффициентов упругости, входящих в уравнения закона Гука.

Вектор массовых сил тяготения вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{g} = -g_0 \boldsymbol{\nu}; \quad \boldsymbol{\nu} = \Lambda [0 \ 1 \ 0]^T, \quad (10)$$

где g_0 — ускорение свободного падения (модуль вектора \mathbf{g}_0); $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси X_2 неподвижной системы координат $O_* X_1 X_2 X_3$ и записанный в проекциях на оси подвижной системы. Гравитационные силы и моменты (7) с учетом (10) описываются следующими выражениями:

$$\mathbf{P}_g = -g_0 m \boldsymbol{\nu}; \quad \mathbf{M}_g = -g_0 \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 \boldsymbol{\nu}; \quad Q_{g,i} = -g_0 \tilde{\mathbf{L}}_i^T \boldsymbol{\nu}.$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: шесть уравнений второго порядка для шести компонент векторов \mathbf{P}_R , \mathbf{M}_R и n уравнений для обобщенных координат $q_1, q_2 \dots q_n$.

Если движущееся по направляющему полотну тело и ролики считаются абсолютно жесткими ($q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$), то уравнения (8) упрощаются

$$m \mathbf{a}_0 - \overset{\vee}{\mathbf{L}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} - \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\mathbf{L}}_0 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}; \quad -\overset{\vee}{\mathbf{L}}_0^T \mathbf{a}_0 + \mathbf{I}_{00} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_{00} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (11)$$

При известных векторах \mathbf{V}_0 , $\boldsymbol{\omega}$, полученных при решении кинематической задачи, из уравнений (11) определяются главные вектор \mathbf{P} и момент \mathbf{M} сил реакции и затем — сами реакции.

Учет влияния кривизны полотна между осями. В задаче, сформулированной ранее, предполагалось, что расстояние между осями тележки мало по сравнению с кривизной центральной линии, ролики передней и задней осей в данный момент времени находятся на прямой, касательной к кривой $\mathbf{R}_0(s)$ в точке $s = s_O$. В случае двухосной тележки со свободно поворачивающейся относительно центра

передней осью при движении по сильно искривленному пространственному полотну ролики задней и передней осей будут находиться в точках $s = s_O$ и $s = s_A$ кривой $\mathbf{R}_0(s)$ с различными углами наклона касательной. Локальная кривизна полотна между осями окажет некоторое влияние на угловое положение тележки в данный момент времени и на кинематику и динамику ее движения.

Учтем влияние локальной кривизны направляющей $\mathbf{R}_0(s)$ между осями тележки. Введем систему координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, ось $O\bar{x}_1$ которой проходит через точку A , (см. рис. 1). Матрицу перехода от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ будем обозначать через Λ^* , а матрицу перехода от системы координат $O_*X_1X_2X_3$ к $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ — через $\bar{\Lambda}$. Очевидно, что выполняются соотношения $\bar{\Lambda} = \Lambda^* \Lambda$, $\Lambda^* = \bar{\Lambda} \Lambda^T$.

Естественная координата s_A точки A находится из следующего трансцендентного уравнения при известной координате $s_O = \int_0^t |\mathbf{V}_0(t)| dt$:

$$l^2 = (X_{01}(s_A) - X_{01}(s_O))^2 + (X_{02}(s_A) - X_{02}(s_O))^2 + (X_{03}(s_A) - X_{03}(s_O))^2.$$

Если кривизна кривой $\mathbf{R}_0(s)$ небольшая, то можно приближенно полагать, что $s_A \approx s_O + l$.

Введем вектор $\Delta \bar{\mathbf{R}}$, который характеризует разность соответствующих координат точек O и A :

$$\Delta \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} X_{01}(s_A) - X_{01}(s_O) \\ X_{02}(s_A) - X_{02}(s_O) \\ X_{03}(s_A) - X_{03}(s_O) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_1 \\ \Delta \bar{X}_2 \\ \Delta \bar{X}_3 \end{bmatrix}.$$

Углы поворота системы координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ будем обозначать как

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 + \Delta\theta_1; \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2; \quad \bar{\theta}_3 = \theta_3 + \Delta\theta_3, \quad (12)$$

где $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ — малые углы ($\sin \Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i$, $\cos \Delta\theta_i \approx 1$, $i = 1, 2, 3$). При этом с учетом (12) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \sin(\theta_i + \Delta\theta_i) \approx s_i + \Delta\theta_i c_i; \\ \bar{c}_i &= \cos(\theta_i + \Delta\theta_i) \approx c_i - \Delta\theta_i s_i. \end{aligned}$$

Заметим, что если угол $\Delta\theta_2$ немалый, то необходимо, чтобы задняя ось соединялась с тележкой шарнирно, как и передняя ось. Матрица перехода $\bar{\Lambda}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)$ определяется так же, как матрица $\Lambda(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ с заменой $s_i \rightarrow \bar{s}_i$, $c_i \rightarrow \bar{c}_i$. С точностью до линейных членов с $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ получим

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_1} \Delta\theta_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3, \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3 & -s_1 c_3 & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 \\ -s_1 s_2 + c_1 c_2 s_3 & -c_1 c_3 & -s_1 c_2 - c_1 s_2 s_3 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} -s_2 c_3 & 0 & -c_2 c_3 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3 & 0 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 s_3 \\ c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 & 0 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 s_3 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} -c_2 s_3 & c_3 & s_2 s_3 \\ -c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_3 & c_1 s_2 c_3 \\ s_1 c_2 c_3 & s_1 s_3 & -s_1 s_2 c_3 \end{bmatrix}.$$

Уравнение для вектора $\bar{\mathbf{r}}$ в точке A $\bar{\mathbf{r}}_A = \bar{\Lambda} \bar{\Delta} \bar{\mathbf{R}}$ при $\bar{x}_{1A} = l$, $\bar{x}_{2A} = 0$, $\bar{x}_{3A} = 0$ с учетом (13) запишем в виде

$$\left[\Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 \right] \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_1 \\ \Delta \bar{X}_2 \\ \Delta \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям, из которых определяются углы $\Delta \theta_1$, $\Delta \theta_2$ и $\Delta \theta_3$:

$$\begin{aligned} l_{10} + l_{11} \Delta \theta_1 + l_{12} \Delta \theta_2 + l_{13} \Delta \theta_3 &= l; \\ l_{20} + l_{21} \Delta \theta_1 + l_{22} \Delta \theta_2 + l_{23} \Delta \theta_3 &= 0; \\ l_{30} + l_{31} \Delta \theta_1 + l_{32} \Delta \theta_2 + l_{33} \Delta \theta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_{10} &= c_2 c_3 \Delta \bar{X}_1 + s_3 \Delta \bar{X}_2 - s_2 c_3 \Delta \bar{X}_3; \\ l_{20} &= (s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 + c_1 c_3 \Delta \bar{X}_2 + (s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{30} &= (c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 - s_1 c_3 \Delta \bar{X}_2 + (c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{11} &= 0; \\ l_{12} &= -s_2 c_3 \Delta \bar{X}_1 - c_2 c_3 \Delta \bar{X}_3; \\ l_{13} &= -c_2 s_3 \Delta \bar{X}_1 + c_3 \Delta \bar{X}_2 + s_2 s_3 \Delta \bar{X}_3; \\ l_{21} &= (c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 - s_1 c_3 \Delta \bar{X}_2 + (c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{22} &= (s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 - (s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{23} &= -c_1 c_2 c_3 \Delta \bar{X}_1 - c_1 s_3 \Delta \bar{X}_2 + c_1 s_2 c_3 \Delta \bar{X}_3; \\ l_{31} &= (-s_1 s_2 + c_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 - c_1 c_3 \Delta \bar{X}_2 - (s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{32} &= (c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3) \Delta \bar{X}_1 - (c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3) \Delta \bar{X}_3; \\ l_{33} &= s_1 c_2 c_3 \Delta \bar{X}_1 + s_1 s_3 \Delta \bar{X}_2 - s_1 s_2 c_3 \Delta \bar{X}_3. \end{aligned}$$

В результате с учетом найденных значений $\Delta \theta_1$, $\Delta \theta_2$ и $\Delta \theta_3$ определяется переходная матрица $\bar{\Lambda}$ для подвижной системы координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, которая по сравнению с матрицей Λ учитывает влияние кривизны полотна направляющей.

Исходные линейные и угловые скорости движения \mathbf{V}_0 и $\boldsymbol{\omega}$, а также их первые производные по времени $\dot{\mathbf{V}}_0$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, задаются в системе

координат $Ox_1x_2x_3$, а затем пересчитываются в системе координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$:

$$\mathbf{V}_0^* = \Lambda^* \mathbf{V}_0; \quad \boldsymbol{\omega}^* = \Lambda^* \boldsymbol{\omega};$$

$$\dot{\mathbf{V}}_0^* = \frac{d\Lambda^*}{dt} \mathbf{V}_0 + \Lambda^* \dot{\mathbf{V}}_0; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^* = \frac{d\Lambda^*}{dt} \boldsymbol{\omega} + \Lambda^* \dot{\boldsymbol{\omega}}; \quad \frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{d\Lambda^*}{ds} |\mathbf{V}_0(t)|.$$

Учет упругости и демпфирования роликов. За счет упругости и демпфирования роликов тележка будет совершать дополнительные движения как твердое тело с пятью степенями свободы относительно подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ или $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. В качестве обобщенных координат, представляющих эти движения, будем рассматривать: перемещения $q_{0_2} = u_{0_2}$, $q_{0_3} = u_{0_3}$ полюса (точки O) вдоль координатных осей x_2 , x_3 (или \bar{x}_2 , \bar{x}_3) и углы поворота тележки $q_{0_4} = \Delta\tilde{\theta}_1$, $q_{0_5} = \Delta\tilde{\theta}_2$, $q_{0_6} = \Delta\tilde{\theta}_3$ в квадратичном приближении ($\sin \Delta\tilde{\theta}_i \approx \Delta\tilde{\theta}_i$, $\cos \Delta\tilde{\theta}_i \approx 1 - \Delta\tilde{\theta}_i^2/2$, $i = 1, 2, 3$) относительно осей x_1 , x_2 , x_3 (или относительно осей \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3) (рис. 2).

В результате точки O , A , B и C , которые по-прежнему связаны с траекторией движения, смещаются в точки O' , A' , B' и C' , которые в данном случае характеризуют положение тележки после введения упругостей роликов, т.е. $O'A' = l$ и $B'C' = 2a$ (смещения точек B и C по оси x_3 или \bar{x}_3 равны).

В этом случае вектор дополнительных перемещений твердого тела, обусловленных упругими деформациями роликов, будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=2}^6 q_{0_i} \boldsymbol{\varphi}_{0_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=4}^6 \sum_{j=4}^6 q_{0_i} q_{0_j} \boldsymbol{\psi}_{0_i 0_j},$$

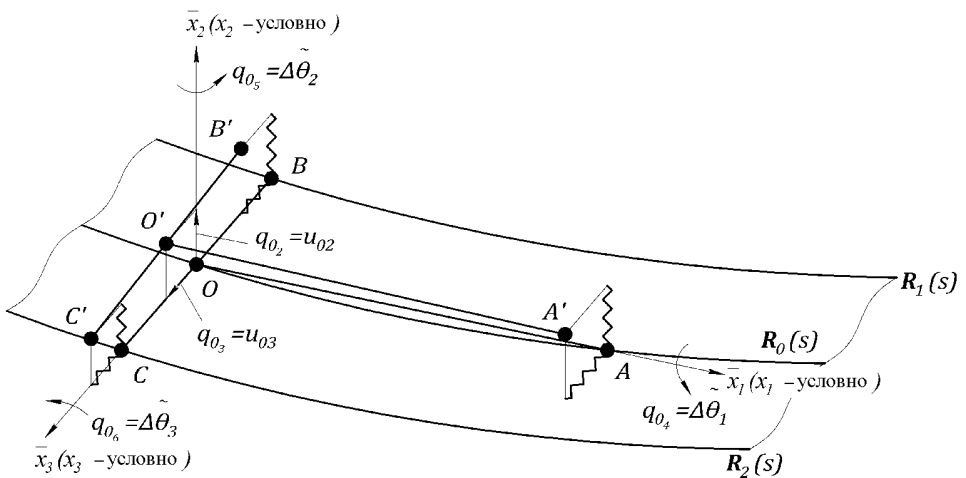


Рис. 2. Схема учета упругости и демпфирования роликов

где

$$\begin{aligned} \varphi_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \varphi_{0_3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; & \varphi_{0_4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}; & \varphi_{0_5} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix}; \\ \varphi_{0_6} &= \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \psi_{0_4 0_4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}; & \psi_{0_4 0_5} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \psi_{0_4 0_6} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \psi_{0_5 0_5} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ -x_3 \end{bmatrix}; & \psi_{0_5 0_6} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}; & \psi_{0_6 0_6} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При использовании подвижной системы координат $O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ вместо $Ox_1x_2x_3$ необходимо выполнить замену $x_i \rightarrow \bar{x}_i, i = 1, 2, 3$.

В общем случае при физически нелинейных деформациях, включая возможные зазоры, потенциальная энергия роликов тележки Π^P как составная часть потенциальной энергии Π записывается в обобщенных координатах как $\Pi^P = \Pi^P(q_{0_2}, q_{0_3}, q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6})$. При малых упругих деформациях роликов (в пределах закона Гука) и малых углах поворота тела, обусловленных этими деформациями, будем иметь

$$\Pi^P = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 k_{ij}^P q_{0_i} q_{0_j} \text{ или } \Pi^P = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{K}_0^P \mathbf{q}_0, \text{ где } \mathbf{K}_0^P = [k_{ij}^P] \text{ при } i, j = 2 \dots 6 \text{ — матрица коэффициентов жесткости, } \mathbf{q}_0 = [q_{0_2} \ q_{0_3} \ q_{0_4} \ q_{0_5} \ q_{0_6}]^T.$$

В общем случае вязкоупругих роликов вариация работы сил демпфирования записывается в следующем виде: $\delta A_d^P = -\delta \mathbf{q}_0^T \mathbf{D}_0^P \dot{\mathbf{q}}_0$, где $\mathbf{D}_0^P = [d_{ij}^P]$ при $i, j = 2 \dots 6$ — матрица коэффициентов демпфирования.

Вектор перемещений тележки $\tilde{\mathbf{u}}$, обусловленный податливостью роликов, складывается с вектором относительных упругих перемещений присоединенных масс, характеризуемых обобщенными координатами $q_1, q_2 \dots q_n$, и суммарный вектор обозначается через \mathbf{u} . В результате с учетом податливостей роликов вектор \mathbf{u} будет выражаться через обобщенные координаты $q_{0_2}, q_{0_3} \dots q_{0_6}, q_1, q_2 \dots q_n$.

Пример расчета. Приведем пример расчета параметров движения абсолютно жесткой двухосной тележки с абсолютно жестким телом по пространственному полотну, образованному из центральной винтовой линии $\mathbf{R}_0(s)$. Будем считать, что оси подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ без учета локальной кривизны $\mathbf{R}_0(s)$ совпадают с осями трехгранника Френе: ось Ox_1 — касательная t , ось Ox_2 — главная нормаль n , ось Ox_3 — бинормаль b .

Уравнение винтовой линии $\mathbf{R}_0(s)$ в неподвижной системе координат $O_*X_1X_2X_3$ имеет вид [10]: $X_{01}(s) = R \cos \varphi, X_{02}(s) = R \sin \varphi, X_{03}(s) = \lambda \varphi$, где φ — угол закрутки линии относительно оси O_*X_3 ;

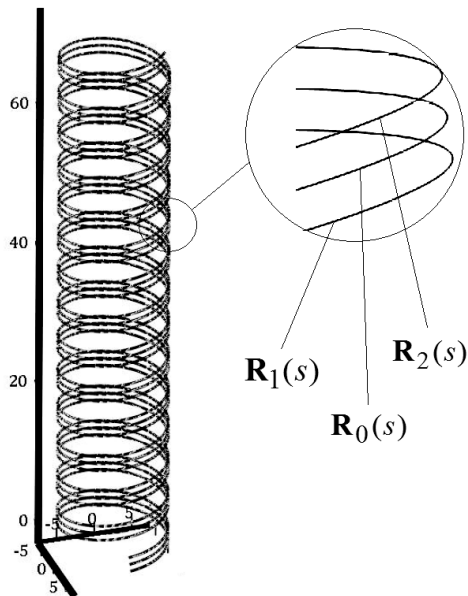


Рис. 3. Общий вид траектории движения

R — радиус винтовой линии (радиус цилиндрической образующей); λ — шаг подъема винтовой линии за угол поворота φ , равный 1 рад ($2\pi\lambda$ — подъем за один виток) (рис. 3). В любой точке винтовой линии касательная t , нормаль n и бинормаль b имеют следующие координаты (здесь и далее $\bar{R} = R/\sqrt{R^2 + \lambda^2}$, $\bar{\lambda} = \lambda/\sqrt{R^2 + \lambda^2}$): $t = [-\bar{R} \sin \varphi \ \bar{R} \cos \varphi \ \bar{\lambda}]^T$; $n = [-\cos \varphi \ -\sin \varphi \ 0]^T$; $b = [\bar{\lambda} \sin \varphi \ -\bar{\lambda} \cos \varphi \ \bar{R}]^T$.

Матрица Λ , как матрица направляющих косинусов единичных векторов t , n и b (без использования углов θ_1 , θ_2 и θ_3), записывается в следующем виде:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\bar{R} \sin \varphi & \bar{R} \cos \varphi & \bar{\lambda} \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \bar{\lambda} \sin \varphi & -\bar{\lambda} \cos \varphi & \bar{R} \end{pmatrix}.$$

Функциональная связь между длиной дуги s (она отсчитывается от точки $M(R, 0, 0)$ при $\varphi = 0$) и углом закрутки φ выражается следующим образом: $s(\varphi) = \varphi\sqrt{R^2 + \lambda^2}$. Кривизна $\kappa(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ винтовой линии в любой ее точке постоянны и равны [10]

$$\kappa(s) = \frac{R}{R^2 + \lambda^2}; \quad \varkappa(s) = \frac{\lambda}{R^2 + \lambda^2}.$$

Поскольку подвижная система координат $Ox_1x_2x_3$ связана с трехгранником Френе, то вектор мгновенной угловой скорости ω может быть определен через векторное соотношение $\omega = \varkappa t + \kappa b$. Поскольку матрица Λ и вектор ω в данном примере могут быть записаны

без использования углов θ_1 , θ_2 и θ_3 , то необходимо разработать иной алгоритм определения матриц $\bar{\Lambda}$ и Λ^* , чем приведенный ранее. Матрицу поворота Λ^* получим как матрицу поворота единичного вектора $\mathbf{t} = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$ (ось Ox_1) на угол $\Psi = \angle(Ox_1, O\bar{x}_1)$ относительно некоторого единичного вектора $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3]^T$, чтобы ось Ox_1 совпала с $O\bar{x}_1$ и вектор \mathbf{t} совпал с единичным направляющим вектором $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3]^T$ оси $O\bar{x}_1$. Координаты вектора $\boldsymbol{\rho}$ определяются с помощью уравнения прямой $O\bar{x}_1$ как прямой, проходящей через две заданные точки O и A , после нормирования:

$$\rho_1 = \frac{X_{01}(s_A) - X_{01}(s_O)}{l}; \quad \rho_2 = \frac{X_{02}(s_A) - X_{02}(s_O)}{l};$$

$$\rho_3 = \frac{X_{03}(s_A) - X_{03}(s_O)}{l}.$$

Угол поворота Ψ найдем из скалярного произведения единичных векторов \mathbf{t} и $\boldsymbol{\rho}$:

$$\cos \Psi = t_1 \rho_1 + t_2 \rho_2 + t_3 \rho_3.$$

Координаты вектора $\boldsymbol{\xi}$, вокруг которого осуществляется поворот, определяются как координаты вектора нормали плоскости $Ox_1\bar{x}_1$ или через векторное произведение $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{\rho}$:

$$\xi_1 = t_2 \rho_3 - t_3 \rho_2; \quad \xi_2 = t_3 \rho_1 - t_1 \rho_3; \quad \xi_3 = t_1 \rho_2 - t_2 \rho_1.$$

Матрица поворота $Ox_1x_2x_3 \rightarrow O\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, учитывающая локальную кривизну направляющей поверхности, имеет следующий вид:

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} \cos \Psi + (1 - \cos \Psi) \xi_1^2 & (1 - \cos \Psi) \xi_1 \xi_2 + (\sin \Psi) \xi_3 \\ (1 - \cos \Psi) \xi_2 \xi_1 - (\sin \Psi) \xi_3 & \cos \Psi + (1 - \cos \Psi) \xi_2^2 \\ (1 - \cos \Psi) \xi_3 \xi_1 + (\sin \Psi) \xi_2 & (1 - \cos \Psi) \xi_3 \xi_2 - (\sin \Psi) \xi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1 - \cos \Psi) \xi_1 \xi_3 - (\sin \Psi) \xi_2 \\ (1 - \cos \Psi) \xi_2 \xi_3 + (\sin \Psi) \xi_1 \\ \cos \Psi + (1 - \cos \Psi) \xi_3^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда определяется матрица $\bar{\Lambda} = \Lambda^* \Lambda$.

Исходные данные для расчета: $R = 7$ м, $\lambda = 5/2\pi = 0,796$ м, $V_0(t) = 3t + 7 \sin(t/2)$ м/с, $\kappa = 0,141$ 1/м, $\varkappa = 0,016$ 1/м, $\bar{R} = 0,994$, $\bar{\lambda} = 0,113$, $a = 1$ м, $l = 2$ м, $m = 100$ кг — масса тележки. Координаты центра тяжести тела (в вертикальной плоскости симметрии) — $r = [1 \ 0, 5 \ 0]^T$. Рассматриваемый интервал движения $t \in [0, 20]$ с. Число разбиений рассматриваемого отрезка времени — 5000. Задача решалась в двух постановках: без учета локальной кривизны направляющей (расчетный случай 1 — РС № 1), с учетом локальной кривизны направляющей (расчетный случай 2 — РС № 2). Функция $V_0(t)$ была

подобрана таким образом, чтобы на начальном этапе движения скорости были относительно небольшие (0...10 м/с), а в конце интервала немонотонно возрастали до величин 40...50 м/с. Это позволяет более детально рассмотреть необходимость учета локальной кривизны. Все расчеты выполнены в программном комплексе PTC MathCad 15 M030.

В табл. 1 приведено сравнение результатов решения задачи по компонентам вектора скорости $V = [V_1 \ V_2 \ V_3]^T$ и компонентам ускорения $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ для различных моментов времени. Из табл. 1 следует, что в наибольшей степени учет локальной кривизны влияет на кинематические параметры, записанные в проекции на бинормаль b . Эти параметры могут не только изменить свой знак, но и изменить свой функциональный вид — в РС № 1 функции $V_3(t)$ и $a_3(t)$ являются прямыми горизонтальными линиями (const), а вид этих же функций для РС № 2 показан на рис. 4. Этот факт следует учитывать при определении перегрузок и биомеханическом анализе [14].

Таблица 1

Кинематические параметры	Расчетный случай					
	№ 1	№ 2	№ 1	№ 2	№ 1	№ 2
	при $t = 5$ с		при $t = 10$ с		при $t = 15$	
$V_1, \text{ м/с}$	19,119	18,928	23,217	22,985	51,495	50,981
$V_2, \text{ м/с}$	0,141	-0,239	0,141	-0,321	0,141	-0,879
$V_3, \text{ м/с}$	8,017·3	0,048	8,017·10 ⁻³	0,044	8,017·10 ⁻³	-0,058
$a_1, \text{ м/с}^2$	0,176	0,227	3,973	3,998	4,193	4,293
$a_2, \text{ м/с}^2$	2,696	2,639	3,274	3,131	7,263	7,036
$a_3, \text{ м/с}^2$	2,261·10 ⁻³	0,049	2,261·10 ⁻³	-0,112	2,261·10 ⁻³	-0,693

В табл. 2 приведено сравнение результатов решения задачи по реакциям со стороны тележки на кривую P_1-P_5 и P_0 . Отрицательные значения реакций P_1-P_3 не означают отрыв тележки от полотна. Это говорит о том, что при учете обхвата рельса двумя роликами в вертикальной плоскости деформироваться начнет нижний ролик, а не верхний. В наибольшей степени учет локальной кривизны влияет на реакции P_4 и P_5 , т.е. реакции, векторы которых направлены по бинормали b , причем различие проявляется на конечном этапе движения при больших скоростях. Следует отметить, что: 1) вид кривых P_1-P_5 и P_0 качественно для РС № 1 и РС № 2 не изменяется; 2) значения P_4 и P_5 равны; 3) значения P_1 и P_2 близки. На рис. 5 приведены графики изменения реакции P_4 (P_5) по времени в РС № 1 и РС № 2.

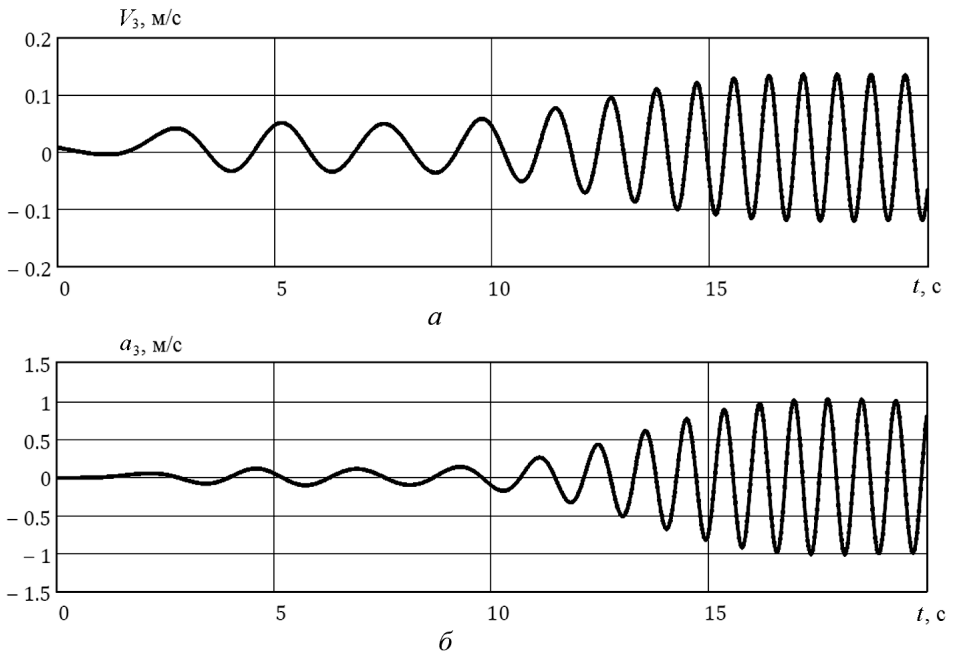


Рис. 4. Проекция скорости (а) и ускорения (б) на бинормаль

Таблица 2

Реакция тележки, Н	Расчетный случай					
	№ 1	№ 2	№ 1	№ 2	№ 1	№ 2
	при $t = 5$ с		при $t = 10$ с		при $t = 15$ с	
P_1	-134,335	-129,267	223,449	221,546	494,055	469,680
P_2	-182,455	-178,614	181,821	186,080	520,960	530,626
P_3	96,693	103,757	571,804	562,907	567,684	541,930
P_4	48,120	49,348	41,628	35,466	-26,905	-60,946
P_5	48,120	49,348	41,628	35,466	-26,905	-60,946
P_0	-826,967	-826,967	-333,068	-310,563	894,662	916,751

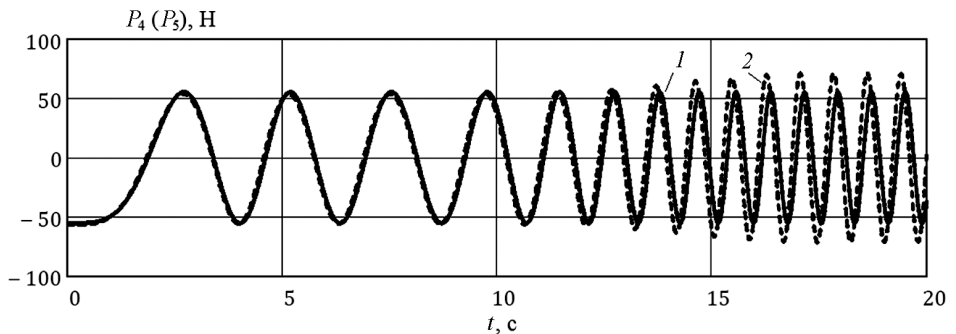


Рис. 5. Реакции со стороны тела на направляющую по бинормали:

1 – РС № 1; 2 – РС № 2

Таким образом, учет локальной кривизны направляющей позволяет уточнить значения проекций скорости и ускорения по бинормали, а также влияет на значения реакций со стороны тела в направлении бинормали.

Выводы. Разработана новая общая математическая модель для расчета движения тела на упруговязких роликах по произвольной двухрельсовой изогнутой и закрученной пространственной направляющей с учетом относительного движения упругих присоединенных масс. С учетом разработанной методики расчета динамических нагрузок (реакций движущегося тела) в качестве дальнейшего исследования темы можно построить алгоритм, позволяющий проектировать и моделировать криволинейную направляющую поверхность, которая удовлетворяет определенному набору кинематических, прочностных и биомеханических критериев. Методики и алгоритмы, разработанные в настоящей работе, могут быть использованы для расчета различных механических систем в проектной практике, в частности, для проектирования систем запуска беспилотных летательных аппаратов, экстремальных катальных гор и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Гнездилов В.А. Проектирование и изготовление металлоконструкций для сложных механизированных аттракционов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2000. № 6. С. 20–24.
3. Wayne T. Roller Coaster Physics, Wayne, 1998. 154 p.
URL: <http://vip.vast.org/BOOK/HOME.HTM> (дата обращения 24.04.2015).
4. Кулаков Н.А. Воздействие динамической нагрузки на наземные транспортные средства. Избранные проблемы прочности современного машиностроения. М.: Физматлит, 2008. 204 с.
5. Селифонов В.В. Теория автомобиля. М.: Гринлайт, 2009. 206 с.
6. Русских С.В. Движение твердого тела на двух колесах по плоской кривой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 2 (647). С. 52–58.
7. Шклярчук Ф.Н. Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 161–175.
8. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2007. 328 с.
9. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. М.: Комкнига, 2006. 302 с.
10. Рашиевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Изд-во ЛКИ, 2013. 432 с.
11. Vanchoff T., Lovett S.T. Differential Geometry of Curves and Surfaces. AK Peters, Taylor & Francis, 2010. 352 p.
12. Космодемьянский А.А. Динамика космического полета. М.: Либроком, 2011. 248 с.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
14. Рабинович Б.А. Безопасность человека при ускорениях (Биомеханический анализ). М.: Книга и бизнес, 2007. 208 с.

REFERENCES

- [1] Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shkliarchuk F.N. Aerogidrouprugost' konstruksiy [Construction aerohydroelasticity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 592 p.
- [2] Gnezdilov V.A. Design and fabrication of steel structures for complex mechanized attractions. *Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve* [Erecting and special works in construction], 2000, no. 6, pp. 20–24 (in Russ.).
- [3] Wayne T. Roller Coaster Physics, Wayne, 1998. 154 p. Available at: <http://vip.vast.org/BOOK/HOME.HTM> (accessed 24 April 2015).
- [4] Kulakov N.A. Vozdeistvie dinamicheskoi nagruzki na nazemnyye transportnye sredstva. Izbrannye problemy prochnosti sovremennogo mashinostroeniia [The impact of the dynamic loads on ground vehicles. Selected problems of modern engineering strength]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 204 p.
- [5] Selifonov V.V. Teoriya avtomobilya [The theory of car]. Moscow, Grinlait Publ., 2009. 206 p.
- [6] Russkih S.V. Motion of a rigid body on two wheels on a plane curve. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2014, no. 2 (647), pp. 52–58 (in Russ.).
- [7] Shklyarchuk F.N. Non-linear and linearized equations of motion of the elastic space structures. *Izv. RAN. MTT* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of rigid body], 1996, no. 1, pp. 161–175 (in Russ.).
- [8] Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksii [Dynamics of elastic controlled constructions]. Moscow, MAI Publ., 2007. 328 p.
- [9] Biushgens S.S. Differentsial'naiia geometriia [Differential geometry]. Moscow, Komkniga Publ., 2006. 302 p.
- [10] Rashevskiy P.K. Kurs differentsial'noi geometrii [A course of differential geometry]. Moscow, LKI Publ., 2013. 432 p.
- [11] Banchoff T., Lovett S.T. Differential Geometry of Curves and Surfaces. AK Peters, Taylor & Francis, 2010. 352 p.
- [12] Kosmodem'yanskiy A.A. Dinamika kosmicheskogo poleta [The dynamics of space flight]. Moscow, Librokom Publ., 2011. 248 p.
- [13] Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 712 p.
- [14] Rabinovich B.A. Bezopasnost' cheloveka pri uskoreniyakh (Biomekhanicheskiy analiz) [Human safety when accelerating (Biomechanical analysis)]. Moscow, Kniga i biznes Publ., 2007. 208 p.

Статья поступила в редакцию 17.06.2015

Гнездилов Владимир Алексеевич — канд. техн. наук, заведующий кафедрой “Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций” Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Gnezdilov V.A. — Cand. Sci. (Eng.), Head of Strength of Aviation and Aerospace Structures Department, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoye shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Русских Сергей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций” Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Russkikh S.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Strength of Aviation and Aerospace Structures Department, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoye shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гнездилов В.А., Русских С.В. Движение абсолютно жесткой двухосной тележки с упругим телом по двухрельсовому криволинейному полотну // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. №2. С. 93–112. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-93-112

Please cite this article in English as:

Gnezdilov V.A., Russkikh S.V. The motion of an absolutely rigid biaxial trolley with an elastic body along a double rail curvilinear track. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2016, no. 2, pp. 93–112. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-93-112